doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2026.22.037

基于频域极大似然估计 ARMA 模型的运行模态辨识方法

宋圣霖[1]　张二亮[1,2]

(1.郑州大学机械与动力工程学院, 郑州 450001; 2.抗疲劳制造产业技术研究院, 郑州 450016)

摘要: 为提升运行模态参数识别精度,本文建立多变量 ARMA 模型的频域极大似然识别方法,以实现 ARMA 模型参数最优估计;基于所估计模型的 AR 部分,完成了模态参数识别。考虑到测量噪声对模态识别的影响,通过特征值分解与灵敏度分析,构造多变量 ARMA 模型参数估计的不确定性边界,从而实现了模态参数识别中不确定性的传递与量化。数值算例结果表明,所提方法能够精准提取模态参数并给出估计的置信区间,且识别精度显著优于基于多变量 AR 模型和辅助变量法的运行模态分析结果。

关键词: 多变量 ARMA 模型; 运行模态分析; 极大似然方法; 置信区间

中图分类号: TB123; O327　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2026)22-0419-08　　**OSID**:

Operational Modal Identification Method Based on Frequency-domain Maximum Likelihood Estimates of ARMA Models

Song Shenglin[1]　Zhang Erliang[1,2]

(1. *School of Mechanical and Power Engineering*, *Zhengzhou University*, *Zhengzhou* 450001, *China*
2. *Industrial Science and Technology Institute for Anti-fatigue Manufacturing*, *Zhengzhou* 450016, *China*)

Abstract: Aiming to enhance the identification accuracy and stability of structural operational modal parameters under actual working conditions, a frequency-domain maximum likelihood identification method for multivariate ARMA models was established, which enabled the optimal and high-precision estimation of ARMA model key parameters. Based on the accurately estimated model, operational modal parameter identification was further completed by analyzing and applying the AR component of the multivariate ARMA model. In practical modal identification tests, measurement noise from sensors and data acquisition processes inevitably interfered with identification results and reduced the reliability of modal parameters. Considering the adverse impact of measurement noise on operational modal identification, it constructed uncertainty bounds for the parameter estimates of multivariate ARMA models through eigenvalue decomposition and parameter sensitivity analysis, which effectively realized the propagation and quantitative evaluation of uncertainty in the entire modal parameter identification process. Numerical example results verified that the proposed method can accurately extract structural modal parameters and provide reliable estimation confidence intervals for identification results. Moreover, compared with the traditional operational modal analysis methods, including multivariate AR models and the instrumental variable method, the proposed approach delivered remarkably higher identification accuracy and better anti-noise performance.

Key words: multivariate ARMA model; operational modal analysis; maximum likelihood method; confidence interval

0　引言

模态分析在结构设计、振动控制和故障诊断等多个领域具有重要作用[1-4]。鉴于实际工程中施加人为可控激励的高昂成本和局限性,运行模态分析(Operational modal analysis, OMA)技术得到国内外

收稿日期: 2025-06-23　修回日期: 2025-08-21

基金项目: 国家自然科学基金项目(61873244)

作者简介: 宋圣霖(1993—),男,博士生,主要从事时间序列处理算法研究,E-mail: 202011201010231@zzu.edu.cn

通信作者: 张二亮(1979—),男,教授,博士生导师,主要从事结构模态分析与统计信号处理研究,E-mail: erliang.zhang@zzu.edu.cn

学者的广泛关注,取得了诸多研究进展[5-7],该方法只需采集环境激励下结构响应,便可实现模态参数辨识。

基于非参数功率谱密度函数,峰值提取法被提出用来估计模态参数,该方法简单,但不适用于提取密集模态和低阻尼[8]。基于非参数功率谱密度,进一步发展了频域分解法,然而该方法对阻尼比估计精度较低[9]。基于结构响应之间的传递率函数,发展了 TOMA 方法,该方法适用于任意有色环境激励,但需进行多次激励[10]。基于状态空间模型发展了随机子空间模态分析方法[11-12],能提升非参数方法辨识精度,但易受过程噪声干扰,模型阶次也难以精准确定。

基于结构响应的参数化 ARMA(Auto regressive moving average)模型,是实现模态参数辨识的重要途径。ARMA 模型是自回归滑动平均模型,通过结合自回归(Auto regressive, AR)和滑动平均(Moving average, MA)特性,广泛用于多种领域时序数据建模与预测。基于 ARMA 模型的模态辨识方法分为 2 类:①采用单变量 ARMA 模型对每个输出数据单独处理以完成模态辨识,其参数估计一般采用最小二乘法[13-16],但有学者指出这类方法计算量较大[17]。②采用多变量 ARMA 模型一次性对所有输出数据进行建模,基于 AR 部分的参数获得模态参数估计,目前该模型主要采用最小二乘法[18]和辅助变量法[19-20]进行估计,其中辅助变量法通过构造与输出相关但和驱动噪声不相关的序列,只需估计 AR 部分,计算量较少。随着阶次提高,多变量 AR 模型能拟合任意动态系统响应,故也可用于模态辨识,参数估计主要采用最小二乘法[21]和贝叶斯估计[22],当采用无信息先验时,贝叶斯估计退化为最小二乘估计。

测量噪声的存在使得模态参数估计具有不确定性,参数估计不确定度的量化与参数估计本身同等重要。在频域方法中,基于传递函数估计的系数,应用线性化理论构建了模态参数不确定界[23]。基于估计的多变量 AR 模型,通过特征值分解及其灵敏度分析,构建了模态参数不确定界[22]。

基于多变量 ARMA 模型进行模态分析的关键在于实现多变量 ARMA 模型高精度估计。现有估计方法本质上大都属于最小二乘法,估计精度有待提高。极大似然(Maximum likelihood, ML)方法能够达到理论上 Cramér-Rao 下界[24],具有最优统计特性。经过离散傅里叶变换,频域上随机结构响应服从渐近复正态分布[24],同时在频域内也便于选取感兴趣的频段进行模态辨识。本文应用 ML 方法获得多变量 ARMA 模型高精度估计,以实现模态参数辨识,并基于特征值分解和线性化理论,构建模态参数不确定界。最后基于随机激励下悬臂梁算例,比较多变量 AR 模型[22]及辅助变量法[19],以验证所提出方法的有效性。

1 振动结构响应的 ARMA 模型

考虑线性结构动力学系统它由质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵构成,计算式为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{x}}(\tau)+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{x}}(\tau)+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(\tau)=\boldsymbol{f}(\tau) \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{M}$——$n\times n$ 质量矩阵

$\boldsymbol{C}$——$n\times n$ 阻尼矩阵

$\boldsymbol{K}$——刚度矩阵

$\boldsymbol{x}(\tau)$——$n\times 1$ 位移向量

$\boldsymbol{f}(\tau)$——$n\times 1$ 激励向量

τ——连续时间

式(1)经过求解及时间离散化,可得离散时间 t 下输出 $\boldsymbol{y}(t)$,且该实测数据 $\boldsymbol{y}(t)$ 受测量噪声干扰。$\boldsymbol{y}(t)$ 可表示为多变量 ARMA 模型[25],即

$$\boldsymbol{A}(q^{-1})\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{B}(q^{-1})\boldsymbol{e}(t) \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$、$\boldsymbol{B}(q^{-1})$——$n\times n$ 的互质多项式

q^{-1}——时域后移算子

$\boldsymbol{e}(t)$——由激励向量和测量噪声通过谱分解得到的新信息序列

时域 $\boldsymbol{e}(t)$ 可表示为互不相关的 $n\times 1$ 白噪声向量。多项式 $\boldsymbol{A}(q^{-1})$ 包含结构质量、阻尼、刚度信息,多项式 $\boldsymbol{B}(q^{-1})$ 为 MA 部分,还包含结构激励信号以及测量噪声模型。

对于任意非周期环境激励,需对时域输出数据起始和终止条件引起的频谱泄漏进行建模,以提升估计精度[24]。频域多变量 ARMA 模型为

$$\boldsymbol{A}(z_k)\boldsymbol{Y}(k)=\boldsymbol{B}(z_k)\boldsymbol{E}(k)+\boldsymbol{T}(z_k) \tag{3}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}(z_k)=\boldsymbol{I}_n+\sum\limits_{i=1}^{n_g}\boldsymbol{A}_i z_k^{-i}\\ \boldsymbol{B}(z_k)=\boldsymbol{I}_n+\sum\limits_{i=1}^{n_g}\boldsymbol{B}_i z_k^{-i}\\ \boldsymbol{T}(z_k)=\sum\limits_{i=0}^{n_t}\boldsymbol{T}_i z_k^{-i}\end{cases} \tag{4}$$

$$z_k=\exp(j2\pi k/N)\quad(j=\sqrt{-1})$$

$$n_t=n_g-1$$

式中 z_k——频域变量

$\boldsymbol{Y}(k)$——时域响应 $\boldsymbol{y}(t)$ 经离散傅里叶变换后频域向量

$\boldsymbol{E}(k)$——$n\times 1$ 循环复高斯白噪声向量,其协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Lambda}$

$\boldsymbol{T}(z_k)$——$n\times1$ 瞬态项

$\boldsymbol{A}(z_k)$、$\boldsymbol{B}(z_k)$——频域 $n\times n$ 多项式矩阵

$\boldsymbol{I}_n$——$n\times n$ 单位矩阵

2　ARMA 模型极大似然估计

2.1　极大似然估计器

引入传递函数矩阵和相关的瞬态项

$$\boldsymbol{T}_G(z_k,\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{A}^{-1}(z_k,\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{B}(z_k,\boldsymbol{\theta})$$

$$\boldsymbol{T}_I(z_k,\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{A}^{-1}(z_k,\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{T}(z_k,\boldsymbol{\theta})$$

式中　$\boldsymbol{\theta}$——多项式矩阵 $\boldsymbol{A}(z_k)$、$\boldsymbol{B}(z_k)$、$\boldsymbol{T}(z_k)$ 参数向量

由于 $\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{T}_I(z_k)$ 是循环复高斯分布，并假定在每个频率上相互独立，基于式(3)、(4)构建 ML 代价函数为

$$V_1(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{Y})=\sum_{k\in K}(\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{T}_I(k,\boldsymbol{\theta}))^{\mathrm{H}}\boldsymbol{S}_Y^{-1}(k,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda})\cdot(\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{T}_I(k,\boldsymbol{\theta}))+\ln\det\boldsymbol{S}_Y(k,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda})\tag{5}$$

其中　$\boldsymbol{S}_Y(k,\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda})=\boldsymbol{T}_G(z_k,\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{T}_G^{\mathrm{H}}(z_k,\boldsymbol{\theta})$

上标 H 表示共轭转置运算，K 表示频域输出数据的索引集，$\mathrm{ord}(K)=F$。

由于协方差矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 未知，可通过对 $\boldsymbol{\Lambda}$ 求导获得其估计，进而将其消除。令 $\partial V_1(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{Y})/\partial\boldsymbol{\Lambda}=0$，则

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{F}\mathrm{Re}\left(\sum_{k\in K}\boldsymbol{\xi}(k,\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{H}}(k,\boldsymbol{\theta})\right)\tag{6}$$

其中　$\boldsymbol{\xi}(k,\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{T}_G^{-1}(z_k,\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{T}_I(z_k,\boldsymbol{\theta}))$

式中 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{X})$ 表示取 $\boldsymbol{X}$ 的实部。

在式(5)中设置 $\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta})$，构造仅关于参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的 ML 成本函数为

$$V_2(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{Y})=\exp\left(\frac{1}{F}V_1(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\theta}),\boldsymbol{Y})-1\right)=\det\left[\mathrm{Re}\left(\frac{1}{F}\sum_{k\in K}\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k,\boldsymbol{\theta})\hat{\boldsymbol{\xi}}^{\mathrm{H}}(k,\boldsymbol{\theta})\right)\right]\tag{7}$$

其中　$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}(k,\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{\xi}(k,\boldsymbol{\theta})g_1(\boldsymbol{\theta})\tag{8}$$

$$g_1(\boldsymbol{\theta})=\exp\left(\frac{1}{Fn}\sum_{k\in K}\ln\det\boldsymbol{T}_G(z_k,\boldsymbol{\theta})\right)\tag{9}$$

式中 $\det[\cdot]$ 表示矩阵行列式。

通过高斯-牛顿算法对式(7)最小化，迭代过程具体实施步骤参照文献[26]。为增加收敛域，采取 Powell's dogleg 置信域方法对迭代步长进行控制[27]。ML 非线性优化需较高质量的起始值，通过两步最小二乘方法得到多变量 ARMA 模型初始估计[28-29]。

2.2　ARMA 模型不确定界

由于 ML 估计理论上能达到 Cramér－Rao 下界，通过构造 Cramér－Rao 下界计算模型参数不确定区间。参照文献[26]频域方法构造 ARMA 模型不确定界为

$$(\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0))_{[m,n]}=\sum_{k\in K}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{S}_Y^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0,k)\frac{\partial\boldsymbol{S}_Y(\boldsymbol{\theta},k)}{\partial(\boldsymbol{\theta}_0)_{[m]}}\boldsymbol{S}_Y^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0,k)\frac{\partial\boldsymbol{S}_Y(\boldsymbol{\theta},k)}{\partial(\boldsymbol{\theta}_0)_{[n]}}\right)\tag{10}$$

其中 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵取迹。

式(5)中 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可采用其估计值代替。式(10)可简化为

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_0)=(\boldsymbol{J}_1)_{\mathrm{re}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_1)_{\mathrm{re}}\tag{11}$$

其中　$$\boldsymbol{J}_1=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{\theta}_0}\begin{bmatrix}\mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_1)\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_2)\\ \vdots\\ \mathrm{vec}(\boldsymbol{C}_F)\end{bmatrix}\tag{12}$$

$$\boldsymbol{C}_k=\boldsymbol{S}_Y^{-\mathrm{H}/2}(\boldsymbol{\theta}_0,k)\boldsymbol{S}_Y(\boldsymbol{\theta},k)\boldsymbol{S}_Y^{-1/2}(\boldsymbol{\theta}_0,k)\tag{13}$$

式中　$(\boldsymbol{J}_1)_{\mathrm{re}}$——矩阵 $\boldsymbol{J}_1$ 实部和虚部的叠加组合

vec 表示矩阵向量化运算。

通过奇异值分解实现数值稳定计算，基于式(11)～(13)，多变量 ARMA 模型参数的 Cramér－Rao 下界计算结果为

$$\begin{cases}(\boldsymbol{J}_1)_{\mathrm{re}}=\boldsymbol{U}_J\boldsymbol{\Sigma}_J\boldsymbol{V}_J^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{K}_J=\boldsymbol{V}_J\boldsymbol{\Sigma}_J^{-1}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta}_0)=\boldsymbol{K}_J\boldsymbol{K}_J^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{14}$$

3　基于 ARMA 模型的运行模态分析

3.1　基于 ARMA 模型的模态参数辨识

在 ML 辨识得到多变量 ARMA 模型参数后，需获得结构模态参数。通常基于多变量 ARMA 模型 AR 部分，实现模态参数辨识。基于 AR 部分[22,25]，构造增广矩阵

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O}_n & \boldsymbol{I}_n & \cdots & \boldsymbol{O}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{O}_n & \boldsymbol{O}_n & \cdots & \boldsymbol{I}_n\\ -\boldsymbol{A}_{n_g} & -\boldsymbol{A}_{n_g-1} & \cdots & -\boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\tag{15}$$

式中　$\boldsymbol{O}_n$——$n\times n$ 零矩阵

增广矩阵 $\boldsymbol{L}$ 特征值和特征向量包含式(1)的特征值和特征向量[30]。故对矩阵 $\boldsymbol{L}$ 进行特征分解可计算模态参数，即

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi}_m=\lambda_m\boldsymbol{\varphi}_m\tag{16}$$

矩阵 $\boldsymbol{L}$ 第 m 阶特征值 λ_m 包含第 m 阶模态频率 f_m 和模态阻尼比 ζ_m，特征向量包含模态振型。对于模态频率，需注意离散时间系统和连续时间系统之间的联系，即

$$\mu_m=\frac{\ln\lambda_m}{T_s}\tag{17}$$

式中　μ_m——第 m 阶连续系统特征值

T_s——测量中采样间隔

在连续系统中,特征值共轭成对出现。定义 μ_m 实部和虚部为 μ_m^R 和 μ_m^I,第 m 阶模态频率和阻尼比为

$$\boldsymbol{\eta}_m=\begin{bmatrix}f_m\\ \zeta_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{|\mu_m|}{2\pi}\\ -\dfrac{\mu_m^R}{|\mu_m|}\end{bmatrix} \tag{18}$$

其中 $$|\mu_m|=\sqrt{(\mu_m^R)^2+(\mu_m^I)^2}$$

第 m 阶模态振型 $\boldsymbol{\phi}_m$ 和第 m 阶特征向量 $\boldsymbol{\varphi}_m$ 之间的线性关系为

$$\boldsymbol{\varphi}_m=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\phi}_m\\ \lambda_m\boldsymbol{\phi}_m\\ \vdots\\ \lambda_m^{n_g-1}\boldsymbol{\phi}_m\end{bmatrix} \tag{19}$$

基于频域极大似然估计 ARMA 模型的运行模态辨识方法流程图如图 1 所示。

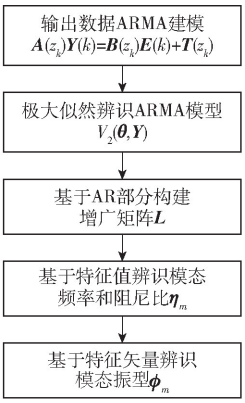


图 1 基于 ARMA 模型的模态辨识流程

Fig. 1 Flowchart of modal identification based on ARMA model

3.2 模态参数不确定界

模态参数估计不确定界计算的关键在于如何对式(16)中矩阵的特征值分解进行灵敏度分析。在文献[22]基础上构造模态参数不确定区间。定义从增广矩阵估计 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 得到离散系统特征值的函数为 $\lambda_m=P_{1,m}(\mathrm{vec}(\hat{\boldsymbol{L}}))$。基于式(17),定义从 λ_m 到 μ_m 的函数为 $\mu_m=P_{2,m}(\lambda_m)$。基于式(18),从 μ_m 得到模态频率和模态阻尼比函数为 $\boldsymbol{\eta}_m=P_{3,m}(\mu_m)$。基于式(19),从增广矩阵估计 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 得到 $\boldsymbol{\varphi}_m$ 的函数为 $\boldsymbol{\varphi}_m=P_{4,m}(\mathrm{vec}(\hat{\boldsymbol{L}}))$。

令 $\boldsymbol{L}=\hat{\boldsymbol{L}}+\delta\boldsymbol{L}$,$\boldsymbol{\varphi}_m=\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m+\delta\boldsymbol{\varphi}_m$,结合式(16),则

$$(\delta\boldsymbol{L})\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m+\hat{\boldsymbol{L}}\delta\boldsymbol{\varphi}_m=(\delta\lambda_m)\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m+\hat{\lambda}_m\delta\boldsymbol{\varphi}_m \tag{20}$$

引入矩阵 $\hat{\boldsymbol{L}}$ 左特征值

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{L}}_m=\hat{\lambda}_m\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m^{\mathrm{H}} \tag{21}$$

基于式(20)、(21)可获得特征值 λ_m 的协方差矩阵

$$\boldsymbol{C}_{\lambda_m}=\frac{\partial P_{1,m}}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{C}_{\mathrm{vec}}(\hat{\boldsymbol{L}})\left(\frac{\partial P_{1,m}}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}\right)^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

其中

$$\frac{\partial P_{1,m}}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}\right)\\ \mathrm{Im}\left(\dfrac{\partial\lambda_m}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}\right)\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$\frac{\partial\lambda_m}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}=\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m^{\mathrm{T}}\otimes\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m^{\mathrm{H}}}{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m} \tag{24}$$

其中 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{X})$ 表示取 $\boldsymbol{X}$ 虚部。$\boldsymbol{C}_{\mathrm{vec}}(\hat{\boldsymbol{L}})$ 可基于式(14)、(15),借助一阶泰勒展开分析得到。符号⊗表示 Kronecker 积。

基于式(22)~(24)计算 $\boldsymbol{C}_{\lambda_m}$ 后,μ_m 协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C}_{\mu_m}=\frac{\partial P_{2,m}}{\partial\lambda_m}\boldsymbol{C}_{\lambda_m}\left(\frac{\partial P_{2,m}}{\partial\lambda_m}\right)^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

其中

$$\frac{\partial P_{2,m}}{\partial\lambda_m}=\frac{1}{T_s|\hat{\lambda}_m|^2}\begin{bmatrix}\hat{\lambda}_m^R & \hat{\lambda}_m^I\\ -\hat{\lambda}_m^I & \hat{\lambda}_m^R\end{bmatrix} \tag{26}$$

式中 $\hat{\lambda}_m^R$、$\hat{\lambda}_m^I$——$\hat{\lambda}_m$ 实部和虚部

基于式(25)、(26)计算 $\boldsymbol{C}_{\mu_m}$ 后,模态频率和阻尼比 $\boldsymbol{\eta}_m$ 协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\eta}_m}=\frac{\partial P_{3,m}}{\partial\mu_m}\boldsymbol{C}_{\mu_m}\left(\frac{\partial P_{3,m}}{\partial\mu_m}\right)^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

其中

$$\frac{\partial P_{3,m}}{\partial\mu_m}=\frac{1}{|\hat{\mu}_m|}\begin{bmatrix}\dfrac{\hat{\mu}_m^R}{2\pi} & \dfrac{\hat{\mu}_m^I}{2\pi}\\ -\dfrac{(\hat{\mu}_m^I)^2}{|\hat{\mu}_m|^2} & \dfrac{\hat{\mu}_m^R\hat{\mu}_m^I}{|\hat{\mu}_m|^2}\end{bmatrix} \tag{28}$$

继续对增广矩阵 $\boldsymbol{L}$ 分析,模态振型协方差矩阵为

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\varphi}_m}=\frac{\partial P_{4,m}}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}\boldsymbol{C}_{\mathrm{vec}}(\hat{\boldsymbol{L}})\left(\frac{\partial P_{4,m}}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}\right)^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

其中

$$\frac{\partial P_{4,m}}{\partial\mathrm{vec}(\boldsymbol{L})}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m^{\mathrm{T}}\otimes\left[(\hat{\lambda}_m\boldsymbol{I}-\hat{\boldsymbol{L}})^{\dagger}\left(\boldsymbol{I}-\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m^{\mathrm{H}}}{\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m^{\mathrm{H}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}_m}\right)\right] \tag{30}$$

其中上标 † 表示 Moore - Penrose 伪逆。

基于多变量 ARMA 模型运行模态参数估计的不确定度传播与量化流程如图 2 所示。

4 实验验证

采用悬臂梁结构的振动数值数据,开展所提出的运行模态分析方法验证。悬臂梁结构形式在农业机械结构中有诸多应用[31],例如厢式农用运输车悬架系统中渐变刚度钢板弹簧为典型的悬臂梁结构形式[32],在工作中承受路面不平度及风扰等环境激励,这些环境激励具有明显的随机宽频特性。如图 3 所示,悬臂梁长度为 1.2 m,横截面为 0.02 m × 0.02 m,弹性模量为 100 GPa。左侧边界施加固定约

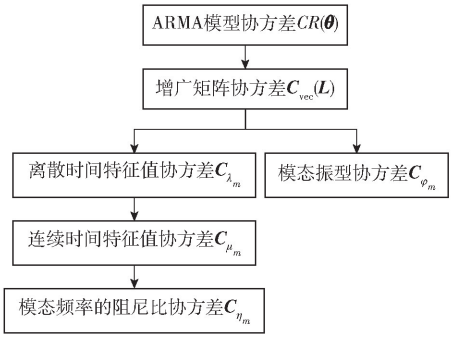


图 2　不确定度构造流程

Fig. 2　Flowchart of constructing uncertainty bounds

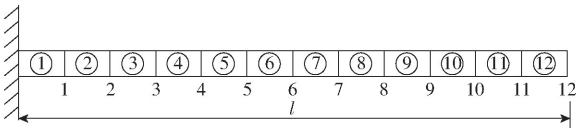


图 3　悬臂梁结构示意图

Fig. 3　Schematic of cantilever beam structure

束，采用 Hermitian 梁单元对梁进行离散化处理，梁单元自由度有 2 个，分别为横向平动和转动。

通过有限元分析程序得到该模型质量矩阵和刚度矩阵[33]。采用比例阻尼 $\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{M}+\beta\boldsymbol{K}$，$\alpha=50$，$\beta=1\times10^{-5}$，其取值用于满足小阻尼条件，使得阻尼比位于 0.02 ~ 0.15 之间。在悬臂梁动力学模型所有节点上施加不相关的复高斯白噪声激励向量。采用有限元模型奇数节点上平动响应进行模态参数辨识。输出数据受白噪声干扰，信噪比为 20 dB。采样频率 $f_s=2^{10}$ Hz，辨识频带为 $(0,f_s/2)$ Hz，频域数据总量 $F=4\,094$。

基于增广矩阵 $\boldsymbol{L}$，可得到 $n\times n_g$ 个特征值，包含物理极点和大量的数学极点。需通过稳态图区分物理极点和虚假极点，获得稳态图如图 4 所示，蓝色加号为数学极点，红色直线为物理极点。图中红色直线清晰地显示了 6 个模态频率，其他虚假模态频率随着 ARMA 模型阶次增加变得不稳定。

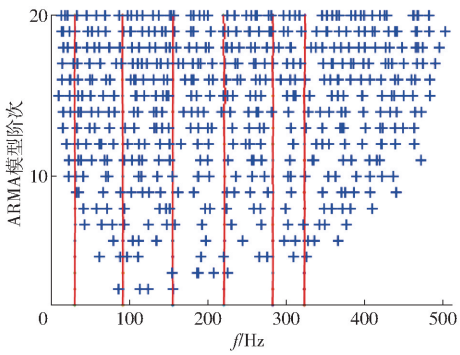


图 4　ARMA 模型稳态图

Fig. 4　Stabilization diagram based on ARMA model

与文献[22]的多变量 AR 模型稳态图进行对比，多变量 AR 模型稳态图如图 5 所示。由于采用无信息先验且假定测量噪声为高斯白噪声，因此文献[22]贝叶斯估计和最小二乘估计相同。多变量 AR 模型需要较高的阶次拟合输出数据，因此图 5 引入大量的数学极点，使得稳态图变得很不清晰。此外，低阶 AR 模型不能准确拟合输出数据，导致 6 个模态频率估计在低阶情况下出现了波动。

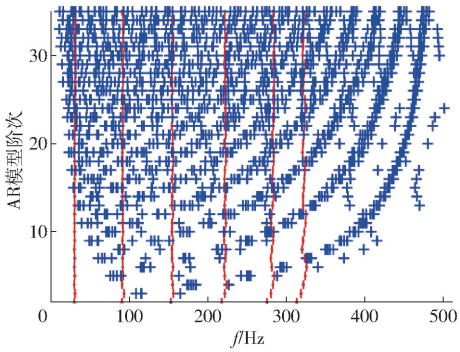


图 5　AR 模型稳态图

Fig. 5　Stabilization diagram based on AR model

通过多变量 ARMA 模型的 AR 部分辨识模态参数，采用文献[34]信息准则确定模型阶次为 $n_g=12$。运行 100 次蒙特卡罗对模态参数进行统计分析，结果如表 1、2 所示，模态频率和阻尼比理论值是基于有限元分析程序构造的质量、刚度和阻尼矩阵，通过特征值分解计算得到[30]。算例中结构响应数据是由基于质量、刚度和阻尼矩阵构建的状态空间方程，通过商业化数值积分算法得到。考虑数值误差可忽略，因此这些模态参数数值计算结果可视为理论值，用于验证所提参数估计方法的精确性。所提方法估计的均值和理论值吻合，预测标准差和样本标准差一致。

表 1　模态频率估计结果

Tab. 1　Estimation results of natural frequency estimation　Hz

模态阶次	理论值	均值	标准差	预测标准差
1	30.046 3	30.136 3	0.329 4	0.346 7
2	91.206 4	91.253 3	0.425 0	0.412 4
3	155.076 3	155.081 8	0.510 5	0.517 5
4	221.094 7	221.154 7	0.511 3	0.527 5
5	282.686 5	282.645 0	0.589 6	0.584 8
6	323.130 9	323.183 3	0.563 9	0.547 5

表 2　模态阻尼比估计结果

Tab. 2　Estimation results of modal damping factor

模态阶次	理论值	均值	标准差	预测标准差
1	0.022 5	0.022 6	0.003 9	0.004 1
2	0.023 0	0.022 8	0.005 1	0.005 5
3	0.024 9	0.024 7	0.005 3	0.005 9
4	0.030 5	0.030 6	0.006 2	0.006 4
5	0.046 5	0.047 3	0.006 5	0.006 6
6	0.133 4	0.133 0	0.007 2	0.006 8

模态振型结果如图6所示，由于仅考虑横向平动自由度，悬臂梁各阶模态表现出了典型的弯曲振动模式。第1主振型无内部不动点，仅在固定端存在约束；随后每个高阶振型比前一阶多1个不动点。从能量角度来看，基频振型能量集中在固定端附近，高阶振型能量分布更靠近自由端。模态振型估计均值和其理论值一致，且误差棒小。由于输出噪声干扰使得信噪比随频率降低，估计的模态振型误差棒随模态阶次升高小幅逐渐变大。

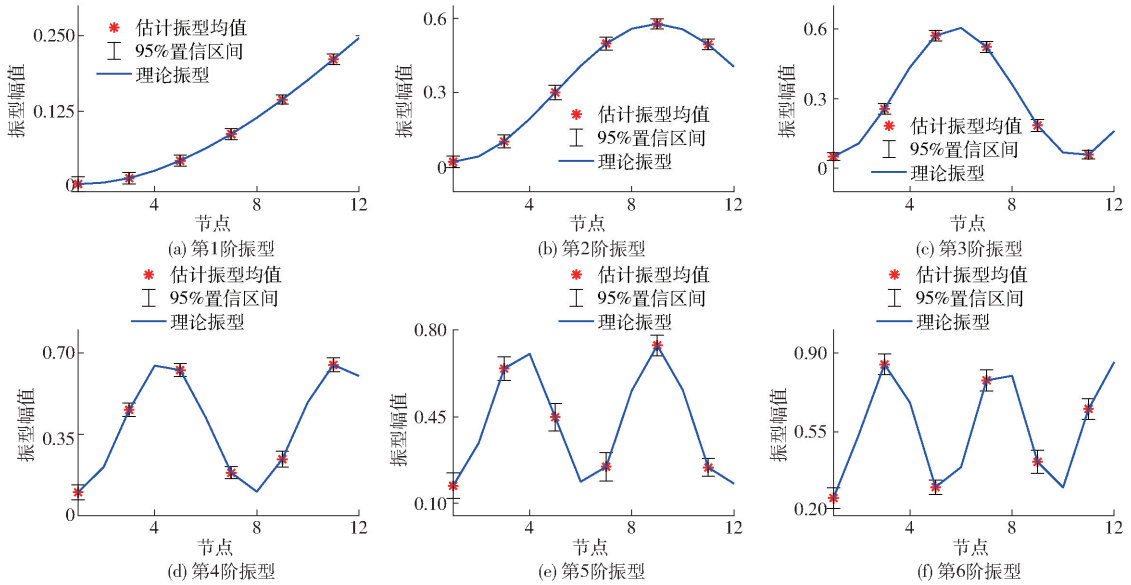


图6 模态振型

Fig. 6 Modal shapes

将所提方法和多变量AR模型[22]以及辅助变量法[19]进行对比。定义归一化均方根误差为

$$\gamma_{\mathrm{RMSE}}=\frac{1}{\|\boldsymbol{\vartheta}_0\|_2}\sqrt{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}^{[i]}-\boldsymbol{\vartheta}_0\|_2^2} \tag{31}$$

式中 $\|\ \|_2$——欧几里得范数

$\boldsymbol{\vartheta}$——所有模态参数

基于式(31)的γ_{RMSE}对各种算法性能进行比较，结果如图7、8所示。多变量AR模型阶次为21。多变量AR模型和辅助变量法采用最小二乘估计。在所有的条件下，所提出的多变量ARMA模型辨识方法精度最高，原因为ML估计能够达到理论Cramér-Rao下界，具有最优统计特性。多变量AR模型需较高的阶次对输出数据进行拟合，因此精度相对较低。辅助变量法本质是基于多变量ARMA模型辨识模态参数，相比多变量AR模型估计的参数较少，因此精度高，但由于没有对MA部分进行估计，模型估计精度受限，因此精度比所提的极大似然方法低。

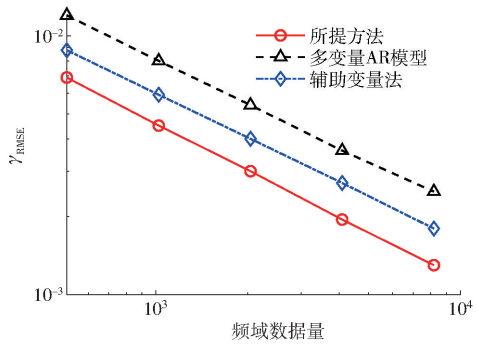


图7 γ_{RMSE}随数据量的变化曲线

Fig. 7 γ_{RMSE} changes as a function of data amount

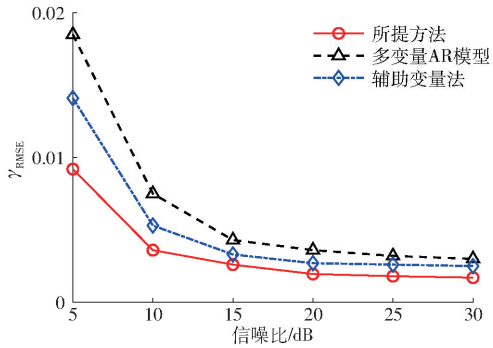


图8 γ_{RMSE}随信噪比的变化曲线

Fig. 8 γ_{RMSE} changes as a function of signal-to-noise ratio

5 结论

(1)应用频域极大似然辨识方法，获得了ARMA模型的最高辨识精度，并基于模型AR部分的估计建立了模态参数辨识方法，实现了模态参数高精度估计。

(2)构造了模态参数不确定区间，实现了不确定度从测量噪声-ARMA模型-增广矩阵-模态参数的传播和量化，为运行模态分析精度评估提供了理论依据。

(3)数值算例表明，所提方法稳态图清晰，且其估计精度在不同数据量和信噪比下均优于多变量AR模型和辅助变量法。

参 考 文 献

[1] 耿明超,赵铁石,李二伟,等. 主被动闭环融合调姿隔振平台动力学建模与模态分析[J]. 农业机械学报, 2022,53(7):435 – 446.
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Li Erwei, et al. Dynamic modeling and model analysis of orientation adjustment and vibration isolation platform with active-passive closed-loop fusion[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(7):435 – 446. (in Chinese)

[2] 刘军,高建立,谢文磊,等. 试验模态分析系统设计与应用[J]. 农业机械学报, 2009,40(2):209 – 213.
Liu Jun, Gao Jianli, Xie Wenlei, et al. Design and application of the experimental model analysis system[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009,40(2):209 – 213. (in Chinese)

[3] 王善坡,李舜酩,廖庆斌,等. 专用汽车分动箱模态试验与分析[J]. 农业机械学报, 2007,38(12):24 – 27.
Wang Shanpo, Li Shunming, Liao Qingbin, et al. Modal experiment and analysis of certain special vehicle transfer case[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2007,38(12):24 – 27. (in Chinese)

[4] 万灵,谢雄耀. 短时脉冲激励下隧道振动响应与模态参数识别[J]. 振动、测试与诊断, 2016,36(5):990 – 996.
Wan Ling, Xie Xiongyao. Dynamic response analysis and modal parameters identification of tunnel structure under the short-time impulse force excitation[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2016,36(5):990 – 996. (in Chinese)

[5] Zhou Yue, Han Zhenyu, Duan Jiaqi, et al. Estimation of vibration stability in milling of thin-walled parts using operational modal analysis[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2021,115:1259 – 1275.

[6] 孙瑞,王亚东,李怡宁,等.基于粒子群算法的农用轮胎柔性环模型参数辨识方法[J].农业机械学报,2024,55(4):402 – 410.
Sun Rui, Wang Yadong, Li Yining, et al. Parameter identification method for agricultural tire flexible ring model based on particle swarm optimization algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024,55(4):402 – 410. (in Chinese)

[7] Reynders E. System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2012,19:51 – 124.

[8] Naderpour H, Fakharian P. A synthesis of peak picking method and wavelet packet transform for structural modal identification[J]. KSCE Journal of Civil Engineering, 2016,20(7):2859 – 2867.

[9] Hasan A, Ahmad Z, Salman L M, et al. Enhanced frequency domain decomposition algorithm: a review of a recent development for unbiased damping ratio estimates[J]. Journal of Vibroengineering, 2018,20(5):1919 – 1936.

[10] Devriendt C, Guillaume P. Identification of modal parameters from transmissibility measurements[J]. Journal of Sound and Vibration, 2008,314(1):343 – 356.

[11] Zahid F B, Ong Z C, Khoo S Y. A review of operational modal analysis techniques for in-service modal identification[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2020,42:398.

[12] Zhang Guowen, Tang Baoping, Tang Guangwu. An improved stochastic subspace identification for operational modal analysis[J]. Measurement, 2012,45(5):1246 – 1256.

[13] 何俊,陈怀海,贺旭东. 时间序列模型中的随机共振现象[J]. 振动、测试与诊断, 2014,34(1):108 – 112.
He Jun, Chen Huaihai, He Xudong. Stochastic resonance phenomenon study in time series model[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2014,34(1):108 – 112. (in Chinese)

[14] 赵飞,梅雪松,姜歌东,等. 数控机床进给系统模态参数的自激振辨识方法[J]. 西安交通大学学报, 2013,47(5):88 – 92.
Zhao Fei, Mei Xuesong, Jiang Gedong, et al. Research on the self-excitation and identification method of modal parameter of feed system of numerical control machine tool[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2013,47(5):88 – 92. (in Chinese)

[15] 张辉东,周颖,练继建. 一种水电厂房振动模态参数识别方法[J]. 振动与冲击, 2007,26(5):115 – 118.
Zhang Huidong, Zhou Ying, Lian Jijian. A method based on ARMA model for modal parameter identification of a power house[J]. Journal of Vibration and Shock, 2007,26(5):115 – 118. (in Chinese)

[16] 王亮,张妍,蔡毅鹏. 测量信息对飞行器工作模态辨识精度影响分析[J]. 振动、测试与诊断, 2020,40(6):1221 – 1225.
Wang Liang, Zhang Yan, Cai Yipeng. The influence of the measure information on the operational mode identification of the aircraft[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2020,40(6):1221 – 1225. (in Chinese)

[17] 董严,付小燕,丁志伟. 基于多测点数据的火箭飞行模态参数识别方法[J]. 固体火箭技术, 2018,41(4):520 – 523.
Dong Yan, Fu Xiaoyan, Ding Zhiwei. Rocket flight modal identification method based on data of multi-measure points[J]. Journal of Solid Rocket Technology, 2018,41(4):520 – 523. (in Chinese)

[18] Bertha M, Golinval J. Identification of non-stationary dynamical systems using multivariate ARMA models[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017,88(1):166 – 179.

[19] 程林,杨杰,郑东健,等. 基于强震观测和 ARMAV 模型的混凝土坝模态识别[J]. 振动与冲击, 2017,36(8):224 – 236.
Cheng Lin, Yang Jie, Zheng Dongjian, et al. Modal identification of concrete dams based on strong-motion records and an ARMAV model[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017,36(8):224 – 236. (in Chinese)

[20] Peeters B, Roeck G D. Stochastic system identification for operational modal analysis: a review[J]. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, 2001, 123(4):660 – 667.

[21] Papakos V, Fassois S D. Multichannel identification of aircraft skeleton structures under unobservable excitation: a vector AR/ARMA framework[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2003,17(6):1271 – 1290.

[22] Yang J, Lam H. An innovative Bayesian system identification method using autoregressive model[J]. Mechanical Systems and

Signal Processing, 2019,133(1):106289.
[23] Pintelon R, Guillaume P, Schoukens J. Uncertainty calculation in (operational) modal analysis[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2007,21(6):2359 - 2373.
[24] Pintelon R, Schoukens J. System identification: a frequency domain approach[M]. New York: IEEE Press,2012.
[25] Pi Y L, Mickleborough N C. Modal identification of vibrating structures using ARMA model[J]. Journal of Engineering Mechanics,1989,115(10):2232 - 2250.
[26] Pintelon R, Schoukens J. Frequency domain maximum likelihood estimation of linear dynamic errors-in-variables models[J]. Automatica, 2007,43(4):621 - 630.
[27] Dennis J E, Schnabel R B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations[M]. Philadelphia: SIAM,1996.
[28] Song Shenglin, Zhang Erliang. Identification of ARMAX models with noisy input: a parametric frequency domain solution[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2025,73:292 - 304.
[29] Söderström T, Mahata K, Soverini U. Identification of dynamic errors-in-variables models: approaches based on two-dimensional ARMA modeling of the data[J]. Automatica, 2003,39(5):929 - 935.
[30] Pi Y L, Mickleborough N C. Modal identification of a vibrating structure in the time domain[J]. Computers & Structures, 1989,32(5):1105 - 1115.
[31] 张青松,郑中原,廖庆喜,等. 农业工程领域耦合仿真技术应用现状与展望[J]. 农业机械学报,2025,56(7):20 - 37.
Zhang Qingsong, Zheng Zhongyuan, Liao Qingxi, et al. Application status and prospect of coupled simulation in agricultural engineering research[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2025,56(7):20 - 37. (in Chinese)
[32] 胡国友,夏品奇,杨劲松. 渐变刚度钢板弹簧刚度特性计算的曲率-载荷混合法[J]. 南京航空航天大学学报,2008,4(1):46 - 50.
Hu Guoyou, Xia Pinqi, Yang Jinsong. Curvature-force hybrid method for calculating properties of leaf springs with variable stiffness[J]. Journal of Najing University of Aeronautics & Astronauties, 2008,4(1):46 - 50. (in Chinese)
[33] Kwon Y W, Bang H. The finite element method using MATLAB[M]. Boca Raton: CRC Press,2000.
[34] 邢铭宗,赵飞,姜歌东,等. 一种确定自回归滑动平均模型最小阶次的新方法[J]. 西安交通大学学报, 2011,45(12):99 - 103.
Xing Mingzong, Zhao Fei, Jiang Gedong, et al. Novel minimum order fixed method for autoregressive moving average models [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011,45(12):99 - 103. (in Chinese)

(上接第 348 页)

[19] Diao Z, Guo P, Zhang B, et al. Navigation line extraction algorithm for corn spraying robot based on improved YOLOv8s network[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2023, 212: 108049.
[20] Huang S P, Wu S H, Sun C, et al. Deep localization model for intra-row crop detection in paddy field[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2020, 169: 105203.
[21] Wei C Y, Li H L, Shi J Y, et al. Row anchor selection classification method for early-stage crop row-following[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2022, 192: 106577.
[22] Wang S S, Yu S S, Zhang W Y, et al. The identification of straight-curved rice seedling rows for automatic row avoidance and weeding system[J]. Biosystems Engineering, 2023, 233: 47 - 62.
[23] Tang B Y, Zhou J P, Pan Y C, et al. Recognition of maize seedling under weed disturbance using improved YOLOv5 algorithm [J]. Measurement, 2025, 242: 115938.
[24] Zhang S, Liu Y, Xiong K, et al. A review of vision-based crop row detection method: focusing on field ground autonomous navigation operations[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2024, 222: 109086.
[25] 韩振浩, 李佳, 苑严伟, 等. 基于 UNet 网络的果园视觉导航路径识别方法[J]. 农业机械学报, 2021, 52(1): 30 - 39.
Han Zhenhao, Li Jia, Yuan Yanwei, et al. Path recognition of orchard visual navigation based on UNet[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1): 30 - 39. (in Chinese)
[26] Li D F, Li B L, Long S F, et al. Rice seedling row detection based on morphological anchor points of rice stems[J]. Biosystems Engineering, 2023, 226: 71 - 85.
[27] Liao J, Chen M, Zhang K, et al. Sc - net: a new strip convolutional network model for rice seedling and weed segmentation in paddy field[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2024, 220: 108862.
[28] Chen Z Y, Cai Y H, Liu Y X, et al. Towards end-to-end rice row detection in paddy fields exploiting two-pathway instance segmentation[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2025, 231: 109963.
[29] Wang C, Bochkovskiy A, Liao H. YOLOv7: trainable bag-of-freebies sets new state-of-the-art for real-time object detector[C]// Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2023: 7464 - 7475.