

一种刚柔混合绳驱并联机构设计与性能分析

朱伟 任秋阳 曹昕琦 马志龙

(常州大学机械与轨道交通学院, 常州 213164)

摘要: 针对绳驱并联机构单向受力的特点, 本文提出一种以3-RPS支链为约束的刚柔混合绳驱并联机构, 机构中绳索支链可根据工作空间需要调整方位。阐述了机构运动原理, 设计了其三维结构, 建立了运动学模型及静力学模型, 通过理论计算和仿真对比验证了驱动索力的正确性; 基于力学模型计算了机构力封闭可达工作空间, 并分析了影响工作空间主要结构参数; 推导了机构雅可比矩阵, 分别以雅可比矩阵行列式、条件数、刚度矩阵二范数为指标分析了机构奇异位形、灵巧度和刚度等性能指标, 研究结果为机构推广应用奠定理论基础。

关键词: 绳驱并联机构; 刚柔混合; 工作空间; 雅可比矩阵; 刚度

中图分类号: TP112

文献标识码: A

文章编号: 1000-1298(2026)08-0418-09

OSID:



Design and Performance Analysis of Rigid Flexible Hybrid Cable Driven Parallel Mechanism

ZHU Wei REN Qiuyang CAO Xinqi MA Zhilong

(College of Mechanical Engineering and Rail Transit, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: A rigid flexible hybrid cable driven parallel mechanism (CDPM) constrained by 3-RPS branches was proposed to overcome the limitation of unidirectional force characteristic in traditional cable-driven parallel mechanisms. In this configuration, the direction of cable branches can be flexibly adjusted according to the desired workspace requirements. The motion principle of the mechanism was firstly described, followed by the design of its three-dimensional structure. Both kinematic and static models were then systematically established. The correctness of the driving cable force was confirmed through comparative analysis between theoretical computations and simulation outcomes. Subsequently, based on the developed mechanical model, the force closure reachable workspace of the mechanism was calculated, and the main structural parameters that affected the workspace were investigated in depth. Furthermore, the Jacobian matrix of the mechanism was derived. And the performance indicators such as singular configuration, dexterity, and stiffness of the mechanism were analyzed by using the determinant of the Jacobian matrix, condition number, and two norm of the stiffness matrix as indicators. The findings established a solid theoretical basis for further development and practical application of the proposed mechanism.

Key words: cable driven parallel mechanism; rigid flexible hybrid; workspace; Jacobian matrix; rigidity

0 引言

并联机构因其高精度、高刚度和良好承载能力等优点而得到了广泛应用。然而, 传统的刚性并联机构在某些特定场景应用存在一定局限性, 如工作空间受限、灵活性不足以及质量较大等问题。绳驱并联机构以其质量轻、惯量小、柔顺性好和传动效率

高等特点^[1-2], 在搬运机器人^[3-5]、航空航天^[6-8]、康复器械^[9-11]等领域展现了巨大的应用潜力。然而, 由于绳索只能受拉不能受压, 约束性能弱, 单纯的绳驱机构面临绳索易松弛、定位精度低以及在高负载下稳定性差等挑战。

为了克服上述问题, 将刚性约束引入绳驱并联机构, 通过合理地施加刚性支链约束, 可有效地限制

绳索机构自由度,提高机构整体刚度和稳定性,从而在一定程度上解决绳索松弛和定位精度低等问题^[12]。同时,刚性约束还能够与绳索柔性驱动相互配合,在保留绳驱机构优点的基础上,进一步拓展其可行工作空间和应用范围,使其能够更好地适应复杂多变的工作环境和任务需求。

近年来,国内外学者开始关注刚柔混合机构设计和性能研究^[13-20]。EDEN 等^[21]设计了一种由绳索和串联的刚性杆组成多杆绳驱机器人,采用四根绳索为驱动,中间串联 SR 支链为刚性约束(S 为球铰、P 为移动副),用于仿生与康复。为了在确保完全约束的基础上减少其驱动器数量和控制难度,文献[22-25]采用带有弹簧和活塞缸等被动张紧元件的刚性支链为中间约束杆,使机构实现少自由度运动。此外,一些利用刚性并联机构拓扑构成原理的刚柔混合并联机构也相继涌现。LIU 等^[26]提出了一种变刚度刚柔混合并联机构,采用 3 条 5R 刚性支链为约束(R 为转动副),1 条柔性弹簧为中间支链使机构具备变刚度特性,并采用 4 条绳索支链驱动,机构可实现两转动三平移自由度。LIU 等^[27]设计了一种由 3 条 UCU 弹性被动支链为约束(U 为虎克铰,C 为圆柱副)、6 条绳索支链(每两条相邻绳索由同一电机驱动)驱动的三自由度机构,并分析了机构力空间内的各向同性特征,以承载能力为指标优化了机构结构参数。

本文提出一种以传统 3-RPS 支链为约束的刚柔混合并联机构,采用变位置的 3 条绳索支链驱动,实现一平移两转动自由度运动,并可实现工作空间可调。建立机构三维模型、运动逆解方程及静力学模型;根据机构结构特征,建立约束条件,推导机构可达工作空间,并分析影响姿态工作空间的主要结构参数;基于机构刚柔混合雅可比矩阵分析其灵巧度、奇异位形,基于刚度矩阵二范数分析其刚度特性。

1 机构设计

机构三维结构如图 1 所示,由下固定平台、上运动平台、3 根被动弹性支链和 3 组驱动绳索支链组成。被动弹性支链为 RPS 伸缩杆和弹簧组合,为机构提供刚性约束,但不具备驱动功能。弹簧可使运动平台具备复位能力,始终保持绳索张紧。绳索驱动支链由电机、导向滑轮及移动滑轨组成,固定平台和运动平台上均安装有导轨,导向滑轮可沿导轨移动,从而改变驱动绳索锚点位置,形成变结构形式。在绳索驱动力和弹簧力联合作用下,以及在 RPS 支

链约束下,运动平台可实现两转动一平移运动。

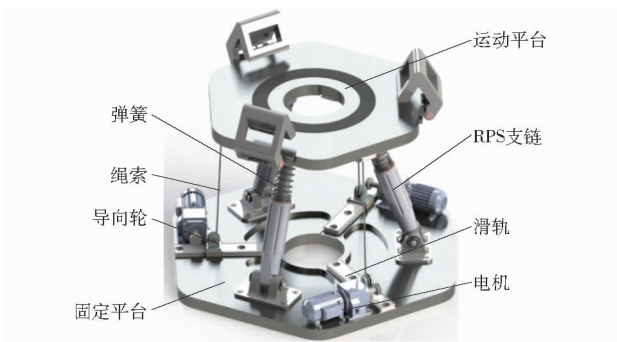


图 1 机构三维结构模型
Fig. 1 3D model of mechanism

为了确保绳索始终处于张紧状态,RPS 支链上的弹簧初始保持一定压缩量,根据机构运动工作空间需求及弹簧本身的结构参数确定其压缩量。

当导向滑轮在导轨上位置固定后,机构原理图如图 2 所示。3 组绳索一端在固定平台上,锚点位于 A_1 、 A_2 、 A_3 处,绳索另一端锚接于运动平台上 C_1 、 C_2 、 C_3 处。被动弹性支链一端通过 R 副连接于固定平台 B_1 、 B_2 、 B_3 处,且 R 副轴线与连线 OB_i 垂直;另一端通过 S 副连接于运动平台 D_1 、 D_2 、 D_3 处。图中, A_i 、 B_i 分别均布在位于固定平台上半径为 R 和 R_s 的圆上, C_i 、 D_i 分别均布在位于动平台上半径为 r 和 r_s 的圆上。其中,绳索在两平台上锚点 A_i 、 C_i 可分别沿着 OA_i 、 PC_i 方向(滑动导轨方向)移动。

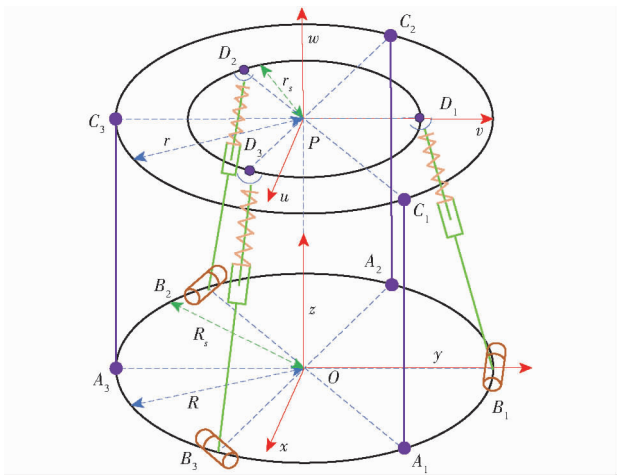


图 2 机构原理图
Fig. 2 Principle of mechanism

2 运动学和静力学

2.1 运动学分析

如图 2 所示,在机构固定平台中心 O 处建立定坐标系 $Oxyz$,其中, y 轴沿 OB_1 方向, z 轴竖直向上, x 轴根据右手定则决定;在运动平台中心 P 处建立动坐标系 $Puvw$,其中, v 轴沿 OD_1 方向, w 轴竖直向上,

u 轴根据右手定则决定。设动平台中心 P 在定坐标系下坐标为 $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$ 。动坐标系相对于定坐标系姿态变换矩阵用 $Z-Y-X$ 变换表示,根据机构两转动一平移的运动特征,定义该机构在 3 个自由度方向上的运动为 $\mathbf{X}(\alpha, \beta, p_z)$,即动平台绕 x 轴旋转 α ,绕 y 轴旋转 β ,沿 z 轴方向移动 p_z 。机构伴随运动为动平台绕 z 轴旋转 γ ,以及在 x 轴和 y 轴方向移动 p_x, p_y 。动坐标系相对于定坐标系对应的变换矩阵为

$${}^o\mathbf{R}_p = \mathbf{R}_z(\gamma)\mathbf{R}_y(\beta)\mathbf{R}_x(\alpha) \tag{1}$$

驱动绳索和被动弹性支链长度矢量分别为

$$\mathbf{l}_i = \mathbf{p} + {}^o\mathbf{R}_p\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i \tag{2}$$

$$\mathbf{l}_{si} = \mathbf{p} + {}^o\mathbf{R}_p\mathbf{d}_i - \mathbf{b}_i \tag{3}$$

式中 $\mathbf{l}_i$ ——第 i 根绳索长度矢量
 $\mathbf{l}_{si}$ ——第 i 根被动弹性支链长度矢量
 $\mathbf{a}_i$ —— $\overrightarrow{OA_i}$ 长度矢量 $\mathbf{b}_i$ —— $\overrightarrow{OB_i}$ 长度矢量
 $\mathbf{c}_i$ —— $\overrightarrow{PC_i}$ 长度矢量
 $\mathbf{d}_i$ —— $\overrightarrow{PD_i}$ 长度矢量

第 i 根驱动绳索和第 i 根 RPS 支链单位矢量为

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{l}_i}{\|\mathbf{l}_i\|} = \frac{\mathbf{p} + {}^o\mathbf{R}_p\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i}{\|\mathbf{p} + {}^o\mathbf{R}_p\mathbf{c}_i - \mathbf{a}_i\|} \tag{4}$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{l}_{si}}{\|\mathbf{l}_{si}\|} = \frac{\mathbf{p} + {}^o\mathbf{R}_p\mathbf{d}_i - \mathbf{b}_i}{\|\mathbf{p} + {}^o\mathbf{R}_p\mathbf{d}_i - \mathbf{b}_i\|} \tag{5}$$

2.2 静力学分析

假设 $\mathbf{W}_e = [\mathbf{F}_e \ \mathbf{M}_e]^T$ 为作用在机构运动平台上所有外载荷矢量,其中, $\mathbf{F}_e$ 为外部作用力, $\mathbf{M}_e$ 为外部作用力矩。如图 3 所示, $\mathbf{G}$ 为机构动平台所受重力,驱动绳索对运动平台拉力矢量 $\mathbf{F}_i = [\mathbf{F}_{i1} \ \mathbf{F}_{i2} \ \mathbf{F}_{i3}]^T$, RPS 支链中弹簧力矢量 $\mathbf{F}_s = [\mathbf{F}_{s1} \ \mathbf{F}_{s2} \ \mathbf{F}_{s3}]^T$ 。

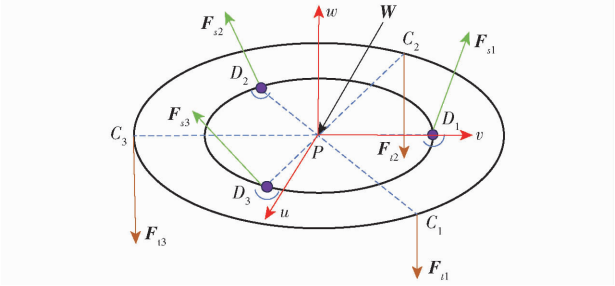


图 3 运动平台受力
Fig. 3 Forces acting on moving platform

根据静力平衡条件,可得

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_{ti} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_{si} + \mathbf{G} + \mathbf{F}_e = 0 \\ \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}_i \mathbf{F}_{ti} + \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \mathbf{F}_{si} + \mathbf{M}_e = 0 \end{cases} \tag{6}$$

根据式(6)静力平衡方程可写为

$$\mathbf{J}_c \mathbf{F}_t + \mathbf{J}_s \mathbf{F}_s + \mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{7}$$

其中

$$\mathbf{W} = [\mathbf{F}_p \ \mathbf{M}_e]^T$$

$$\mathbf{F}_p = \mathbf{G} + \mathbf{F}_e$$

$$\mathbf{J}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{u}_1 & \mathbf{c}_2 \mathbf{u}_2 & \mathbf{c}_3 \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{d}_1 \mathbf{e}_1 & \mathbf{d}_2 \mathbf{e}_2 & \mathbf{d}_3 \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中 $\mathbf{J}_c$ ——绳索力结构矩阵

$\mathbf{J}_s$ ——RPS 支链弹性力结构矩阵

由于 RPS 支链受力与弹簧伸缩量有关,根据胡克定律可得

$$\mathbf{F}_{si} = k_s (\mathbf{l}_{si} - \mathbf{l}_{si0}) \tag{10}$$

式中 k_s ——弹簧刚度

$\mathbf{l}_{si0}$ ——被动弹性元件初始长度矢量

将式(10)代入式(7),可得第 i 根绳索所受的张紧力为

$$\mathbf{F}_{ti} = -\mathbf{J}_c^{-1} (\mathbf{J}_s \mathbf{F}_{si} + \mathbf{W}) \tag{11}$$

设弹簧刚度 k_s 为 0.5 N/mm,预载荷为 40 N,机构几何参数 R 为 120 mm、 r 为 120 mm、 R_s 为 120 mm、 r_s 为 60 mm。建立仿真模型,在 3 组驱动绳索的滑轮绞盘上添加驱动,并定义运行时间函数。根据式(11)计算得 3 组绳索拉力理论值(Matlab 计算),根据仿真模型得到仿真值(ADAMS 仿真),对比结果如图 4 所示。

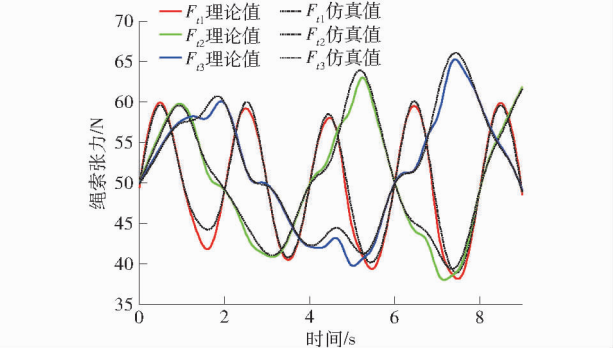


图 4 绳索张力变化曲线

Fig. 4 Comparisons of cable tensions

由图 4 可知,绳索张力仿真曲线和理论曲线变化趋势基本一致,而且 Matlab 理论值与 ADAMS 仿真值之间的误差在允许范围内,从而验证了机构静力学模型正确性。

3 工作空间分析

3.1 工作空间计算

绳驱机构的力封闭工作空间是指满足力封闭条件,即 1 组大于零的绳索拉力可平衡中心执行器所受任意力旋量的位姿集合,是机构性能的重要指标之一。一般地,力封闭工作空间不受绳索拉力以及

机构所受外部力旋量的影响,只与绳索并联机构结构参数相关。但在实际应用中,受到驱动器驱动力矩以及绳索许用拉力的限制,绳索拉力存在安全上限 F_{tmax} 。同时,为了避免运动过程中绳索发生虚牵,并保持绳索具备一定刚度,绳索拉力应不小于最小值 F_{tmin} 。

值得注意的是,本机构绳索拉力除和外载荷相关,还与 RPS 被动支链中弹簧力相关,而弹簧力 F_s 取决于弹簧刚度 k 及压缩量 Δl_s 。因此,为了确保绳索始终张紧,弹簧须保持一定的压缩量,RPS 被动支链长度须限制在 $l_{smin} \sim l_{smax}$ 之间。

此外,对于刚柔混合并联机构,工作空间同时还需要满足刚性支链中运动约束条件,即满足转动副转角 θ_s 、球铰转角 θ_R 运动范围。

综上,机构约束条件为

$$\begin{cases} \mathbf{J}_c \mathbf{F}_t + \mathbf{J}_s \mathbf{F}_s = \mathbf{W} \\ \mathbf{F}_{tmin} \leq \mathbf{F}_t \leq \mathbf{F}_{tmax} \\ \mathbf{F}_{smin} \leq \mathbf{F}_s \leq \mathbf{F}_{smax} \\ \theta_s \leq \theta_{smax} \\ \theta_R \leq \theta_{Rmax} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{其中} \quad \mathbf{F}_{tmin} &= [F_{t1min} \quad F_{t2min} \quad F_{t3min}] \\ \mathbf{F}_{tmax} &= [F_{t1max} \quad F_{t2max} \quad F_{t3max}] \\ \mathbf{F}_{smin} &= k[l_{s1min} \quad l_{s2min} \quad l_{s3min}] \\ \mathbf{F}_{smax} &= k[l_{s1max} \quad l_{s2max} \quad l_{s3max}] \end{aligned}$$

式中 l_{smin} ——第 i 根 RPS 支链杆长最小值
 l_{smax} ——第 i 根 RPS 支链杆长最大值
 θ_{smax} ——球铰最大转角
 θ_{Rmax} ——转动副最大转角

设定 $l_s \in [100 \text{ mm}, 250 \text{ mm}]$,刚度 k 为 0.5 N/mm , $10 \text{ N} \leq F_{ti} \leq 100 \text{ N}$ 。运动副限制条件 $\theta_R \leq 30^\circ$, $\theta_s \leq 30^\circ$ 。设定外载荷 $\mathbf{F}_e = [0 \quad 0 \quad 100 \text{ N}]^T$,搜索机构可达力封闭工作空间,如图 5 所示。

由图 5a 可知,机构工作空间为中间宽、上下两头小的不规则图形,表明运动平台在初始中心位置附近运动时,机构具有较大的承载能力。总体上,上层工作空间面积比底层大,说明在上层工作区域机构承载较大,这是由于运动平台越向下,弹簧压缩量越大,RPS 支链约束力也越大,运动范围逐渐变小。

在 xoy 视图上(图 5b),RPS 支链和运动平台连接点 D_i 处,工作空间沿着绳索方向显著拉大,即姿

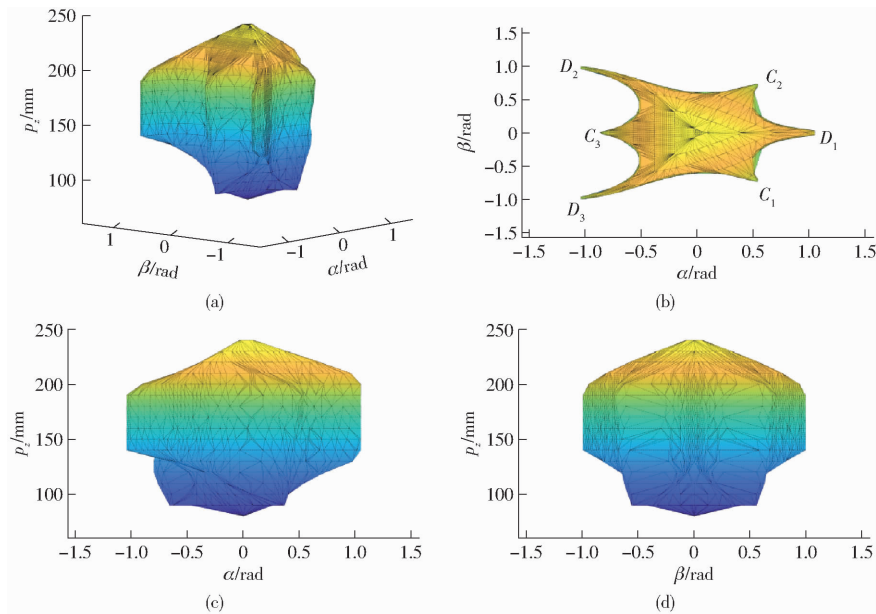


图 5 机构工作空间

Fig. 5 Workspace of mechanism

态转角 α 、 β 转动范围明显变大,最大工作空间由连接点 D_i 位置决定;在绳索和运动平台锚点 C_i 处,工作空间也明显向外凸出,这是绳索力 F_{ti} 所致,绳索驱动力越大,工作空间越大。可见,工作空间图形特点和机构本身的结构特点相吻合。

由 yoz 视图可知(图 5c),机构在 z 轴方向上运动范围为 $80 \sim 242 \text{ mm}$,并且机构工作空间绕 y 轴转角 $\beta \in [-1 \text{ rad}, 1 \text{ rad}]$,呈对称分布。在 xoz 视图上

(图 5d), α 转角范围为 $-1 \sim 1 \text{ rad}$,在 x 轴两侧变化不对称,这与坐标轴设定相关。

总体上看,除去绳索锚点 C_i 、RPS 支链连接点 D_i 以及上下边界等特殊位置处,机构高度 $p_i \in [140 \text{ mm}, 190 \text{ mm}]$,转角 $\alpha \in [-0.5 \text{ rad}, 0.5 \text{ rad}]$, $\beta \in [-0.6 \text{ rad}, 0.6 \text{ rad}]$ 范围内,工作空间各截面面积基本相同,具有较为规则的形状,该范围可作为机构任务姿态工作空间。超过这个界限,机构开始受

到绳索力、弹簧力及刚性支链约束等因素的影响,工作空间开始变小。

3.2 结构参数对工作空间的影响

根据上述工作空间形状可知,在一定绳索拉力和弹性力范围内,有效的可达姿态工作空间与绳索连接点、RPS 支链连接点位置关系不大,主要取决于机构结构参数。

由于并联机构工作空间计算模型是一个非线性方程组,很难求取工作空间体积解析解,采用离散工作空间体积计算方法,即

$$V_w = \sum \Delta\alpha\Delta\beta\Delta p_z \tag{13}$$

式中 $\Delta\alpha$ 、 $\Delta\beta$ 、 Δp_z —— α 、 β 、 p_z 在离散区域内的变化量

保持 RPS 支链连接点 B_i 、 D_i 不变,即 $R_s = 120\text{ mm}$ 、 $r_s = 60\text{ mm}$;保持绳索与固定平台锚点 A_i 位置不变,即 $R = 120\text{ mm}$,改变绳索与运动平台锚点 C_i 位置,即改变半径 r 。在保持机构 RPS 支链行程不变情况下($l_s \in [100\text{ mm}, 250\text{ mm}]$),计算不同结构参数下机构可达姿态工作空间体积。参数设置以及体积如表 1 所示。机构离散工作空间体积随动、静平台半径比值 r/R 变化曲线,以及随 RPS 支链最大约束行程 $l_{s\max}$ 变化曲线,如图 6 所示。

表 1 工作空间体积

Tab.1 Workspace volume

r/R	V_w/mm^3	$l_{s\max}/R$	V_w/mm^3
0.50	340.9	1.67	70.6
0.58	327.8	1.75	96.6
0.67	301.4	1.83	117.7
0.75	276.4	1.92	142.2
0.83	213.7	2.00	165.4
0.92	190.1	2.08	188.3
1.00	188.3	2.17	208.3

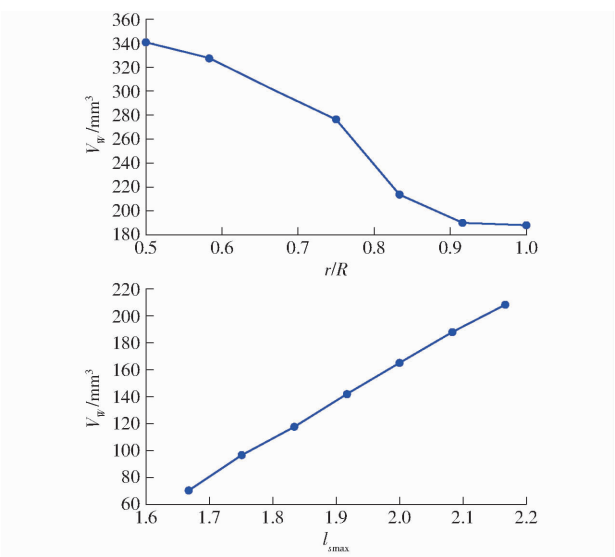


图 6 结构参数对工作空间体积的影响

Fig.6 Influence of structural parameters on workspace volume

从图 6 可以看出,机构可达工作空间体积随动、静平台半径比值 r/R 增大而减小,随 RPS 支链约束行程的增大而增大。当 $r/R = 1$ 时,工作空间最小。需要注意的是,上述工作空间是基于 $r \geq r_s$ 得到的,若 $r < r_s$,由于 RPS 支链的约束,可达工作空间会进一步减小。

4 性能分析

4.1 雅可比矩阵

雅可比矩阵条件数可定量描述矩阵求逆的稳定性、精确度。对式(2)两边求导,可得

$$\dot{l}_i = \dot{p} + {}^oR_p\dot{c}_i + \Omega {}^oR_p c_i - \dot{a}_i \tag{14}$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

式中 $\dot{p}$ 、 $\dot{c}_i$ 、 $\dot{a}_i$ —— p 、 a_i 、 c_i 速度矢量

Ω ——角速度算子矩阵

ω_x 、 ω_y 、 ω_z ——运动平台分别绕 x 、 y 、 z 轴角速度

式(14)两边同时左乘 l_i ,整理可得

$$J_L \dot{l} = J_a \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \omega \end{bmatrix} \tag{15}$$

其中

$$J_a = \begin{bmatrix} l_1^T & (l_1^T \times {}^oR_p c_1) \\ l_2^T & (l_2^T \times {}^oR_p c_2) \\ l_3^T & (l_3^T \times {}^oR_p c_3) \end{bmatrix}$$

$$J_L = \text{diag}[l_1, l_2, l_3] \quad \dot{l} = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3]^T$$

$$v = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T \quad \omega = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$$

式中 v 、 ω ——点 P 线速度和角速度矢量

J_L ——机构输入雅可比矩阵

机构运动平台 3 个独立自由度可通过 3 个参数 α 、 β 、 p_z 描述,假设点 P 有效速度矢量 $V_p = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{p}_z]^T$,则机构动平台线速度、角速度和有效速度矢量之间关系可描述为

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} V_p \tag{16}$$

其中

$$J_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial p_x}{\partial \alpha} & \frac{\partial p_x}{\partial \beta} & \frac{\partial p_x}{\partial p_z} \\ \frac{\partial p_y}{\partial \alpha} & \frac{\partial p_y}{\partial \beta} & \frac{\partial p_y}{\partial p_z} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J_\omega = \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial \alpha} & \frac{\partial \omega_x}{\partial \beta} & \frac{\partial \omega_x}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial \alpha} & \frac{\partial \omega_y}{\partial \beta} & \frac{\partial \omega_y}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial \alpha} & \frac{\partial \omega_z}{\partial \beta} & \frac{\partial \omega_z}{\partial p_z} \end{bmatrix}$$

将式(16)代入(15),整理得

$$J_L \dot{l} = J_a \begin{bmatrix} J_v \\ J_\omega \end{bmatrix} V_p = J_X V_p \tag{17}$$

由式(17)可求得雅可比矩阵

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_L^{-1} \mathbf{J}_a \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_w \end{bmatrix} = \mathbf{J}_L^{-1} \mathbf{J}_X \quad (18)$$

式中 $\mathbf{J}$ ——机构速度雅可比矩阵

$\mathbf{J}_X$ ——输出雅可比矩阵

4.2 奇异性

机构驱动绳索输入 $\mathbf{l} = [\mathbf{l}_1 \ \mathbf{l}_2 \ \mathbf{l}_3]^T$, 根据速度方程 $\mathbf{J}_L \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{J}_X \mathbf{V}_p$, 将并联机构奇异位形分为 3 类: $\mathbf{J}_L$ 降秩, 称之为逆向奇异; $\mathbf{J}_X$ 降秩, 称之为正向奇异, 如果 $\mathbf{J}_L$ 和 $\mathbf{J}_X$ 均降秩, 则称之为混合奇异位形。对于绳驱并联机构, $\mathbf{J}_L$ 实际上是由驱动绳索长度组成的 1 个对角矩阵, 由于绳索长度不会为 0, 因此矩阵 $\mathbf{J}_L$ 始终保持满秩, 绳驱机构也不会产生逆向奇异和混合奇异。因此, 本机构奇异性分析只需考虑正向奇异。

若刚柔混合并联机构存在正向奇异, 则输出雅可比矩阵 $\mathbf{J}_X$ 降秩, 即

$$\det |\mathbf{J}_X| = \det \left| \mathbf{J}_a \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_w \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (19)$$

考虑到上述可达工作空间要求, 设置机构运动平台偏转角 $\alpha \in [-20^\circ, 20^\circ]$, $\beta \in [-20^\circ, 20^\circ]$, 当 p_z 分别为 100、150、200 mm, 输出雅可比矩阵行列式 $\det |\mathbf{J}_X|$ 分布如图 7 所示。由图 7 可知, 该机构处在不同高度 p_z 下雅可比矩阵行列式都远远大于 0, 表明机构在规定的工作空间内无正向奇异。当机构运动平台姿态变化较小时, 行列式比较大, 且在运动平台中心点 P 最大, 机构奇异性能更好。总体上, 机构输出雅可比矩阵行列式平均值随着 p_z 增加而变大, 这是由于运动平台沿 z 轴方向越往上, 被动支链中弹簧力越小, 机构所需绳索驱动力也越小, 刚性支链约束力也越弱, 奇异性也就越好。需要注意, p_z 不能过大, 否则弹簧力过小, 从而影响机构运动灵活性。

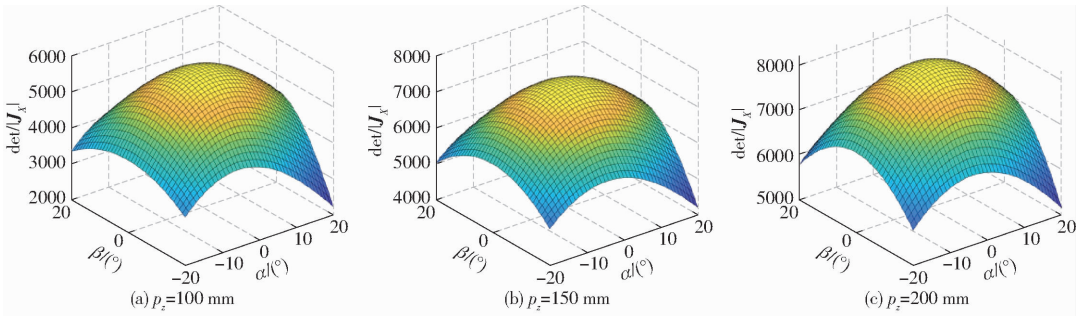


图 7 奇异性分布

Fig. 7 Singularity distribution

4.3 灵巧度

雅可比矩阵条件数越接近于 1, 说明机构灵巧度越好; 条件数接近于 ∞ , 机构处于奇异位形, 机构可操作性越差。

机构条件数 κ 计算式为

$$\kappa = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})}}{\sqrt{\lambda_{\min}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})}} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (20)$$

式中 $\lambda_{\max}$ 、 $\lambda_{\min}$ ——矩阵 $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ 最大和最小特征值

$\sigma_{\max}$ 、 $\sigma_{\min}$ ——雅可比矩阵 $\mathbf{J}$ 最大与最小奇异值

同样, 确定任务工作空间转动角 $\alpha \in [-20^\circ, 20^\circ]$, $\beta \in [-20^\circ, 20^\circ]$ 范围。当 $p_z = 100$ 、150、200 mm, 分别在工作空间内对机构条件数进行计算, 性能图谱如图 8 所示。由图 8 可知, 随着 p_z 增大, 机构雅可比矩阵条件数逐渐减小, 说明机构灵巧度越来越好, 即由于弹簧力减小, 机构操作性能更加可靠, 和机构奇异性质一致。由图 8b、8c 可以发现, 当机构运动平台处于中心位置附近, 以及接近被动弹性支链所在方位时, 机构雅可比矩阵条件数逐步减小, 机构具有更好的灵巧度。而当动平台姿态接

近驱动绳索所在方位时, 雅可比矩阵条件数则显著增大, 此时灵巧度较差, 机构可操作性也比较差。

4.4 刚度

机构刚度表示动平台在外力作用下抵抗变形的能力, 刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 定义为: 机构动平台姿态发生微小变化 $\partial \mathbf{X}$ 与作用在动平台上外部作用力和力矩微小变化 $\partial \mathbf{W}$ 之间的关系, 即

$$\partial \mathbf{W} = \mathbf{K} \partial \mathbf{X} \quad (21)$$

其中

$$\mathbf{X} = -\mathbf{J}_c \mathbf{F}_t - \mathbf{J}_s \mathbf{F}_s$$

式中 $\mathbf{X}$ ——机构输出矩阵

代入式(7)可得

$$\mathbf{K} \partial \mathbf{X} = -\partial(\mathbf{J}_c \mathbf{F}_t) - \partial(\mathbf{J}_s \mathbf{F}_s) \quad (22)$$

机构整体刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2 + \mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4 \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{K}_1 = -\mathbf{K}_c \mathbf{J} = -\text{diag}[k_1, k_2, k_3] \mathbf{J}$$

$$\mathbf{K}_2 = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \alpha} \mathbf{F}_t & \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial \beta} \mathbf{F}_t & \frac{\partial \mathbf{J}_c}{\partial p_z} \mathbf{F}_t \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{K}_3 = -\mathbf{K}_s \mathbf{J} = -\text{diag}[k_{s1}, k_{s2}, k_{s3}] \mathbf{J}$$

$$\mathbf{K}_4 = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial \alpha} \mathbf{F}_s & \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial \beta} \mathbf{F}_s & \frac{\partial \mathbf{J}_s}{\partial p_z} \mathbf{F}_s \end{bmatrix}^T$$

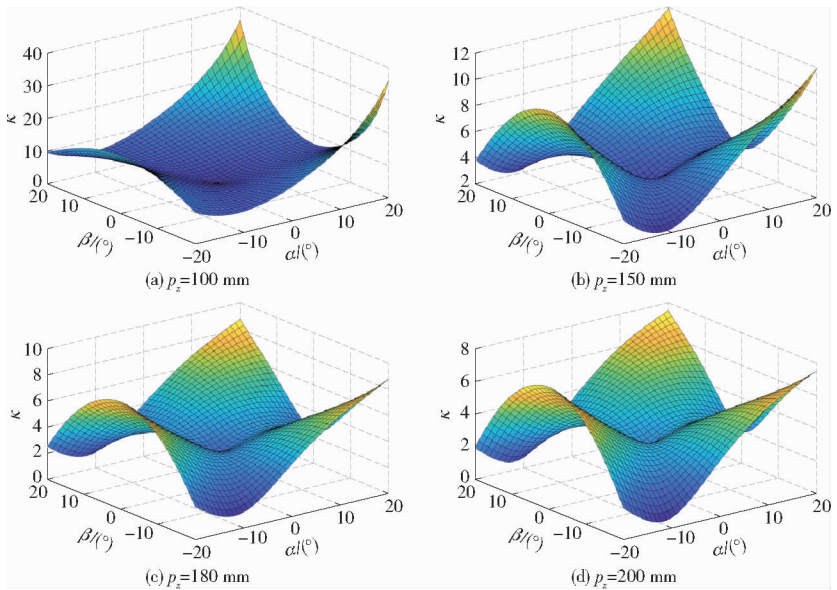


图 8 灵巧度性能

Fig. 8 Dexterity performance

式中 $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_3$ ——机构结构刚度矩阵
 $\mathbf{K}_2, \mathbf{K}_4$ ——机构力刚度矩阵

为了进一步描述机构刚度特性,衡量机构在某位姿处刚度性能,以刚度矩阵在笛卡尔空间内欧几里得二范数为性能指标,以此衡量机构整体刚度,计算式为

$$D(\mathbf{K}) = \sqrt{\sum_{i=1, j=1}^3 K_{ij}^2} \tag{24}$$

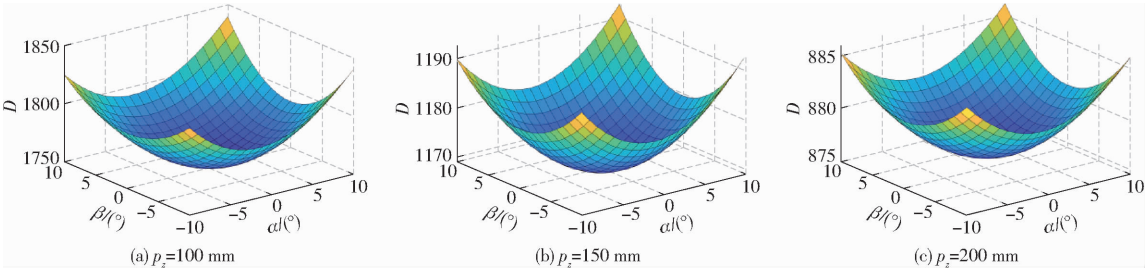


图 9 刚度性能

Fig. 9 Stiffness performance

减小,绳索所需驱动力下降,整体刚度下降。反之,弹性力增大,驱动力增大,机构抵抗变形能力增强,刚度增大。由图 9 可发现,机构中心处刚度矩阵二范数最小,从中心向四周逐渐变大,且越靠近 x 轴与 y 轴对角线位置,机构刚度越大,这是因为当转动姿态增大,机构偏离中心位置,在 RPS 被动支链约束和支撑下,弹簧力变大,需要更大的绳索力才能驱动驱动机构运动,机构整体刚度也变大。这个现象与机构雅可比矩阵行列式平均值所表现出的特征相吻合,较大的刚度意味着机构输入输出响应放大效应变小。

式中 K_{ij} ——刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 中第 i 行第 j 列元素

设定绳索弹性模量 E_c 为 1.35 GPa,驱动绳索横截面半径为 r_c 为 2 mm,机构动平台在 p_z 为 100、150、200 mm 时,随 α 和 β 逐渐改变姿态下刚度矩阵二范数性能图谱如图 9 所示。

由图 9 可知,机构刚度性能指标随着 p_z 升高而变小,即机构在 z 轴方向上高度越大,机构刚度越小。由于随着运动平台高度增大,弹性支链弹性力

5 结论

- (1) 提出了一种基于 3-RPS 刚性支链约束的刚柔混合绳驱并联机构,建立了运动学和静力学模型。
- (2) 基于静力学模型及其约束条件,得到了机构力封闭工作空间,并分析了绳索支链处于不同方位时机构工作空间变化趋势以及影响工作空间的主要结构参数。
- (3) 推导了机构雅可比矩阵及刚度矩阵,分析了机构奇异位形、灵巧度和刚度等性能表现以及影响机构性能的主要因素。

参 考 文 献

- [1] GOSSELIN C. Cable-driven parallel mechanisms: state of the art and perspectives[J]. *Mechanical Engineering Reviews*, 2014, 1(1): DSM0004.
- [2] QIAN S, ZI B, SHANG W W, et al. A review on cable-driven parallel robots[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2018, 31(1): 1–11.
- [3] 曹凌, 唐晓强, 王伟方. 基于定矢量力输出的八索并联机构索力优化及实验研究[J]. *机器人*, 2015, 37(6): 641–647.
CAO Ling, TANG Xiaoqiang, WANG Weifang. Tension optimization and experimental research of parallel mechanism driven by 8 cables for constant[J]. *Robot*, 2015, 37(6): 641–647. (in Chinese)
- [4] 王仕武, 贺静, 李占贤, 等. 新型并联式绳索牵引叶片起吊机构运动学分析[J]. *机械设计*, 2022, 39(3): 99–103.
WANG Shiwu, HE Jing, LI Zhanxian, et al. Analysis on kinematics of new parallel rope-towing blade lifting mechanism[J]. *Journal of Machine Design*, 2022, 39(3): 99–103. (in Chinese)
- [5] QIAN S, ZI B, DING H. Dynamics and trajectory tracking control of cooperative multiple mobile cranes[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 83(1–2): 89–108.
- [6] 于金山, 李潇, 陶建国, 等. 面向在轨装配的八索并联机构构型设计与工作空间分析[J]. *机械工程学报*, 2021, 57(21): 1–10.
YU Jinshan, LI Xiao, TAO Jianguo, et al. Configuration design and workspace analysis of parallel mechanism driven by eight cables for on-orb[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2021, 57(21): 1–10. (in Chinese)
- [7] 吴惠松, 林麒, 柳汀, 等. 风洞虚拟飞行试验模型绳系并联支撑机构[J]. *航空学报*, 2022, 43(8): 314–326.
WU Huisong, LIN Qi, LIU Ting, et al. Wire-driven parallel suspension mechanism of virtual flight test model in wind tunnel[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2022, 43(8): 314–326. (in Chinese)
- [8] WANG X, MA S, LIN Q. Hybrid pose/tension control based on stiffness optimization of cable-driven parallel mechanism in wind tunnel test[C]//2016 2nd International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR). IEEE, 2016: 75–79.
- [9] SURDILOVIC D, BERNHARDT R. STRING – MAN: a new wire robot for gait rehabilitation[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004: 2031–2036.
- [10] ROSATI G, GALLINA P, MASIERO S. Design, implementation and clinical tests of a wire-based robot for neurorehabilitation[J]. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering*, 2007, 15(4): 560–569.
- [11] 张邦成, 刘帅, 喻俊志, 等. 绳索驱动腕部并联康复机构设计与逆运动学分析[J]. *机械工程学报*, 2022, 58(5): 57–68.
ZHANG Bangcheng, LIU Shuai, YU Junzhi, et al. Design and inverse kinematics analysis of wrist parallel rehabilitation mechanism: a rope driven-based method[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2022, 58(5): 57–68. (in Chinese)
- [12] 朱伟, 时宽祥, 王烨, 等. 三平移刚柔混合并联机构优化设计与动力学分析[J]. *农业机械学报*, 2021, 52(12): 417–425.
ZHU Wei, SHI Kuanxiang, WANG Ye, et al. Optimization design of 3-DOFs translational cable-driven rigid-flexible hybrid parallel mechanism and its dynamics analysis[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2021, 52(12): 417–425. (in Chinese)
- [13] 陈原, 郭登辉, 田丽霞. 绳牵引刚柔式波浪补偿并联机构的设计与建模[J]. *浙江大学学报(工学版)*, 2021, 55(5): 810–822.
CHEN Yuan, GUO Denghui, TIAN Lixia. Design and modeling of a cable-driven rigid-flexible wave compensation parallel mechanism[J]. *Journal of Zhejiang University (Engineering Science)*, 2021, 55(5): 810–822. (in Chinese)
- [14] 姜媛, 唐梁, 陈原. 四自由度绳驱动刚柔混合式波浪运动补偿机构的动力学建模[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2020, 51(7): 1767–1780.
JIANG Yuan, TANG Liang, CHEN Yuan. Dynamic modeling of a 4-DOF cable-driven rigid-flexible hybrid wave motion compensation mechanism[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2020, 51(7): 1767–1780. (in Chinese)
- [15] 王立栋, 陈原. 绳驱动刚柔混合式波浪运动补偿机构的运动学建模与碰撞干涉检测[J]. *兵工学报*, 2020, 41(4): 737–749.
WANG Lidong, CHEN Yuan. Kinematic modeling and collision interference detection of cable-driven rigid-flexible hybrid wave motion compensation mechanism[J]. *Acta Armamentarii*, 2020, 41(4): 737–749. (in Chinese)
- [16] WU Q, ZI B, HU B, et al. Modeling, kinematics, and dynamics of a rigid-flexible coupling spring-cable-driven parallel robot[J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2025, 17(8): 081003.
- [17] YIGIT C B, BOYRAZ P. Design and modelling of a cable-driven parallel-series hybrid variable stiffness joint mechanism for robotics[J]. *Mechanical Sciences*, 2017, 8(1): 65–77.
- [18] WANG J, YANG H, ZHANG J, et al. Versatile rigid-flexible coupling modules: enhancing soft origami structures with cable-driven parallel mechanisms[J]. *Advanced Intelligent Systems*, 2025, 7(8): 2401008.
- [19] 齐飞, 葛奕玮, 张恒, 等. 刚柔耦合外肢体机器人运动学与人机协作控制研究[J]. *农业机械学报*, 2025, 56(8): 726–735, 744.
QI Fei, GE Yiwei, ZHANG Heng, et al. Kinematic analysis of rigid-flexible coupled supernumerary robotic limbs and human-robot collaborative control research[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2025, 56(8): 726–

735,744. (in Chinese)

[20] 肖正明,段俊杰,周川,等. 考虑连杆和关节柔性的工业机器人大臂静动态性能优化[J]. 农业机械学报,2024,55(7): 449 – 458.
XIAO Zhengming, DUAN Junjie, ZHOU Chuan, et al. Optimization of static and dynamic performance of industrial robot forearm considering flexibility[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024,55(7):449 – 458. (in Chinese)

[21] EDEN J, SONG C, TAN Y, et al. CASPR – ROS: a generalised cable robot software in ROS for hardware[J]. Mechanisms and Machine Science, 2018, 53: 50 – 61.

[22] DEKKER R, KHAJEPOUR A, BEHZADIPOUR S. Design and testing of an ultra-high-speed cable robot[J]. International Journal of Robotics and Automation, 2006, 21(1): 25 – 34.

[23] BEHZADIPOUR S, KHAJEPOUR A. A new cable-based parallel robot with three degrees of freedom[J]. Multibody System Dynamics, 2005, 13(4): 371 – 383.

[24] ZHANG Z, SHAO Z, WANG L, et al. Optimal design of a high-speed pick-and-place cable-driven parallel robot[J]. Mechanisms and Machine Science,2018,53: 340 – 352.

[25] ZHU W, LIU J, SHI K,et al. Optimization design and dynamic stability analysis of 3-DOF cable-driven parallel robot with an elastic telescopic rod[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2022,36(9):4735 – 4746.

[26] LIU F, HUANG H, LI B, et al. Design and analysis of a cable-driven rigid-flexible coupling parallel mechanism with variable stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 153: 104030.

[27] LIU S, MEI J, WANG P, et al. Optimal design of a coupling-input cable-driven parallel robot with passive limbs based on force space analysis[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 184: 105296.

~~~~~

(上接第 396 页)

[19] 李弘振,赵凯旋,赫永康. 基于遥感的奶牛养殖场甲烷检测系统研发[J]. 华南农业大学学报,2024,45(5):772 – 781.  
LI Hongzhen, ZHAO Kaixuan, HE Yongkang. Development of methane detection system for dairy farms based on remote sensing[J]. Journal of South China Agricultural University,2024,45(5):772 – 781. (in Chinese)

[20] D'URSO P R, ARCIDIACONO C, CASCONI G. Ammonia and greenhouse gas distribution in a dairy barn during warm periods[J]. Frontiers of Agricultural Science and Engineering, 2024, 11(3): 428 – 441.

[21] ZHU Z, DONG, ZHOU Z. Ammonia and greenhouse gas emissions from a dairy cattle barn with a daily manure collection system[J]. Transactions of the ASABE, 2012,55(5):1959 – 1964.

[22] RENAND G, VLINET A, DECRUYENAERE V, et al. Methane and carbon dioxide emission of beef heifers in relation with growth and feed efficiency[J]. Animals, 2019, 9(12): 1136.

[23] RYAN C V, PABIOU T, PURFIELD D C, et al. Phenotypic relationship and repeatability of methane emissions and performance traits in beef cattle using a GreenFeed system[J]. Journal of Animal Science, 2022,100(12):1 – 13.

[24] BECK M R, THOMPSON L R, JARRETA P, et al. Recommendations on visit duration and sample number requirements for an automated head chamber system[J]. Journal of Animal Science, 2024,102(158):1 – 10.

[25] 韩雨润,史远刚,康晓龙. 奶牛反刍行为影响因素及其智能化监测方法的应用[J]. 中国畜牧兽医,2025,52(4):1554 – 1566.  
HAN Yurun, SHI Yuangang, KANG Xiaolong. Influencing factors of ruminating behavior and the application of intelligent monitoring methods in dairy cows[J]. China Animal Husbandry and Veterinary Medicine, 2025,52(4):1554 – 1566. (in Chinese)

[26] 沈维政,张爱静,张宇. 奶牛反刍研究进展[C]//中国畜牧兽医学会信息技术分会. 中国畜牧兽医学会信息技术分会第十二届学术研讨会论文集,2017:55 – 64.