

可轮换用动平台的运动解耦三自由度并联机构 拓扑设计与性能分析

沈惠平 朱 潇 李 菊 孟庆梅 李 涛 叶鹏达

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213164)

摘要: 首先提出一种可轮换用动平台的部分运动解耦三自由度并联机构,该类机构在工作过程的不同阶段可轮换使用两个不同的动平台以产生两平移—转动(2T1R)和三平移(3T)两种不同模式的输出运动,最终实现不同的工艺操作,可视为一种新的两模式输出运动机构。进一步,分析该三自由度并联机构在两种不同模式下的拓扑学、运动学与动力学性能,包括以方位特征(POC)、自由度(DOF)和耦合度(k)为内容的拓扑性能分析,基于其拓扑特征的机构符号式位置正反解的求解,基于位置正解的机构工作空间分析,以及基于位置反解的机构奇异位置分析;基于虚功原理序单开链法的机构动力学建模及其驱动力曲线的求解。然后,将可达工作空间作为优化目标,对机构的尺寸进行优化设计。最后,对该机构用作激光切割工艺的执行机构,并对2T1R和3T两种模式应用场景的概念设计进行阐述。本研究为可轮换用动平台的并联机构的设计、分析与潜在应用提供了理论依据,也拓展了多模式机构的概念、设计方法与应用范围。

关键词: 并联机构; 可轮换用动平台; 拓扑设计; 运动学分析; 工作空间; 优化设计

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2026)01-0413-14

OSID:



Topological Design and Performances Analysis of Kinematically Decoupled 3-DOF Parallel Mechanism with Alternately Used Moving Platforms

SHEN Huiping ZHU Xiao LI Ju MENG Qingmei LI Tao YE Pengda

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: A class of three-degree-of-freedom parallel mechanisms was firstly proposed with alternately used moving platforms, the innovation of which lay in the adoption of alternately used moving platforms structure. This type of mechanism can alternately use two different moving platforms during different stages of the working process to generate two distinct modes of output motion—two translations and one rotation (2T1R) and three translations (3T)—thereby achieving different process operations. It can be regarded as a novel dual-mode output motion mechanism. Furthermore, the topological, kinematic, and dynamic performance of this three-degree-of-freedom parallel mechanism under the two different modes was analyzed. This included topological analysis based on position and orientation characteristics (POC), degree of freedom (DOF), and coupling degree (k); the derivation of symbolic forward and inverse position solutions based on its topological characteristics; workspace analysis based on forward position solutions; singularity analysis based on inverse position solutions; dynamic modeling of the mechanism using the virtual work principle and the ordered single-open-chain method, along with the solution of its driving force curves; and the optimization design of the mechanism's dimensional parameters with the reachable workspace as the optimization objective. Finally, the application of this mechanism as an actuator in laser cutting processes was discussed, and the conceptual design for two process application scenarios—material handling in the 2T1R mode and cutting in the 3T mode—was elaborated. The

research result can provide a theoretical basis for the design, analysis, and potential applications of parallel mechanisms with alternately used moving platforms, while also expanding the concept, design methods, and application scope of multi-mode mechanisms.

Key words: parallel mechanism; alternately used moving platforms; topological design; kinematic analysis; workspace; optimization design

0 引言

多模式机构是可重构机构(如运动分岔机构^[1]、变胞机构^[2-3]等)中的一种,它能根据不同的应用需求,改变自身构型、灵活输出其不同运动形式的机构,在工业制造、医疗康复以及航空航天等领域得到较多的应用^[4]。

一条生产线在工作过程中具有不同的工作阶段,因此需要多个工位并产生不同输出运动类型(自由度相同或不同),例如,期望产生两平移一转动(2T1R)和三平移(3T)两种不同模式的输出运动,但为节约装备成本,尽量采用同一个主机来实现。

对于三自由度的 2T1R 并联机构,HUNT^[5]于 1983 年设计了一种含 2T1R 及寄生运动的 3-DOF 空间机构;KONG 等^[6]研究了含有球面支链或平行四边形子支链的 2T1R 空间机构;LIU 等^[7]提出一组运动学求解和构造均较为简单的 2T1R 型并联机构;刘艳敏^[8]研究机构的综合方法,并优选了部分 2T1R 新机型。LI 等^[9]基于 Grassmann 线几何和 Atlas 方法,提出了一种含闭环单元的 2T1R 和 2R1T 冗余驱动并联机构型综合方法,得到的机构具有良好的对称性和综合性能;沈惠平等^[10]设计、分析了一种零耦合度且部分运动解耦的非对称两支链大转角 2T1R 并联机构,并对其进行了运动学、动力学建模与分析。

关于三平移并联机构,CLAVEL^[11]提出了三自由度平移 Delta 并联机器人;HERVE 等^[12]基于李群和李代数理论综合提出了 3-RRR 等并联机构;MACHO 等^[13]提出了一种新的无浮动移动关节、无冗余约束的三平移并联机构,其工作空间内完全没有奇点;XIE 等^[14]研究了一种缆索驱动三自由度平移机构的定向方法;孔一啸等^[15]提出一种基于 2-CPR/UPS 并联机构的三平移移印机,以提高移印机印刷质量;VU 等^[16]研究了三自由度(DOF)电缆悬挂并联机器人,其使用 3 根电缆实现 3 个空间平移;BRIOT 等^[17]研究发明了一种新型的三自由度全解耦平移并联机器人,并进行了运动学分析。

可重构机构研究有涉及到 2T1R、3T 输出变换

的机构,其中,ZLATANOV 等^[18]研究的并联机构具有 4 种不同的三自由度运动模式,其中包含 2T1R、3T 模式;刘伟等^[19]基于具有 2R1T 和 2T1R 运动模式的并联机构,在其动平台上串联平面平行四边形机构后,提出了一种含混联变自由度支链的并联机构,其具有 3T、2T1R 和 2R1T 运动模式;KONG^[20]设计了一种仅由转动副组成就可以实现在平面 2T1R 输出和空间 3T 输出相互转变的并联机构;YE 等^[21]提出了一种新颖的多菱形运动分岔链,随着多菱形运动分岔链演变成不同的运动分支,综合了实现 3T、3R、2R1T 三自由度运动模式相互转换。但上述研究都要涉及到由“重构”运动副、奇异等方式改变机构本身的拓扑结构,而从一种模式到另一种模式的具体切换技术或方法研究较少,这些切换技术或方法会使实际的设计、制造、运维复杂。

目前,有关无需改变其拓扑结构(如不需要经过中间释放或锁住运动副等环节),却可使同一个主机机构实现两平移一转动(2T1R)和三平移(3T)两种模式输出运动的机构设计与分析的研究报道较少。为此,本文提出可轮换用动平台的并联机构(Parallel mechanism with alternately used moving platforms,AMP-PM),分析该机构在两种不同模式下的拓扑学运动学与动力学性能,为可轮换用动平台并联机构样机设计提供了基础。

1 可轮换用动平台的并联机构

可轮换用动平台的并联机构(AMP-PM)是指在一个连续运动过程始终采用同一个主机机构中的不同构件依次作为动平台,无需改变其拓扑结构,但能产生不同运动输出形式(模式)的机构。显然,这种机构完全不同于现有的、需要通过“重构”运动副、支链的拓扑结构等方式而实现多模式机构的设计理念。

本文以一种运动解耦的三自由度 AMP-PM 为例予以阐述^[22]。设想在同一生产线的不同工艺操作阶段,由可轮换用动平台轮流产生两平移一转动(2T1R)和三平移(3T)两种不同模式输出运动的设计思想及其解决方案,具体是:设计一种具有可轮换用动平台的三自由度并联机构,即将同一个机构中

两个不同的构件依次作为动平台（可分别在其上安装操作器，如吸盘、执行器等），在第 1 个工艺操作（如需要产生 2T1R）时，仅用第 1 个操作器，此时，第 2 个操作器空闲；第 2 个工艺操作（如需要产生 3T）时，仅用第 2 个操作器，而此时第 1 个操作器空闲。其中，两平移—转动（2T1R）的操作用来拾取抓住工件并调整姿态位置，而三平移（3T）的操作可用于进行喷涂、切割等工序。在这一过程中，自始至终采用同一个主机构，无需改变其拓扑结构，仅取不同的构件依次作为动平台输出，即两种运动模式/功能始终共用同一个主机构（硬设备）而其输出（软件）不同，大大节约了主装备的设计、制造、运行成本以及整机的安装空间。

2 三自由度可轮换用动平台并联机构拓扑设计与分析

2.1 机构设计

串、并联机构的方位特征（POC）方程分别为^[23]

$$M_{b_j} = \bigcup_{i=1}^m M_{J_i} \tag{1}$$

$$M_{Pa} = \bigcup_{j=1}^{v+1} M_{b_j} \tag{2}$$

式中 M_{J_i} ——第 i 个运动副的 POC 集

m ——运动副的数量

M_{b_j} ——第 j 条 SOC 支链末端构件的 POC 集

v ——并联机构的独立回路数

M_{Pa} ——并联机构动平台的 POC 集

根据上述 POC 方程，设计具有两平移—转动（2T1R）、三平移（3T）两种模式输出运动的并联机构。

2.1.1 两平移—转动（2T1R）的输出运动

首先，分别设计一条混合支链 I 和一条约束支链 II，其中：①混合支链 I 包含一个由子链 A（ $P_{11} // R_{12} // R_{13} // R_{14}$ ）与子链 B（ $P_{21} \perp R_{22} // R_{23}$ ）并联连接的空间子并联机构，在其输出杆 3 的垂直杆上再串联一个转动副 R_{15} ， R_{15} 轴线同时垂直于转动副 R_{14} 、 R_{23} 的轴线，并用转动副 R_{15} 连接动平台 1 的一端；静平台 0 上的移动副 P_{11} 和 P_{21} 共轴线（ $P_{11} \parallel P_{21}$ ）。②约束支链 II 包含一个由 4 个转动副组成的平行四边形（ $R_a R_b R_c R_d$ ，记作 Pa），其一条短边上串联两个轴线相互平行的转动副 R_{32} 和移动副 P_{31} ，另一条短边杆上串联两个轴线相互垂直的转动副 R_{33} 和 R_{16} ，且 $R_{33} // R_{32}$ ；同时，用转动副 R_{16} 连接动平台 1 的另一端。进一步，将混合支链 I 和约束支链 II 并联地连接于动平台 1 和静平台 0 之间，并使静平台 0 上的 3

个移动副的关系为： $P_{11} \parallel P_{21} // P_{31}$ ；动平台 1 上两个转动副的关系为： $R_{16} // R_{15}$ ，则得到如图 1 所示的并联机构。

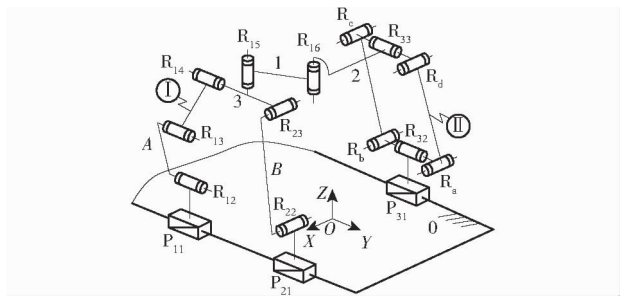


图 1 可轮换用动平台 1、2 的 3-DOF 并联机构

Fig. 1 3-DOF PM with alternately used moving platforms 1, 2

取动平台 1 上的 R_{15} 为基点，由式（1）可知，混合支链 I、约束支链 II 末端构件的 POC 集 M_I 、 M_{II} 分别为

$$M_I = \left(\left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1 (// R_{14}) \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^2 (// YOZ) \\ r^1 (// R_{23}) \end{matrix} \right] \right) \cup \left[\begin{matrix} t^1 (\perp R_{15}) \\ r^1 (// R_{15}) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^2 (// YOZ) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^1 (\perp R_{15}) \\ r^1 (// R_{15}) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^2 (// YOZ) \\ r^1 (// R_{15}) \end{matrix} \right] \tag{3}$$

$$M_{II} = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1 (// R_{33}) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^1 (// Pa) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^1 (\perp R_{16}) \\ r^1 (// R_{16}) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2 (// YOZ) \end{matrix} \right] \tag{4}$$

由式（2）可知，动平台 1 得到 POC 集为

$$M_{Pa} = M_I \cap M_{II} = \left[\begin{matrix} t^2 (// YOZ) \\ r^1 (// R_{15}) \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2 (// YOZ) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^2 (// YOZ) \\ r^1 (// R_{15}) \end{matrix} \right] \tag{5}$$

式（5）表明，动平台 1 具有在 YOZ 空间内的二维移动和绕转动副 R_{15} 轴线的一维转动输出（2T1R）。

2.1.2 三平移（3T）输出的输出运动

在图 1 所示的并联机构中，也可取构件 2 为动平台。此时，该机构可视为由另一条混合支链 I 和另一条约束支链 II 组成，即：①混合支链 I 构成为：子链 A（ $P_{11} // R_{12} // R_{13} // R_{14}$ ）与子链 B（ $P_{21} \perp R_{22} // R_{23}$ ）并联连接为一个空间子并联机构，在其输出杆 3 的垂直杆上再串联两个轴线相互平行的转动副 R_{15} 和 R_{16} ，其中，转动副 R_{15} 轴线同时垂直于转动副 R_{14} 、 R_{23} 的轴线，而用转动副 R_{16} 连接动平台 2 的一端。②约束支链 II 构成为：包含一个由 4 个转动副

组成的平行四边形($R_a R_b R_c R_d$, 记作 Pa), 其一条短边上串联两个轴线相互平行的转动副 R_{32} 和移动副 P_{31} , 另一条短边杆上通过转动副 R_{33} 直接与动平台 2 的另一端连接, 且使 $R_{33} // R_{32}$ 。

取动平台 2 上的 R_{16} 为基点, 由式(1)可知, 支链 I、II 末端构件的 POC 集分别为

$$\boldsymbol{M}_I = \left[\begin{matrix} t^2(// YOZ) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^1(\perp R_{15}) \cup t^1(\perp R_{16}) \\ r^1(// R_{16}) \end{matrix} \right] =$$
$$\left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(// R_{16}) \end{matrix} \right] \quad (6)$$

$$\boldsymbol{M}_{II} = \left[\begin{matrix} t^1(// P_{31}) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^2(// Pa) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup$$
$$\left[\begin{matrix} t^1(\perp R_{32}) \cup t^1(\perp R_{33}) \\ r^1(// R_{32}) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(// R_{32}) \end{matrix} \right] \quad (7)$$

由式(2)可知, 动平台 2 的 POC 集为

$$\boldsymbol{M}_{Pa} = \boldsymbol{M}_I \cap \boldsymbol{M}_{II} = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(// R_{16}) \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(// R_{32}) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^0 \end{matrix} \right]$$
$$(8)$$

式(8)表明, 动平台 2 具有在 XYZ 空间内的三维移动输出(3T)。

2.2 DOF 分析

基于最优路径的机构自由度计算公式为^[24-26]

$$F = \sum_{j=1}^v F_j \quad (9)$$

其中
$$F_j = f_j - \xi_{L_j} \quad (10)$$

$$\xi_{L_j} = \dim \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j \boldsymbol{M}_{b_i} \right) \cup \boldsymbol{M}_{b_{(i+1)}} \right\} \quad (11)$$

- 式中
- F ——机构的自由度
- F_j ——第 j 个回路的自由度
- f_j ——第 j 个回路中新添加上去的支链(首次参与计算)的运动副自由度和(不含局部自由度)
- ξ_{L_j} ——第 j 个回路的独立位移方程数

无论上述哪一种组成方式, 该机构含有两个独立回路。现以两平移一转动(2T1R)的输出运动模式为例计算该机构自由度, 根据最优路径选择原则^[24-26]划分路径, 具体为: ①第 1 回路应为混合支链 I 中的空间子并联机构, 即 $P_{11} // R_{12} // R_{13} // R_{14} \perp R_{23} // R_{22} \perp P_{21}$, 由式(11)易知, 其独立位移方程数为

$$\xi_{L_1} = \dim \left(\left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(// R_{14}) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^2(// YOZ) \\ r^1(// R_{23}) \end{matrix} \right] \right) =$$
$$\dim \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(// \diamond (R_{14}, R_{23})) \end{matrix} \right] = 5 \quad (12)$$

由式(10)知, 其自由度为

$$F_1 = f_1 - \xi_{L_1} = 7 - 5 = 2 \quad (13)$$

②第 2 回路由混合支链 I 余下的子链(R_{15})和约束支链 II 组成, 即 $R_{15} // R_{16} \perp R_{33} (\perp Pa) // R_{32} // P_{31}$, 由式(11)知其独立位移方程数为

$$\xi_{L_2} = \dim \left(\left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(// R_{16}) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(// R_{32}) \end{matrix} \right] \right) =$$
$$\dim \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(// \diamond (R_{16}, R_{32})) \end{matrix} \right] = 5 \quad (14)$$

由式(10)知, 其自由度为

$$F_2 = f_2 - \xi_{L_2} = 6 - 5 = 1 \quad (15)$$

由式(9)知, 机构的自由度计算为

$$F = F_1 + F_2 = 2 + 1 = 3 \quad (16)$$

因此, 取静平台上的 3 个移动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 为驱动副时, 动平台 1 可实现两平移一转动(2T1R)的输出, 其 x 、 z 值均由 P_{11} 、 P_{21} 决定; 而动平台 2 可实现三平移(3T)的输出, 其 z 值均由 P_{11} 、 P_{21} 决定。

因此, 无论上述哪一种输出运动模式, 该机构具有一定的输入-输出运动解耦性; 而在 2T1R 输出模式下的运动解耦性更好。

3 机构运动学分析

基于拓扑特征的运动学建模原理和方法具有建模方便、计算量少等优势^[27]。据此, 建立机构运动学模型如图 2 所示。

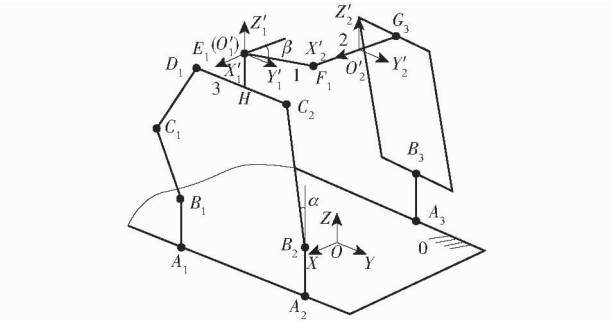


图 2 三自由度并联机构的运动学模型
Fig. 2 Kinematic model of a 3-DOF PM

静平台 0 上两个导轨之间的距离为 $2b$, 静坐标系 $O-XYZ$ 的坐标原点 O 在矩形平台中心, Y 轴方向平行于 A_1 所在的轴线, Z 轴平行于导轨所在平面的法线方向, 并指向动平台 1。

当取动平台 1 为输出端时, 动坐标系 $O'_1-X'_1Y'_1Z'_1$ 的原点位于动平台 1 上的点 E_1 处, X'_1 、 Z'_1 轴分别平行、垂直于 F_1G_3 , 而 X 轴与 Y'_1 轴方向均由右手定则确定; 当取动平台 2 为输出端时, 动坐标系 $O'_2-X'_2Y'_2Z'_2$ 的原点位于动平台 2 上 F_1G_3 的中点,

X'_2, Z'_2 轴分别重合、垂直于 F_1G_3 , 而 X 轴与 Y'_2 轴方向均由右手定则确定。

设矩形静平台 0 的长、宽分别为 $2a, 2b$, 平行四边形机构短边宽 l_4 , 长边长 $l_5, A_1B_1 = l_1, A_2B_2 = l'_1, A_3B_3 = l''_1, B_1C_1 = l_2, C_1D_1 = l'_2, B_2C_2 = l_3, B_3C_3 = l_3, F_1G_3 = l_6, F_1E_1 = l_7, D_1C_2 = l_8, E_1H = l_9$ 。 $l_1 = l'_1 = l''_1; l_2 = l'_2$ 。

3.1 位置正解

3.1.1 两平移—转动(2T1R)输出模式

位置正解为:已知 3 个驱动副滑块 P_{11}, P_{21}, P_{31} 的输入量 S_1, S_2, S_3 与点 O'_1 的 x_1 坐标值为 b , 求动平台 1 上点 O'_1, y_1, z_1 坐标值与位姿角 β 。

设 B_2C_2 与 Z 轴正方向夹角为 α , 杆 E_1F_1 与 X 轴负方向的夹角为 β 。在静坐标系 $O-XYZ$ 中, 可知

$$\begin{cases} C_2 = (b, S_2 - l_3 \sin \alpha, l_1 + l_3 \cos \alpha) \\ D_1 = (b, S_2 - l_3 \sin \alpha - l_8, l_1 + l_3 \cos \alpha) \\ E_1 = \left(b, S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8, l_1 + l_3 \cos \alpha + l_9\right) \\ F_1 = \left(b - l_7 \cos \beta, S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8 + l_7 \sin \beta, \right. \\ \left. l_1 + l_3 \cos \alpha + l_9\right) \end{cases} \quad (17)$$

由约束条件 $y_{A1} = y_{D1}$, 可得

$$\alpha = \arcsin \frac{S_2 - l_8 - S_1}{l_3} \quad (18)$$

因为杆 F_1G_3 作三平移(3T)运动, 因此可得

$$G_3 = \left(b - l_7 \cos \beta - l_6, S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8 + l_7 \sin \beta, \right. \\ \left. l_1 + l_3 \cos \alpha + l_9\right) \quad (19)$$

由杆长条件 $B_3G_3 = l_5$, 得位置方程并解得

$$A \sin \beta + B \cos \beta + C = 0 \quad (20)$$

则有

$$\beta = 2 \arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \quad (21)$$

其中

$$\begin{cases} A = 2l_7 \left(S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8 - S_3\right) \\ B = -2l_7(2b - l_6) \\ C = l_7^2 + (2b - l_6)^2 + \left(S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8 - S_3\right)^2 - \\ l_5^2 + (l_3 \cos \alpha + l_9)^2 \end{cases} \quad (22)$$

若取动平台 1 上的点 $E_1(O'_1)$ 为基点, 则位置正

解为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \\ \beta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8 \\ l_1 + l_3 \cos \alpha + l_9 \\ 2 \arctan \frac{A \pm \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{B - C} \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

由式(23)知, 动平台上点 O'_1 的 y_1, z_1 值由 S_1, S_2 决定, 转动角 β 值由 S_1, S_2, S_3 共同决定, 因此, 该机构在 2T1R 模式下具有一定的运动解耦性。

3.1.2 三平移(3T)输出模式

位置正解为:已知 3 个驱动副滑块 P_{11}, P_{21}, P_{31} 的移动量 S_1, S_2, S_3 , 求动平台 2 上点 $O'_2(x_2, y_2, z_2)$ 。

由 3.1.1 节所述的两平移—转动(2T1R)模式下的位置正解, 可直接求得作三平移的动平台 2 的中点 O'_2 位置正解为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} b - l_7 \cos \beta - \frac{1}{2}l_6 \\ S_2 - l_3 \sin \alpha - \frac{1}{2}l_8 + l_7 \sin \beta \\ l_1 + l_3 \cos \alpha + l_9 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$

由式(24)知, 动平台上点 O'_2 的 x_2, y_2 值由 S_1, S_2, S_3 共同决定, z_2 值由 S_1, S_2 共同决定, 该机构在 3T 模式下也具有一定运动解耦性。

3.2 位置逆解

3.2.1 两平移—转动(2T1R)输出模式

位置逆解为:已知动平台位置 $O'_1(b, y_1, z_1)$ 和位姿角 β^* , 求 3 个驱动副 P_{11}, P_{21}, P_{31} 的移动量 S_1, S_2, S_3 。

在动坐标系 $O'_1-X'_1Y'_1Z'_1$ 中, 可知

$$\begin{cases} G_3 = (b - l_7 \cos \beta^* - l_6, y_1 + l_7 \sin \beta^*, z_1) \\ D_1 = \left(b, y_1 - \frac{1}{2}l_8, z_1 - l_9\right) \\ B_2 = \left(b, y_1 - \frac{1}{2}l_8 + l_3 \sin \alpha^*, z_1 - l_9 - l_3 \cos \alpha^*\right) \end{cases} \quad (25)$$

式中 α^* ——杆 B_2C_2 与 Z 轴正方向的夹角(这里为了区分正解中的 α , 加了上标*)

由杆长条件 $z_{B2} = l_1, B_3G_3 = l_5$, 可得

$$\begin{cases} \alpha^* = \arccos \frac{z_1 - l_1 - l_9}{l_3} \\ S_3 = y_1 + l_7 \sin \beta^* \pm \sqrt{l_5^2 - (z_1 - l_1)^2 - (2b - l_7 \cos \beta^* - l_6)^2} \end{cases} \quad (26)$$

由约束条件 $y_{D1} = y_{A1}, y_{B2} = y_{A2}$, 可得

$$\begin{cases} S_1 = y_1 - \frac{1}{2}l_8 \\ S_2 = y_1 + \frac{1}{2}l_8 + l_3\sin\alpha^* \end{cases} \quad (27)$$

故动平台 1 上点 $E_1(O'_1)$ 为基点时的位置反解为

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y_1 - \frac{1}{2}l_8 \\ y_1 + \frac{1}{2}l_8 + l_3\sin\alpha^* \\ y_1 + l_7\sin\beta^* \pm \sqrt{l_5^2 - (z_1 - l_1)^2 - (2b - l_7\cos\beta^* - l_6)^2} \end{bmatrix}^T \quad (28)$$

3.2.2 三平移(3T)输出模式

已知:动平台位置 $O'_2(x_2, y_2, z_2)$, 求 3 个驱动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 的移动量 S_1 、 S_2 、 S_3 。

在动坐标系 $O'_2 - X'_2Y'_2Z'_2$ 中, 可知

$$\begin{cases} G_3 = \left(x_2 - \frac{1}{2}l_6, y_2, z_2\right) \\ E_1 = \left(x_2 + \frac{1}{2}l_6 + l_7\cos\beta^*, y_2 - l_7\sin\beta^*, z_2\right) \\ H_1 = \left(x_2 + \frac{1}{2}l_6 + l_7\cos\beta^*, y_2 - l_7\sin\beta^*, z_2 - l_9\right) \end{cases} \quad (29)$$

由约束条件 $y_H = S_1 + \frac{1}{2}l_8$, 得

$$S_1 = y_2 - l_7\sin\beta^* - \frac{1}{2}l_8 \quad (30)$$

由杆长条件 $B_3G_3 = l_5$, 得

$$S_3 = y_2 \pm \sqrt{l_5^2 - (z_2 - l_1)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2}l_6 + b\right)^2} \quad (31)$$

结合 3.1.1 节静坐标系中点 E_1 坐标, 可知

$$\begin{cases} \beta^* = \arcsin \frac{b - \frac{1}{2}l_6 - x_2}{l_7} \\ S_2 = y_2 + \frac{1}{2}l_8 - l_7\sin\beta^* + l_3\sin\alpha^* \\ \alpha^* = \arcsin \frac{z_2 - l_1 - l_9}{l_3} \end{cases} \quad (32)$$

故若取动平台 2 中点 O'_2 为基点, 位置反解为

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} y_2 - l_7\sin\beta^* - \frac{1}{2}l_8 \\ y_2 + \frac{1}{2}l_8 + l_3\sin\alpha^* - l_7\sin\beta^* \\ y_2 \pm \sqrt{l_5^2 - (z_2 - l_1)^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2}l_6 + b\right)^2} \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

3.3 正逆解实例验算

设该并联机构的结构参数为: $l_1 = 155\text{ mm}$, $l_2 = 140\text{ mm}$, $l_3 = 240\text{ mm}$, $l_4 = 140\text{ mm}$, $l_5 = 280\text{ mm}$, $l_6 = 260\text{ mm}$, $l_7 = 160\text{ mm}$, $l_8 = 160\text{ mm}$, $l_9 = 80\text{ mm}$, $a = 315\text{ mm}$, $b = 165\text{ mm}$ 。

给定 3 个驱动副的运动规律分别为

$$\begin{cases} S_1 = -5\sin t \\ S_2 = 5\sin t \\ S_3 = -10\sin t \end{cases} \quad (34)$$

对于两种模式, 在 Solidworks 中对该机构进行建模, 分别导出动平台 1 和 2 位移的仿真曲线; 同时利用 Matlab 编程计算其位移的理论变化曲线。经验证: 在 2T1R、3T 两种模式下位移理论与仿真曲线一致, 表明机构位置正反解分析正确, 且动平台位移曲线变化平稳, 没有突变发生。

4 机构工作空间分析

并联机构可达空间是指在考虑运动副转角范围、杆长不干涉情况下, 末端执行器的工作区域。

4.1 两平移—转动(2T1R)输出模式

依据位置正解式 (23) 求解该并联机构的工作空间, 确定 3 个驱动副位置搜索范围为: $50\text{ mm} \leq y_1 \leq 300\text{ mm}$, $-500\text{ mm} \leq y_2 \leq 500\text{ mm}$, $300\text{ mm} \leq y_3 \leq 450\text{ mm}$ 。

通过 Matlab 软件编程, 得到该机构动平台 1 质心点的三维工作空间, 如图 3 所示。

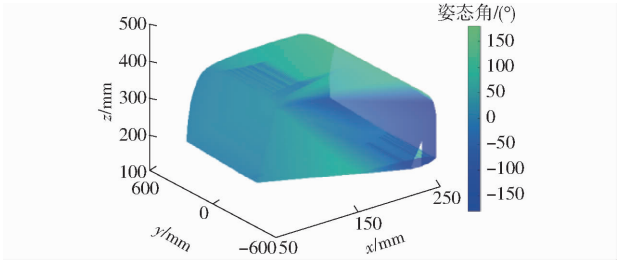


图 3 2T1R 模式下机构的工作空间
Fig. 3 Workspace of mechanism in 2T1R mode

4.2 三平移(3T)输出模式

依据位置正解式 (24) 求解该并联机构的工作空间, 确定 3 个驱动副位置搜索范围为: $-200\text{ mm} \leq y_1 \leq 200\text{ mm}$, $-500\text{ mm} \leq y_2 \leq 500\text{ mm}$, $200\text{ mm} \leq y_3 \leq 450\text{ mm}$ 。

通过 Matlab 软件编程, 得到该机构动平台 2 质心点的三维工作空间如图 4a 所示, 不同高度 z 处的 $x - y$ 截面图如图 4b 所示。

由图 4b 可知, 动平台 2 在 Z 轴方向高达 $380 \sim$

400 mm 时切割面积达到最大。如本机构用于激光切割板材, 可满足大范围的切割需求。

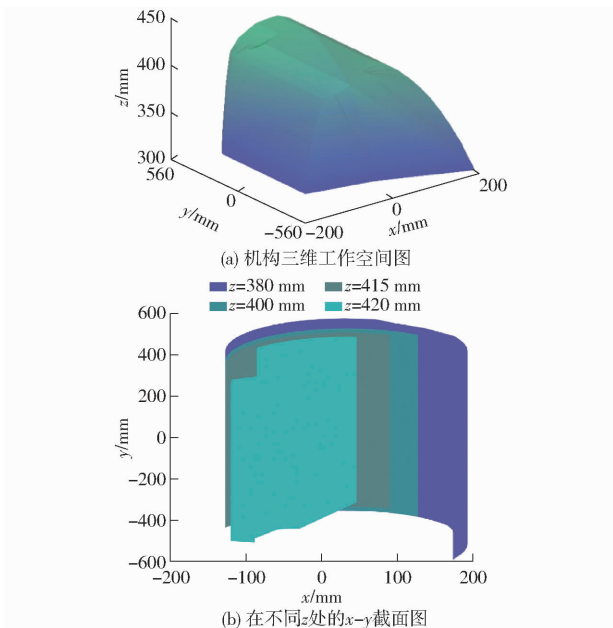


图 4 3T 模式下机构的工作空间和不同 z 处的 x - y 截面图

Fig. 4 Workspaces of mechanism in 3T mode and the x - y sections at different z points

5 速度与奇异性分析

5.1 速度分析

5.1.1 两平移—转动 (2T1R) 输出模式

(1) 动平台 1 末端速度映射模型

由式 (28) 得 2T1R 模式下的位置逆解方程为

$$\begin{cases} f_1: S_1 - y_1 + \frac{1}{2}l_8 = 0 \\ f_2: S_2 - y_1 - \frac{1}{2}l_8 - l_3 \sin \alpha^* = 0 \\ f_3: S_3 - y_1 - l_7 \sin \beta^* + \sqrt{l_5^2 - (z_1 - l_1)^2 - (2b - l_7 \cos \beta^* - l_6)^2} = 0 \end{cases} \quad (35)$$

进行全微分, 可得

$$J_0 \dot{\omega} = J_i \dot{\rho} \quad (36)$$

$$\text{其中 } \dot{\omega} = [\dot{y}_1 \quad \dot{z}_1 \quad \dot{\beta}^*]^T \quad (37)$$

$$\dot{\rho} = [\dot{S}_1 \quad \dot{S}_2 \quad \dot{S}_3]^T \quad (38)$$

$$J_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta^*} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial z_1} & \frac{\partial f_3}{\partial \beta^*} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$J_i = - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial S_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial S_3} \end{bmatrix} \quad (40)$$

式中 $\dot{\omega}$ ——输出元素矩阵

$\dot{\rho}$ ——输入元素矩阵

J_0 ——正向雅可比矩阵, 矩阵中元素含义为由 3 个逆解方程分别对变量 y_1 、 z_1 、 β^* 求偏导

J_i ——逆向运动学雅可比矩阵, 矩阵中元素含义为由 3 个逆解方程分别对输入速度元素 S_1 、 S_2 、 S_3 求偏导

由 3 个逆解方程分别对变量 y_1 、 z_1 、 β^* 求偏导,

可得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} = f_{11} = -1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_1} = f_{12} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial \beta^*} = f_{13} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = f_{21} = -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = f_{22} = \frac{\cos \alpha^*}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_1 - l_1 - l_9}{l_3} \right)^2}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \beta^*} = f_{23} = 0 \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1} = f_{31} = -1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_1} = f_{32} = \frac{l_1 - z_1}{\sqrt{l_5^2 - (z_1 - l_1)^2 - (x_1 - l_6 + b - l_7 \cos \beta^*)^2}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial \beta^*} = f_{33} = -l_7 \cos \beta^* - \frac{l_7 \sin \beta^* (x_1 - l_7 \cos \beta^* - l_6 + b)}{\sqrt{l_5^2 - (x_1 - l_6 + b - l_7 \cos \beta^*)^2 - (z_1 - l_1)^2}} \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial S_1} = u_{11} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_2} = u_{22} = 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_3} = u_{33} = 1 \end{cases} \quad (42)$$

当机构不处于奇异位形时, $\boldsymbol{J}_0$ 可逆, 则

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}_0^{-1} \boldsymbol{J}_i \dot{\boldsymbol{\rho}} \tag{43}$$

式(43)为动平台 1 上点 O'_1 的速度映射模型。

(2) 动平台 1 末端加速度映射模型

将式(43)两边同时对时间 t 求导, 当机构不处于奇异位形时, $\boldsymbol{J}_0$ 可逆, 并整理得

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{J}_0^{-1} \boldsymbol{J}_i \ddot{\boldsymbol{\rho}} - \boldsymbol{J}_0^{-1} \boldsymbol{K}_0 \tag{44}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_0 &= [\boldsymbol{K}_1 \quad \boldsymbol{K}_2 \quad \boldsymbol{K}_3]^T \\ \begin{cases} \boldsymbol{K}_1 = \dot{f}_{11} \dot{y}_1 + \dot{f}_{12} \dot{z}_1 + \dot{f}_{13} \dot{\beta}^* + \dot{u}_{11} \dot{S}_1 \\ \boldsymbol{K}_2 = \dot{f}_{21} \dot{y}_1 + \dot{f}_{22} \dot{z}_1 + \dot{f}_{23} \dot{\beta}^* + \dot{u}_{22} \dot{S}_2 \\ \boldsymbol{K}_3 = \dot{f}_{31} \dot{y}_1 + \dot{f}_{32} \dot{z}_1 + \dot{f}_{33} \dot{\beta}^* + \dot{u}_{33} \dot{S}_3 \end{cases} \end{aligned} \tag{45}$$

式中 $\boldsymbol{K}_1$ 、 $\boldsymbol{K}_2$ 、 $\boldsymbol{K}_3$ ——矩阵 $\boldsymbol{J}_0$ 和 $\boldsymbol{J}_i$ 内元素 f_{ij} ($i=1, 2, 3; j=1, 2, 3$) 对时间 t 的导数与对应时间 t 的导数的乘积之和

式(44)为动平台 1 上点 O'_1 的加速度映射模型。

5.1.2 三平移(3T)输出模式

(1) 动平台 2 末端速度映射模型

同理由式(33)得 3T 模式下的位置逆解方程

$$\begin{cases} f_1 : S_1 - y_2 + l_7 \sin \beta^* + \frac{1}{2} l_8 = 0 \\ f_2 : S_2 - y_2 - \frac{1}{2} l_8 + l_7 \sin \beta^* - l_3 \sin \alpha^* = 0 \\ f_3 : S_3 - y_2 + \sqrt{l_5^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} l_6 + b\right)^2 - (z_2 - l_1)^2} = 0 \end{cases} \tag{46}$$

进行全微分可得形如式(36)的速度方程, 但式中

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}} &= [\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2 \quad \dot{z}_2]^T \\ \dot{\boldsymbol{\rho}} &= [\dot{S}_1 \quad \dot{S}_2 \quad \dot{S}_3]^T \\ \boldsymbol{J}_0 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial y_2} & \frac{\partial f_3}{\partial z_2} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{J}_i &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial S_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial S_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial f_3}{\partial S_3} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{47}$$

由 3 个逆解方程分别对变量 x_2 、 y_2 、 z_2 求偏导, 可得

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = f_{11} = \frac{\cos \beta^*}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - \frac{1}{2} l_6 - x_2}{l_7}\right)^2}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} = f_{12} = -1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2} = f_{13} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = f_{21} = \frac{\cos \beta^*}{\sqrt{1 - \left(\frac{b - \frac{1}{2} l_6 - x_2}{l_7}\right)^2}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = f_{22} = -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_2} = f_{23} = \frac{\cos \alpha^*}{\sqrt{1 - \left(\frac{z_2 - l_1 - l_9}{l_3}\right)^2}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} = f_{31} = \frac{x_2 - \frac{1}{2} l_6 + b}{\sqrt{l_5^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} l_6 + b\right)^2 - (z_2 - l_1)^2}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_2} = f_{32} = -1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_2} = f_{33} = -\frac{z_2 - l_1}{\sqrt{l_5^2 - \left(x_2 - \frac{1}{2} l_6 + b\right)^2 - (z_2 - l_1)^2}} \end{cases} \tag{48}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial S_1} = u_{11} = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial S_2} = u_{22} = 1 \\ \frac{\partial f_3}{\partial S_3} = u_{33} = 1 \end{cases} \tag{49}$$

当机构不处于奇异位形时, $\boldsymbol{J}_0$ 可逆, 得到如式(43)的速度映射模型。

(2) 动平台 2 末端加速度映射模型

将上式动平台 2 上点 O'_2 的速度映射模型两边同时对时间 t 求导, 当机构不处于奇异位形时, $\boldsymbol{J}_0$ 可逆, 并整理得形如式(44)的加速度映射模型, 式中, $\boldsymbol{K}_0$ 、 $\boldsymbol{K}_1$ 、 $\boldsymbol{K}_2$ 、 $\boldsymbol{K}_3$ 含义同 5.1.1 节。

5.2 机构奇异性分析

5.2.1 两平移—转动(2T1R)输出模式

由式(36)有

$$\boldsymbol{A} \dot{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{B} \dot{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0} \tag{50}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad (51)$$

依据矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 是否奇异, 将机构奇异位形分为如下 3 类:

(1) 第 I 类奇异

当 $\det(\mathbf{B}) = 0$, 与事实不符, 因此, 机构不存在奇异位置。

(2) 第 II 类奇异

当 $\det(\mathbf{A}) = 0, \alpha = 90^\circ$, 即 B_2C_2 平行于静平台 0 时, 会发生输出奇异, 如图 5 所示。

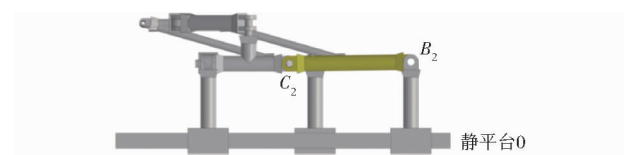


图 5 输入奇异位置

Fig. 5 Input singular position

(3) 第 III 类奇异

当 $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$, 这种情况不存在, 即该机构不存在综合奇异位置。

5.2.2 三平移(3T)输出模式

经计算分析, 三平移(3T)输出模式下的奇异位置与两平移一转动(2T1R)输出模式下的奇异位置相同, 当且仅当 $\alpha = 90^\circ$, 杆 B_2C_2 平行于静平台 0 时, 会发生如图 5 所示位置的输出奇异。

5.3 算例仿真与验证

取 3.3 节中驱动副的运动规律, 开始运行前 ($t = 0$ s 时) 的初始位置值为: ① 2T1R 模式下: $S_{01} = -174.07$ mm, $S_{02} = 157.99$ mm, $S_{03} = 3.15$ mm。② 3T 模式下: $S_{01} = -109.31$ mm, $S_{02} = 228.58$ mm, $S_{03} = -41.58$ mm。

由 Matlab 对式 (43)、(44) 进行编程, 可计算动平台 1 上点 O'_1 和动平台 2 上点 O'_2 的速度和加速度理论曲线; 同时, 在 Solidworks 软件中对机构进行仿真分析, 得到动平台 1 和 2 的速度和加速度仿真曲线。

经验证, 理论计算与仿真曲线的速度和加速度曲线一致, 表明两种运动模式下运动学建模及其公式推导正确, 且动平台速度、加速度曲线变化平缓, 没有发生突变。

6 动力学分析

基于虚功原理的序单开链法基本原理^[28]是: 对自由度为 f 、广义速度为 $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \dot{q}_f]^T$ 的机械系统, 按照拓扑结构分解路线, 将其分成若干个

SKC_{*i*}, 而每一个 SKC_{*i*} 又可分解为若干个单开链 SOC(Δ_j^-)、SOC(Δ_j^0)、SOC(Δ_j^+); 假定解除不同 SKC 连接处运动副 e 个约束, 可得到自由度为 $(f + e)$ 的新系统。原系统给被解除约束处的运动副支反力, 转换为作用在新系统构件上的未知外力; 最后, 通过虚功原理, 即在理想约束下, 外力 (矩) 和惯性力 (矩) 在机械系统的任何虚位移上的元功之和等于零, 建立动力学方程从而求解。

6.1 受力分析

作用于构件质心上的力有重力和惯性力, 而力矩仅为惯性力矩。

对于动平台, 作用在质心的力 $F_{o'}$ 和力矩 $M_{o'}$ 分别为

$$\mathbf{Q}_{o'} = \begin{bmatrix} F_{o'} \\ M_{o'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{o'} + m_{o'}g - m_{o'}a \\ \tau_{o'} - \mathbf{I}_{o'}\varepsilon - \omega(\mathbf{I}_{o'}\omega) \end{bmatrix} \quad (52)$$

式中 $f_{o'}$ ——作用在动平台的外力

$\tau_{o'}$ ——作用在动平台的外力矩

$m_{o'}$ ——动平台质量

g ——重力加速度

a ——动平台加速度

ω ——动平台角速度

ε ——动平台角加速度

$\mathbf{I}_{o'}$ ——坐标系 $O-XYZ$ 下动平台质心处的惯量矩阵

对于各个支链, 假设重力是唯一外力, 则作用在各构件上的力 F_i 和力矩 M_i 分别为

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i g - m_i a_i \\ -\mathbf{I}_i \varepsilon_i - \omega_i(\mathbf{I}_i \omega_i) \end{bmatrix} \quad (53)$$

式中 m_i ——杆件 i 的质量

a_i ——杆件 i 的加速度

$\mathbf{I}_i$ ——坐标系 $O-XYZ$ 下杆件 i 质心处的惯量矩阵

ω_i ——杆件 i 的角速度

ε_i ——杆件 i 的角加速度

由式 (52)、(53), 可计算得到该机构各杆件所受的力与力矩。

6.2 动力学方程

对于 SKC₂, 解除点 O' 处的约束, 于是支反力 F_H 转换为未知外力, 由虚功原理可得

$$\begin{aligned} & [\delta X_{A_3B_3} \quad 0] \mathbf{Q}_{A_3B_3} + [\delta X_{B_3G_3} \quad \delta \theta_{B_3G_3}] \mathbf{Q}_{B_3G_3} + \\ & [\delta X_{F_1G_3} \quad \delta \theta_{F_1G_3}] \mathbf{Q}_{F_1G_3} + [\delta X_{E_1F_1} \quad \delta \theta_{E_1F_1}] \mathbf{Q}_{E_1F_1} - \\ & [\delta X_{C_2D_1} \quad 0] [F_H \quad 0]^T = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

对于 SKC₁, 将支反力 $F_{o'}$ 视为未知外力, 由虚功原理可得

$$\begin{aligned} & [\delta X_{A_1B_1} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_1B_1} + [\delta X_{A_2B_2} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_2B_2} + \\ & [\delta X_{B_1C_1} \quad \delta \theta_{B_1C_1}] \boldsymbol{Q}_{B_1C_1} + \\ & [\delta X_{B_2C_2} \quad \delta \theta_{B_2C_2}] \boldsymbol{Q}_{B_2C_2} + [\delta X_{C_1D_1} \quad \delta \theta_{C_1D_1}] \boldsymbol{Q}_{C_1D_1} + \\ & [\delta X_{C_2D_1} \quad 0] [\boldsymbol{F}_H \quad 0]^T = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

式中

$$\left\{ \begin{aligned} \delta X_{A_iB_i} &= J_{v_{A_iB_i}} \delta q \quad (i=1,2,3) \\ \delta X_{B_iC_i} &= J_{v_{B_iC_i}} \delta q \quad (i=1,2) \\ \delta X_{C_1D_1} &= J_{v_{C_1D_1}} \delta q \\ \delta X_{B_3G_3} &= J_{v_{B_3G_3}} \delta q \\ \delta X_{C_2D_1} &= J_{v_{C_2D_1}} \delta q \\ \delta X_{E_1F_1} &= J_{v_{E_1F_1}} \delta q \\ \delta X_{F_1G_3} &= J_{v_{F_1G_3}} \delta q \\ \delta \theta_{B_iC_i} &= J_{w_{B_iC_i}} \delta q \quad (i=1,2) \\ \delta \theta_{C_1D_1} &= J_{w_{C_1D_1}} \delta q \\ \delta \theta_{B_3G_3} &= J_{w_{B_3G_3}} \delta q \\ \delta \theta_{E_1F_1} &= J_{w_{E_1F_1}} \delta q \\ \delta \theta_{F_1G_3} &= J_{w_{F_1G_3}} \delta q \end{aligned} \right. \quad (56)$$

其中, $\delta X_{A_iB_i} (i=1,2,3)$ 、 $\delta X_{B_iC_i} (i=1,2)$ 、 $\delta X_{C_1D_1}$ 、 $\delta X_{B_3G_3}$ 、 $\delta X_{C_2D_1}$ 、 $\delta X_{E_1F_1}$ 、 $\delta X_{F_1G_3}$ 分别为杆件 $A_iB_i (i=1,2,3)$ 、 $B_iC_i (i=1,2)$ 、 C_1D_1 、 B_3G_3 、 C_2D_1 、 E_1F_1 、 F_1G_3 的移动虚位移; $\delta \theta_{B_iC_i} (i=1,2)$ 、 $\delta \theta_{C_1D_1}$ 、 $\delta \theta_{B_3G_3}$ 、 $\delta \theta_{E_1F_1}$ 、 $\delta \theta_{F_1G_3}$ 分别为杆件 $B_iC_i (i=1,2)$ 、 C_1D_1 、 B_3G_3 、 E_1F_1 、 F_1G_3 的角度虚位移。

6.3 驱动力计算实例

该机构杆件长度参数赋值见 3.3 节,各杆件的质量分别为: $m_{A_iB_i}=2.01\text{ kg} (i=1,2,3)$, $m_{B_1C_1}=0.98\text{ kg}$, $m_{C_1D_1}=0.98\text{ kg}$, $m_{B_2C_2}=1.61\text{ kg}$, $m_{C_2D_1}=1.47\text{ kg}$, $m_{R_bR_c}=m_{R_aR_d}=0.48\text{ kg}$, $m_{R_cR_d}=m_{R_aR_b}=0.28\text{ kg}$, $m_{F_1G_3}=1.74\text{ kg}$, $m_{E_1F_1}=1.12\text{ kg}$ 。

各杆件的转动惯量如表 1 所示。

表 1 各杆件的转动惯量参数

Tab.1 Parameters of rotational inertia of each link

	kg·m ²		
构件名称	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
动平台 1	0.294 6	0.301 1	0.034 6
杆件 B_1C_1	0.050 0	0.051 5	0.023 9
杆件 C_1D_1	0.089 2	0.090 9	0.024 1
杆件 B_2C_2	0.131 6	0.140 1	0.079 5
杆件 C_2D_1	0.167 6	0.204 1	0.043 7
杆件 E_1F_1	0.183 3	0.195 5	0.017 4
杆件 B_3G_3	0.043 5	0.056 7	0.020 0

现设定并联机构动平台上末端执行器的运动轨迹和运动规律为匀速连续运动,求解该机构在两种

模式下的驱动力,其基本思路是:首先,根据给定轨迹推导出各自动平台作匀速运动时所需的驱动副运动规律;其次,设定动平台 1、2 分别承受一定负载,基于 Solidworks 计算并导出机构所需施加的仿真驱动力;同时,通过 Matlab 编程,得两模式下驱动力 F 的理论曲线;最后,将仿真曲线与理论曲线进行对比验证。

6.3.1 两种模式下驱动副运动规律的求解

(1) 两平移—转动(2T1R)模式

设定该模式下动平台 1 上末端执行器的运动轨迹由 3 段构成,如图 6 所示。在 0~5 s 内,动平台 1 以速度 4 mm/s 沿 Y 轴运动,完成由点 Q_1 到点 Q_2 的轨迹移动;在 5~10 s 内,动平台 1 以速度 5 mm/s 沿 Z 轴运动,完成由点 Q_2 到点 Q_3 的轨迹移动;在 10~15 s 内,动平台 1 以 $5(^{\circ})/\text{s}$ 绕 Z 轴转动到点 Q_4 停止。

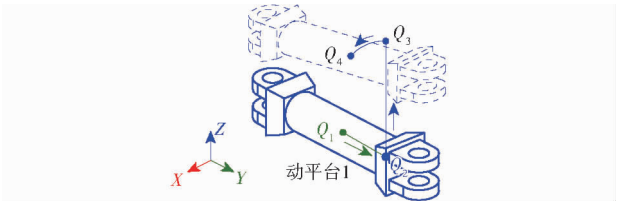


图 6 2T1R 模式下动平台 1 的运动轨迹

Fig. 6 Motion trajectory of moving platform 1 in 2T1R mode

根据这一输出运动规律及位置反解式(28),得到 2T1R 模式下 3 个驱动副的运动规律为

$$S_1 = \begin{cases} 4t & (0 \leq t < 5 \text{ s}) \\ 0 & (5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}) \\ 0 & (10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}) \end{cases} \quad (57)$$

$$S_2 = \begin{cases} 4t & (0 \leq t < 5 \text{ s}) \\ 15.58 + \sqrt{240^2 - (103.14 + 5t)^2} & (5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}) \\ 0 & (10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}) \end{cases} \quad (58)$$

$$S_3 = \begin{cases} 4t & (0 \leq t < 5 \text{ s}) \\ -205.15 + \sqrt{280^2 - 6.12^2 - (183.14 + 5t)^2} & (5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}) \\ 90.51 - 160\sin\left(\frac{\pi(t-10)}{60} + \frac{61.59\pi}{180}\right) & (10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}) \end{cases} \quad (59)$$

(2) 三平移(3T)模式

设定该模式下动平台 2 上末端执行器的运动轨迹由 3 段构成,如图 7 所示。在 0~5 s 内,动平台 2 以速度 4 mm/s 沿着 X 轴运动,完成点 P_1 到点 P_2 的轨迹移动;在 5~10 s 内,动平台 2 以速度 2 mm/s 沿 Y 轴运动,完成点 P_2 到点 P_3 的轨迹移动;在 10~15 s

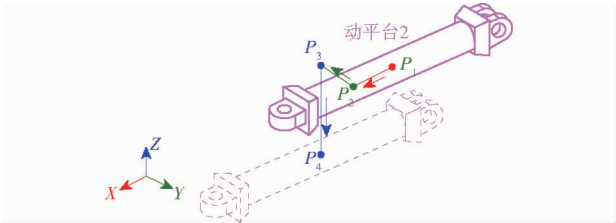


图 7 3T 模式下动平台 2 的运动轨迹

Fig. 7 Motion trajectory of moving platform 2 in 3T mode

内,动平台 2 速度以 5 mm/s 沿 Z 轴运动,完成 P_3 到点 P_4 的轨迹移动。

根据这一运动轨迹规律及 3T 模式的位置反解式(33),得该模式下的 3 个驱动副运动规律为

$$S_1 = \begin{cases} -305.15 + \sqrt{160^2 - (76.11 - 4t)^2} & (0 \leq t < 5 \text{ s}) \\ 2t & (5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}) \\ 0 & (10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}) \end{cases} \quad (60)$$

$$S_2 = \begin{cases} 57.78 + \sqrt{160^2 - (76.11 - 4t)^2} & (0 \leq t < 5 \text{ s}) \\ 2t & (5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}) \\ -3.55 + \sqrt{240^2 - (78.14 + 5t)^2} & (10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}) \end{cases} \quad (61)$$

$$S_3 = \begin{cases} -225.15 + \sqrt{280^2 - 208.14^2 - (4t - 6.11)^2} & (0 \leq t < 5 \text{ s}) \\ 2t & (5 \text{ s} \leq t < 10 \text{ s}) \\ -214.36 + \sqrt{280^2 - (158.14 + 5t)^2 - 22.13^2} & (10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}) \end{cases} \quad (62)$$

6.3.2 两种模式下的驱动力变化曲线的求解

首先,运用 Adams(忽略摩擦时)计算该机构在动平台 1、2 上分别加载 8、10 kg 负载下的仿真曲线;然后,运用 Matlab 计算(忽略摩擦时)该机构在动平台 1、2 上分别加载 8、10 kg 负载下的理论驱动力;最后,得到图 8a、8b 所示的 2T1R 和 3T 模式下的驱动力理论与仿真曲线的比较。

6.3.3 算例结论

从图 8a、8b 可知:①两种模式下的理论与仿真曲线一致,仅存在细微误差(这是由于仿真过程中各个转动杆的转动惯量、移动副的起始值、质心坐标等输入存在误差,致使理论与仿真曲线不完全一致),验证了动力学模型与驱动力方程推导的正确性。②在选取电机时,3 个驱动电机都需要满足上述计算所得的最大驱动力,2T1R 模式下,3 个驱动副所需最大驱动力分别为:386.25、20.00、-386.25 N;而 3T 模式下,3 个驱动副所需最大的

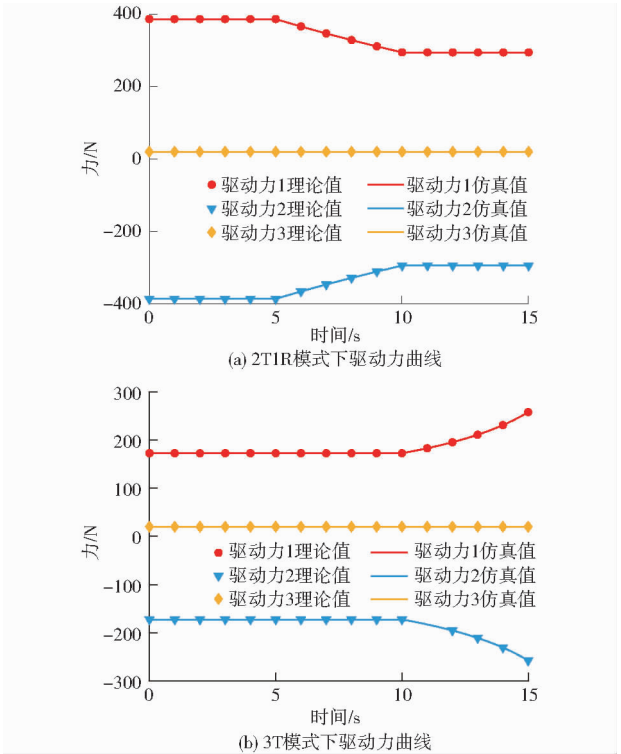


图 8 驱动力理论与仿真曲线

Fig. 8 Curves of driving force

力分别为:172.42、10.10、-172.42 N(正负号代表方向)。可见,2T1R 模式下的最大驱动副力均大于 3T 模式下的最大驱动副力。因此,应选取能产生 2T1R 模式下的最大驱动副力的电机,以满足两种模式下驱动要求。

7 优化设计

7.1 设计变量

分析该并联机构各性能指标可知,尺寸参数 l_1 、 l_3 、 l_5 、 l_6 、 l_7 、 l_8 、 l_9 、 b 的影响最为明显,因此取这些尺寸参数为设计变量。

7.2 目标函数

对于并联机构,在满足设计要求的前提下,通常希望得到最大的工作空间和最优的工作性能。在给定工作空间大小的预估下,划分适当间距,统计网格点数,可计算动平台 1、2 的可达工作空间之和。设 2T1R、3T 机构的工作空间分别为 n_{point1} 、 n_{point2} ,则该机构在两种模式下总工作空间优化的目标函数为

$$V_{\max} = f(x) = n_{point1} + n_{point2} \quad (63)$$

式中 $V_{\max}$ ——两种模式下末端构件可达最大工作空间体积的总和

7.3 约束条件

由 3.3 节的机构结构参数,给出其设计范围: $l_1 \in [105 \text{ mm}, 205 \text{ mm}]$, $l_3 \in [190 \text{ mm}, 290 \text{ mm}]$, $l_5 \in$

$[230\text{ mm}, 330\text{ mm}]$, $l_6 \in [210\text{ mm}, 310\text{ mm}]$, $l_7 \in [110\text{ mm}, 210\text{ mm}]$, $l_8 \in [110\text{ mm}, 210\text{ mm}]$, $l_9 \in [30\text{ mm}, 130\text{ mm}]$, $b \in [115\text{ mm}, 215\text{ mm}]$ 。

差分进化算法可用于解决连续领域的优化问题^[29],具有算法简单易于理解、全局收敛、强鲁棒性以及适应性广的优势。

该算法优化的结果会因定义的参数不同而改变,经不断调试最终确定其优化求解的参数配置如表 2 所示,通过 Matlab 进行编程计算,目标函数收敛过程如图 9 所示,最终得到的优化后的参数尺度如表 3 所示。

表 2 参数设置

Tab.2 Parameter settings

参数	维度	随机数	迭代次数	缩放因子	交叉概率
数值	8	40	100	0.5	0.9

表 3 优化后各参数值

Tab.3 Optimized values of each parameter

mm

参数	l_1	l_3	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	b
优化前值	155	240	280	260	160	160	80	165
优化后值	111.057	271.559	329.37	251.886	174.516	119.432	33.170	164.063

据此,重新对该机构在两种模式下的工作空间进行计算,得到的优化工作空间如图 10 所示。

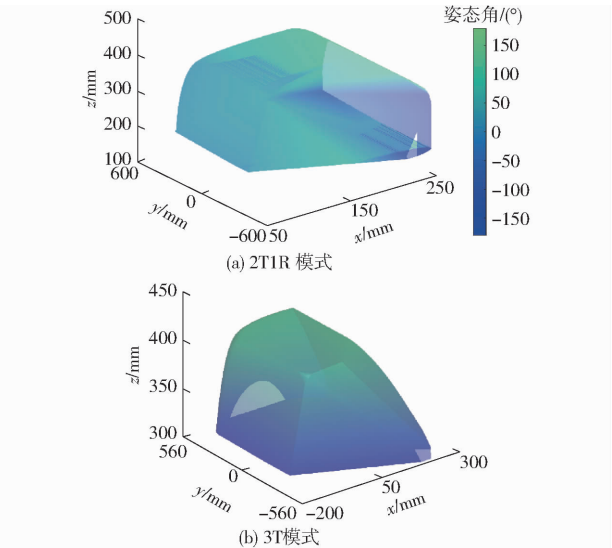


图 10 优化后的机构工作空间

Fig. 10 Optimized workspace of mechanism

对比图 3 与图 4a 所示的原工作空间,优化后的工作空间总和提升了 82.4%。

8 用于激光切割的概念设计

激光切割机多以龙门式激光切割机为主,其加工精度高,同时稳定性也较好,然而其体积较大,价格较高^[30]。本文所设计的具有可轮换用动平台的三自由度并联机构可作为激光切割的主机构,可同

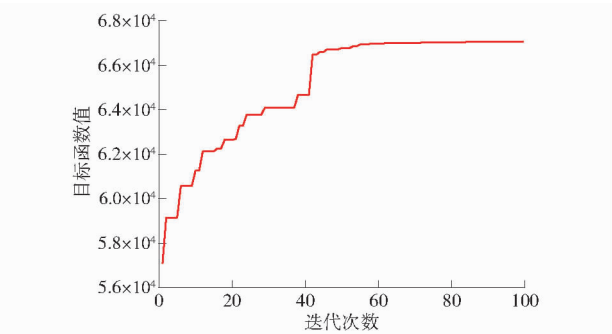


图 9 迭代变化曲线

Fig. 9 Iterative variation curve

时实现板料的调整和切割,简化了现有激光切割机的结构,其概念设计如下。

将优化后的设计参数圆整,得到一组新的机构参数: $l_1 = 110\text{ mm}$, $l_3 = 270\text{ mm}$, $l_5 = 330\text{ mm}$, $l_6 = 250\text{ mm}$, $l_7 = 170\text{ mm}$, $l_8 = 120\text{ mm}$, $l_9 = 30\text{ mm}$, $b = 160\text{ mm}$ 。

时实现板料的调整和切割,简化了现有激光切割机的结构,其概念设计如下。

图 11a 所示为基于可轮换用动平台并联主机构的激光切割机三维概念设计图,图 11b 所示为激光切割场景示意图。该生产线包括进料抓取区、切割

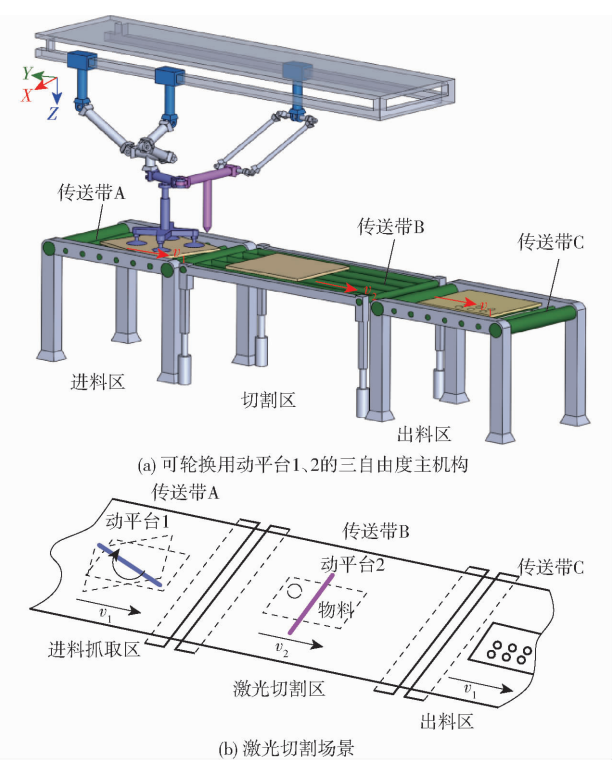


图 11 应用场景示意图

Fig. 11 Schematics of application scenarios

区、出料区；主机机构的 3 个移动副安装在悬置导轨上，其工作原理是：①进料装置的电机带动输送滚轮旋转，通过链条传动，带动传送带 A 区，进而将需要切割的板料以 v_1 的速度送到激光切割区的切割台上。②当板料即将被传动至传送带 B 区前，仅启动 2T1R 机构的输出模式（此时，3T 的输出模式不工作），安装在动平台 1 上的双块磁铁或双个真空吸盘抓取器，在 YOZ 平面上作 2T 运动至合适位置后，拾取抓住板料并绕 Z 轴调整姿态（1R），便于下一阶段的精确、节材切割。③当板料以 v_2 的速度匀速传送到传送带 B 区，启动 3T 机构的输出模式（此时，2T1R 的输出模式不再工作）安装在动平台 2 上的激光切割器，在 O-XYZ 空间内作 3T 运动实现三维移动切割。

切割过程中产生的熔融废料借助与光束同轴的高速气流吹除；切割完成的板料由传送带 C 再以 v_1 的速度传出，完成一个循环。

当 3 个移动滑块 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 差速运动时便连续完成上述两种运动模式的联合有序操作，从而完成预期板料的精确切割；而当 3 个移动副同速同向运动时，可进行大范围的操作。整个切割过程实现了连续作业，大大提升了生产效率。

9 结束语

（1）以一种三自由度并联机构为例，阐述可轮换用动平台的并联机构（AMP-PM）的概念与设计。该类机构通过轮换使用动平台实现了同一工作流程不同阶段的两平移—转动（2T1R）和三平移（3T）两种不同模式输出运动，并对两种模式下该机构的运动学和动力学进行全面分析。

（2）无论哪一种模式，该机构具有符号式位置正反解，且具有运动解耦性，这些特性有利于对机构进行实时控制和运动轨迹规划，该机构的速度、加速度运动曲线变化连续且平稳。

（3）根据基于虚功原理的序单开链法建立的逆向动力学建模，求得的机构驱动力变化曲线变化平稳、无突变。

（4）利用差分进化算法以工作空间为目标函数，对机构的结构尺寸进行优化设计，得到了较优的机构尺寸参数，提升了机构的工作空间性能。

（5）给出了该主机机构作为激光切割机使用场景的概念设计，可完成 2T1R 模式下的抓取调整板料和 3T 模式下的三维激光切割，有序实现了“一机两用”，大大简化、节省了激光切割机的设备结构，降低了制造与生产成本。

参 考 文 献

[1] KONG X W, GOSSELIN C, RICHARD P L. Type synthesis of parallel mechanisms with m-ultiple operatio modes[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(6): 595 – 601.

[2] WOHLHART K. Advances in robot kinematics[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1996.

[3] 王东宝, 张静, 吴娟, 等. 含四杆机构单元的重载转运机器人构型综合[J]. 机械设计与制造, 2023, 384(2): 299 – 304.

WANG Dongbao, ZHANG Jing, WU Juan, et al. Configuration synthesis of heavy-duty transfer robot with four-bar mechanism unit[J]. Machinery Design & Manufacture, 2023, 384(2): 299 – 304.

[4] 杨名. 空间桁架式可展开变胞抓捕机械手设计与分析研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2024.

YANG Ming. Design and analysis of space truss deployable metamorphic capture manipulator[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2024. (in Chinese)

[5] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983, 105(4): 705 – 712.

[6] KONG X W, COSSELIN C M. Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain[J]. Journal of Mechanical Design, 2005, 127(6): 1113 – 1121.

[7] LIU X J, WANG J S, WU C, et al. A new family of spatial 3-DOF parallel manipulators with two translational and one rotational DOFs[J]. Robotica, 2009, 27(2): 241 – 247.

[8] 刘艳敏. 几类少自由度冗余驱动并联机构综合及优选研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2016.

LIU Yanmin. Synthesis and optimization of several types of redundant drive parallel mechanism with few degrees of freedom [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2016. (in Chinese)

[9] LI Y, ZHANG Y, ZHANG L. A new method for type synthesis of 2R1T and 2T1R 3-DOF redundant actuated parallel mechanisms with closed loop units[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2020, 33(6): 144 – 167.

[10] 沈惠平, 朱晨阳, 李菊, 等. 零耦合度部分运动解耦 2T1R 并联机构拓扑与性能研究[J]. 农业机械学报, 2023, 54(2): 419 – 429, 440.

SHEN Huiping, ZHU Chenyang, LI Ju, et al. Topology and performance of zero-coupling partially kinematic decoupled 2T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(2): 419 – 429, 440. (in Chinese)

[11] CLAVEL R A. Fast robot with parallel geometry[C] // Proc. Int. Symposium on Industrial Robots. Sydney, 1988: 91 – 100.

[12] HERVE J M, SPARACINO F. Structural synthesis of parallel robot generating spatial translation[C] // International Conference on Advanced Robotics, 1991: 808 – 813.

[13] MACHO E, URIZAR M, PETUYA V, et al. Designing a translation parallel mechanisms based on constraint singularity loci joint [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, 14(4): 041010.

[14] XIE G, ZHANG Z, SHAO Z, et al. Research on the orientation error of the translational cable-driven parallel robots[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2022, 14(3): 031003.

[15] 孔一啸, 田宝俊, 李瑞琴. 基于 2-CPR/UPS 三平移并联机构的移印机运动学分析[J]. 包装工程, 2021, 42(3): 207 – 213.

KONG Yixiao, TIAN Baojun, LI Ruiqin. Kinematics analysis of pad printing machine based on 2-CPR/UPS three-translation parallel mechanism[J]. Packaging Engineering, 2021, 42(3): 207 – 213. (in Chinese)

[16] VU D S, BARNETT E, GOSSELIN C. Experimental validation of a three degree-of-freedom cable-suspended parallel robot for spatial translation with constant orientation[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 11(2): 024502.

[17] BRIOT S, BONEV I A. Pantopteron: a new fully decoupled 3-DOF translational parallel robot for pick-and-place applications [J]. Mechanisms Robotics, 2009, 1(2): 021001.

[18] ZLATANOV D, BONEV I A, GOSSELIN C M. Constraint singularities as C-space singularities[M]. Advances in Robot Kinematics, 2002.

[19] 刘伟, 刘宏昭. 具有 3T、2T1R 和 2R1T 模式的并联机构构型综合[J]. 农业机械学报, 2019, 50(12): 411 – 419.

LIU Wei, LIU Hongzhao. Synthesis of parallel mechanism with 3T, 2T1R and 2R1T motion modes[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(12): 411 – 419. (in Chinese)

[20] KONG X W. Type synthesis of 3-DOF parallel manipulators with both a planar operation mode and a spatial translational operation mode[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5: 041015.

[21] YE W, FANG Y F, GUO S, et al. Two classes of reconfigurable parallel mechanisms constructed with multi-diamond kinematotropic chain[J]. Journal of Mechanical Engineering Science, 2016, 230(18): 3319 – 3330.

[22] 沈惠平, 朱潇, 李菊, 等. 基于轮换用动平台的运动解耦的激光切割装置: 2024112255876[P]. 2024 – 09 – 03.

[23] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[24] 沈惠平, 李菊, 朱小蓉, 等. 基于最优路径的并联机构自由度计算方法及其新公式[J]. 机械工程学报, 2024, 60(19): 42 – 50.

SHEN Huiping, LI Ju, ZHU Xiaorong, et al. New method and formula for degree-of-freedom calculation of parallel mechanism based on optimal paths[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(19): 42 – 50. (in Chinese)

[25] 沈惠平, 李菊, 吴广磊, 等. 并联机器人机构的拓扑结构优化[M]. 北京: 高等教育出版社, 2025.

[26] 沈惠平. 并联机器人机构拓扑分析—方法与技巧及应用[M]. 南京: 江苏凤凰教育出版社, 2025.

[27] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[28] 杨廷力. 机械系统基本理论: 结构学 · 运动学 · 动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1996.

[29] 车林仙, 程志红, 何兵. 4-PRUR 并联机构及其位置分析的差分进化算法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(23): 36 – 44.

CHE Linxian, CHENG Zhihong, HE Bing. 4-PRUR parallel mechanism and its displacement analysis based on differential evolution algorithm[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(23): 36 – 44. (in Chinese)

[30] 吴桂勇, 唐昌悟, 解玄. 激光加工技术在模具制造中的应用与展望[J]. 模具工业, 2024, 50(5): 1 – 5.

WU Guiyong, TANG Changwu, XIE Xuan. Application and prospect of laser machining technology in die and mould manufacturing[J]. Die & Mould Industry, 2024, 50(5): 1 – 5. (in Chinese)