

仿生锥形触土部件水平阻力研究

王颖¹ 李建桥¹ 邹猛¹ 黄晗¹ 薛龙^{1,2}

(1. 吉林大学工程仿生教育部重点实验室, 长春 130025; 2. 华中科技大学机电工程学院, 南昌 330045)

摘要: 为提高松软地面步行机构及农业机械的通过性能,以中华绒螯蟹步足的指节结构为生物原型,加工3种不同锥度的仿生锥形触土部件,并将圆柱触土部件作为对比试样。通过触土部件在干沙中的水平阻力测试,分析了速度、入土深度和锥角3种因素对触土部件土壤阻力的影响。研究发现,水平阻力随触土部件入土深度和锥角的增加而显著增大,呈2次方关系,水平阻力随锥角增大最多可提高167.57%;速度小幅线性增大时,速度的增加使水平阻力最多增大11.37%,仿生锥形试样比圆柱试样具有更高的推进效率。结合试验结果和ALBERT提出的圆柱杆土壤阻力估计式,建立了用于预测等截面触土部件与变截面触土部件土壤阻力的计算式,并将计算值与试验值进行对比分析。结果表明,二者残差低于3.62 N,平均相对误差小于22.77%,具有较高的准确性。

关键词: 仿生; 触土部件; 变截面; 阻力模型

中图分类号: TB17; Q811.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2016)S0-0124-06

Research on Drag Force for Bionic Cone Soil Contact Part

Wang Ying¹ Li Jianqiao¹ Zou Meng¹ Huang Han¹ Xue Long^{1,2}

(1. Key Laboratory of Bionic Engineering, Ministry of Education, Jilin University, Changchun 130025, China

2. School of Mechatronics and Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330045, China)

Abstract: Vehicles and agricultural machinery are often trapped caused by slipping and sinkage when working on soft terrain. Therefore, a superior propulsive performance is significant for the vehicle. By observation of the dactylopodites of Chinese mitten crab, three bionic soil contact parts with different cone angles were fabricated. The article focused on the drag force in the horizontal movement of soil contact parts, which were compared with cylinder sample. Experiments of walking foot were carried out in soil-bin filled with fine quartz sand. The influence of motion velocity, insertion depth and cone angle to the drag force were analyzed. Results showed the drag force was increased with the square of insertion depth and the cone angle of soil contact part. When the cone angle of bionic walking foot was doubled and trebled, the drag forces were increased by 47.18% to 167.57%. And the drag force was linearly correlated with motion velocity. In the scope of velocity of experiments, the drag force was increased by 11.37% at most with the increasing velocity. A model for predicting the drag force of walking foot was created based on the estimating formula proposed by ALBERT, and was combined with the experimental results. The verification of the model showed that the residual was not higher than 3.62 N and the average relative error between the model calculation values and experimental data was lower than 22.77%. Thus the model can be used for both variable section and equal section soil contract part, and it was accurate enough in the prediction of the drag force. The research results provided theoretical basis for predicting the performance of propulsion of the soil contact part and the development of legged mechanisms on soft terrain.

Key words: bionic; soil contact part; variable section; drag force model

收稿日期: 2016-07-20 修回日期: 2016-08-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(51375199)

作者简介: 王颖(1982—),女,博士生,主要从事地面机械仿生技术研究,E-mail: wang_ying13@mails.jlu.edu.cn

通信作者: 李建桥(1953—),男,教授,博士生导师,主要从事地面机器系统及其仿生研究,E-mail: jqli@jlu.edu.cn

引言

随着农业机械的发展和地面机械触土部件的研究深入,松软地面的通过性一直是阻碍车辆及农业机械发展的重要问题^[1-2]。车辆在松软地面上的土壤阻力主要包括压实阻力、推土阻力等^[3-4]。车轮下的介质流失加剧了车轮的沉陷,并增大了推土阻力,使挂钩牵引力减小。对于腿式机器人(行走机构),沉陷则具有不同的意义。腿部插入介质中向后摆动时产生的推土阻力为行走机构提供前进的动力,土壤阻力越大,步行机构的推进性能越好。入土深度对推土阻力有正面影响,因此适当的沉陷深度有利于增加腿式行走机构的牵引力。从运动机理的角度,腿式行走机构只“沉”不“陷”的特点使其比轮式车辆更适于在松软地面运动。

不同于轮-壤相互作用系统已有成熟的理论和计算模型^[5-6],腿式步行机构与土壤作用关系尚未形成可以广泛应用的计算方法。为研究触土部件在介质中受到的作用力,多数研究者选择圆柱杆在松散颗粒介质中的运动为研究对象^[7-9]。如COPPERSMITH等^[10]提出了“ q 模型”,用于计算圆珠颗粒间作用力的分布变化,ALBERT等^[11]探讨了竖直圆柱杆在均匀粒径玻璃球中慢速运动时的受力及影响因素;CHEHATA等^[9]捕捉了深埋于玻璃颗粒中的圆柱杆运动时引发的颗粒流;在此基础上,BRIAN等^[12]进一步研究了不同截面形状和尺寸的等径杆件在模拟月壤中的水平运动,并分析其影响因素。HETTIARATCHI等^[13]、GODWIN等^[14]、ALBERT等^[11]陆续提出预测腿-壤作用力的数学模型。但是,大多数研究使用颗粒直径无变化的理想介质(玻璃珠等),且研究中多采用等径的触土部件,缺少对变截面触土部件与土壤作用力的说明。许多问题被简单化,使有些公式在现实条件下不具有普适性。

中华绒螯蟹(*Eriocheir sinensis*)生活在泥沼、湿地等松软环境,行走特点鲜明,运动敏捷不受困,引起许多研究者的关注^[15-17],成为优良的仿生学样本。在以往的工作中,作者设计了几种仿生步行足,比较了入土、出土性能及推进性能,并初步讨论了含水率、深度等对推进性能的影响程度,但未进行深入的量化及相对关系研究。本文以基于中华绒螯蟹步足的指节结构设计的仿生锥形触土部件为对象,并与圆柱杆做比较;对触土部件在土槽中进行试验,测量其水平运动时受到的土壤阻力,探究运动速度、入土深度和锥角对水平阻力的影响及相互关系,结合试验结果与ALBERT提出的土壤阻力估算式,提出

变截面和等截面触土部件水平阻力的计算方法。为预测和评估松软地面触土部件的推进性能提供方法,为触土部件的选型和设计提供依据。

1 锥形触土部件水平阻力试验

1.1 仿生触土部件

通过对中华绒螯蟹的动力学研究和生物学分析^[15-16],发现第2对和第3对步足对螃蟹的运动能力起重要作用。指节位于步足末端,为直接接触土部件,其形态结构对螃蟹在松软地面的通过能力有重要意义。通过SEM观察,中华绒螯蟹指节为弧形变截面形状,表面分布深浅不一的沟纹,截面近似扁圆形(图1)。运用逆向工程技术,对指节结构进行3D扫描,得到点云图(图2)。提取变截面和沟纹结构尺寸,经过工程化与圆整化处理,设计出仿生锥形触土部件。从原理性试验角度出发,忽略生物原型的弧形轮廓。作者已完成的试验研究表明^[17],仿生结构(变截面、沟纹等)能大幅减小触土部件的入土力与出土力,有效提高运动效率。触土部件为锥形变截面,受加工条件限制,表面有4条沟纹;结合原型提取沟弧线与试样外廓尺寸,进行圆整过渡处理得到工程模型,图3a为仿生锥形试样(锥角为 9.3°)与圆柱试样的结构示意图。为了比较锥角对水平阻力的影响,试验设计并加工了3种不同锥角的仿生锥形触土部件,1种圆柱形触土部件,用于试验对比,如图3b所示。表1列出各试样参数,所有试样长度均为 $L=68.5\text{ mm}$ 。

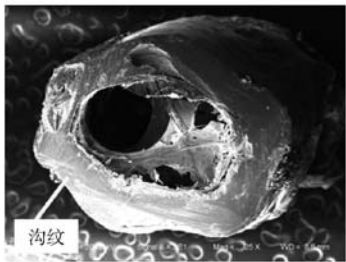


图1 中华绒螯蟹指节截面

Fig.1 Cross section of dactylopodite of Chinese mitten crab



图2 3D扫描点云

Fig.2 3D scanning point cloud

1.2 试样装置与方法

包括步行足在内的多种触土部件在运动或工作过程中与土壤平面的夹角都是变化的,但这种因素在试验中不易控制。因此本研究忽略角度变化,测量和分析触土部件垂直于土壤平面运动时的阻力。

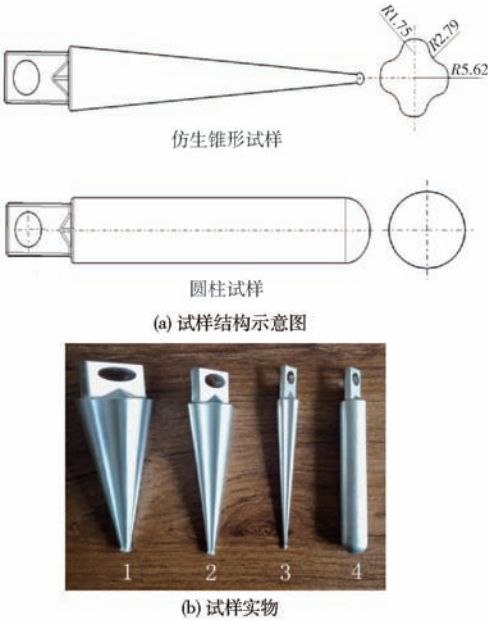


图 3 试验试样
Fig. 3 Samples for experiments

表 1 试样参数
Tab. 1 Parameters of samples

试样号	形状	锥角/(°)	最大直径/mm
1	圆锥	27.6	33.6
2	圆锥	18.6	22.4
3	圆锥	9.3	11.2
4	圆柱	0	11.2

试验在长 500 mm,宽 250 mm,高 300 mm 的土槽中进行。试验设备主要包括:万能试验机(QT-1186 型,东莞)、土槽和试样。图 4 为试验装置原理图,将试样用夹具固定并按设计深度插入被试土壤中,当试验机向上牵引钢丝绳时,试样沿滑轨水平运动。测量牵引试样运动时的拖曳力即为土壤水平阻力。被试土壤选用干石英砂,含水率小于 1%,粒径分布范围为 0.16~0.2 mm。借助粒度分析仪(BT-1600 型,丹东)观察,石英砂颗粒形状不规则,棱角较少。用环刀法测量土壤容重为(1.22±0.03) g/cm³。运用三轴剪力仪(SLB-1 型,南京)测得被试土壤的内聚力为零,内摩擦角为 30°。

测量不装夹试样时横梁沿滑轨运动所需的拉力,即为装置的固有阻力,应去除。运动开始时产生的加速度使杆的受力持续增加,直至平稳;当到达土槽末端时,边界效应导致阻力再次增大,因此,数据采集时,将前后两段去除,保留平稳段的数据。每次试验后充分翻松土槽内石英砂,并用刮土板刮平表面,保证土壤硬度误差不超过 10%。每组试验进行多次重复以确保得到至少 3 个相近的测量值,取几个测量值的平均值。为了充分考察速度对水平阻力的影响,减少摩擦力的干扰,本试验采用比以往其他

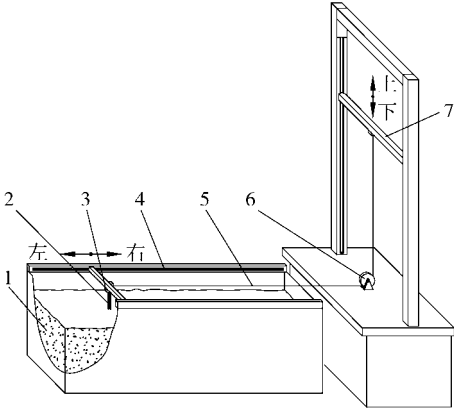


图 4 试验装置原理图
Fig. 4 Schematic drawings of testing apparatus
1. 土槽 2. 试样 3. 夹具 4. 滑轨 5. 钢丝绳 6. 定滑轮
7. 移动横梁

研究更小的运动速度,控制在 10~50 mm/min。考虑试样尺寸,入土深度设定在 20~60 mm 之间。试验因素水平如表 2。

表 2 试验因素水平
Tab. 2 Factors and levels

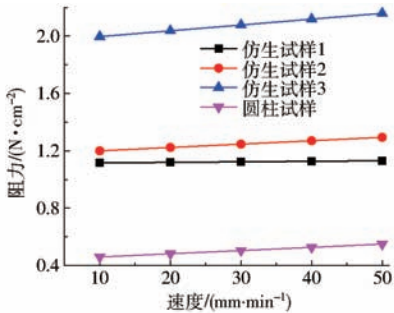
水平	因素		
	速度/(mm·min ⁻¹)	深度/mm	锥角/(°)
1	10	20	27.6
2	20	30	18.6
3	30	40	9.3
4	40	50	0
5	50	60	

2 结果与讨论

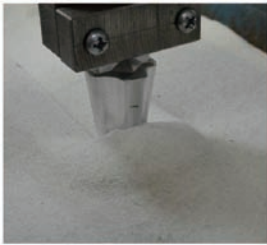
2.1 速度对水平阻力的影响

在以往的研究中,关于速度对水平阻力的影响存在争议。有学者观察到触土部件受到土壤阻力随运动速度增大而增大^[18-19],亦有研究认为土壤阻力不依赖速度^[11],速度的增加只是增大了运动杆与颗粒介质间的摩擦力,从而造成土壤阻力增大的假象。为降低对摩擦因数的影响,本试验将速度控制在较小的范围内。图 5a 为本试验中入土深度为 50 mm 时,水平阻力相对于速度的变化曲线。数据表明,入土深度相同时,在 10~50 mm/min 的速度范围内,触土部件受到的阻力随速度增大呈线性上升趋势,但所有试样的水平阻力增长幅度较小。其中,试样 3 的水平阻力对速度的变化最敏感, $v=50$ mm/min 时的土壤阻力比 $v=10$ mm/min 时可增大 11.37%;试样 1 的阻力随速度变化不明显。因此,本试验条件下,触土部件运动速度对水平阻力的变化有较弱的影响。图中还显示,运动速度相同时,仿生锥形触土部件单位截面积的水平阻力高于圆柱触土部件。

故当仿生触土部件作为步行足时,具备较高的推进效率,即在相同截面积的条件下,锥形触土部件有较强的推进能力。



(a) 速度对水平阻力的影响



(b) 壅土现象

图5 速度对水平阻力的影响

Fig.5 Relationship between drag force and velocity

另一方面,触土部件在土壤中水平推动时,前方产生壅土(图5b)。当试样在相同入土深度运动至相同位移时,运动速度越快,前方产生的壅土越多,对试样的阻力也越大,导致土壤阻力增加。

2.2 入土深度对水平阻力的影响

深度是土壤阻力变化的显著影响因素。在ALBERT的研究中,严格区分介质的形状。对于圆柱触土部件,在圆形颗粒均匀介质中的运动土壤阻力与入土深度的平方成正比;而在非圆形颗粒介质中,土壤阻力则与深度的2.5次方成正比^[11]。然而,这种理想化的条件对现实的试验指导意义并不大。本试验选用的石英砂颗粒在一定的范围内存在粒径差异,且形状不规则。

触土部件插入土壤中的截面积尺寸对水平阻力有直接影响。深度改变将导致触土部件有效入土直径的变化,进而对水平阻力产生双重影响。所以,为分析水平阻力与深度的关系,需去除直径变化对水平阻力的影响,即消除变量 d_m (d_m 为触土部件插入土壤部分的最大直径)。因此本文通过考察拖曳力与触土部件入土部分直径的比值(F/d_m)随入土深度的变化评价入土深度对水平阻力的影响。图6为运动速度为50 mm/min时,水平阻力随深度变化的曲线。通过对试验数据进行拟合分析,仿生试样与圆柱试样的水平阻力均与入土深度的2次方成正比,拟合决定系数 R^2 分别为0.976、0.985、0.933、0.977,拟合度较高。由图可以看出,设定深度范围

内,深度到达60 mm时的水平阻力比20 mm时平均增大449.09%,其中圆柱试样的水平阻力增长效率较高。不同直径尺寸的触土部件在相同深度的拖曳力存在差异。对于仿生锥形试样,消除直径影响后的水平阻力大于圆柱试样,差值范围为14.14%~506.06%,入土深度越大,试样间差距越小,主要是由试样入土部分尺寸变化引起的。当深度超过50 mm时,仿生试样1的最大入土截面直径大于圆柱试样,但其拖曳阻力高于圆柱试样,表明仿生试样具有较好的推进能力。

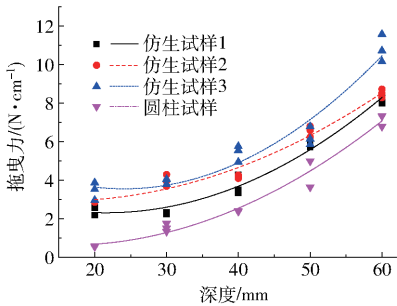


图6 入土深度对水平阻力的影响

Fig.6 Effect of insert depth on drag force

2.3 锥角对水平阻力的影响

锥形触土部件的锥角 θ 体现了触土部件与土壤间作用力方向与受力面积,锥角越大,土壤对触土部件的推进力越大。图7是速度 $v=40$ mm/min时,不同锥角的仿生触土部件水平阻力的变化曲线。当增大仿生足锥角时,土壤阻力随之增大,试样2与试样3在深度60 mm时的土壤阻力比试样1分别增大55.37%和167.57%;深度为20 mm时,试样2与试样3的土壤阻力则比试样1分别增大47.18%、92.44%,因此触土部件入土深度较小时,土壤阻力增长较小,入土深度越大,土壤阻力增长趋势越明显。主要是因为浅土层沙的流动性大而粘滞力小,对触土部件的阻力小;当深度增加,粘滞力与摩擦力增大,同时,锥角较大时,触土部件受力面积显著增加,从而产生较大的土壤阻力变化。对数据的拟合结果表明,水平阻力与触土部件锥角的变化呈2次方增大,拟合决定系数 R^2 均大于0.91。

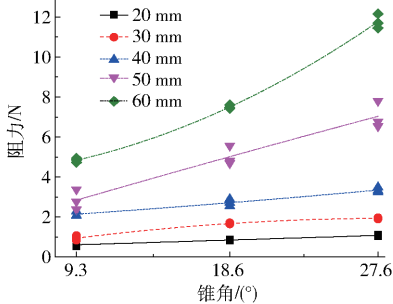


图7 锥角对水平阻力的影响

Fig.7 Effect of cone angle on drag force

3 土壤阻力模型

3.1 模型建立

腿式步行机构的牵引力主要受土壤阻力的影响。当触土部件插入土中并摆动时,触土部件后侧土壤形成被动土压力,该压力对触土部件的反力即为推动机构前进的土壤阻力。土壤阻力越大,对步行机构的推进力越大。在试验中,拖曳触土部件在设计深度匀速向前运动,测量触土部件受到前方土壤的阻力即视为水平阻力。

ALBERT 等^[11]在以玻璃球为介质的试验研究中认为,圆柱杆在垂直于土面沿圆周转动时,平均拖曳力主要与入土深度、杆的直径有关,与运动速度和颗粒尺寸无关,表示为

$$F_d = \eta g \rho H^2 d_c \tag{1}$$

其中 $\eta = A \sqrt{32 \pi^2 / (27 e^2)}$
式中 H ——入土深度 d_c ——杆的直径
 ρ ——颗粒密度 g ——重力加速度
 η ——土壤相关系数
 A ——由介质颗粒的表面属性、几何形态、填充状态等决定的常量

虽然目前的研究关于速度对水平阻力的影响观点不一,但本文土槽试验的结果显示,在试验条件下,水平阻力随触土部件运动速度的增大呈线性小幅增加。与圆柱触土部件不同,锥形触土部件具有变截面特点。插入土壤的直径为随深度变化的变量,且直径的变化率与触土部件的锥角有关。试验

结果也表明,水平阻力随锥角的增大呈 2 次方增大。因此考虑速度和锥角的影响,引入参数 v 和 θ 。在 ALBERT 主要考量深度因素的计算式基础上,加上与速度的线性关系和与锥角的非线性关系,建立用于估算锥形触土部件和圆柱触土部件水平阻力的数学模型,即

$$F = e_0 \rho g (dH^2 + v + \theta^2) \tag{2}$$

式中 θ ——锥角,对于圆柱足, $\theta = 0 \text{ rad}$
 e_0 ——待定系数,是与土壤颗粒形态有关的参数
 v ——运动速度
 d ——触土部件的最大直径

所以在相同的试验条件下,水平阻力的变化只与入土深度、运动速度和触土部件的锥角相关。由此,式(2)既适合计算锥形触土部件水平阻力,又可用于圆柱触土部件水平阻力的估算。

3.2 实测值与计算值对比

为判断模型(式(2))的有效性和准确性,将运用模型计算的水平阻力与水平阻力测试值进行对比分析。图 8 为 $v = 20 \text{ mm/min}$ 条件下按照式(2)绘出的 4 种试样的水平阻力曲线与实测值的比较结果。可以看出,在试验条件下,4 种试样的实测值与预测值的拟合度较好,经过计算,触土部件实测值与模型预测值的残差和误差范围如表 3。阻力残差为 $0.03 \sim 3.62 \text{ N}$,相对误差范围为 $1.14\% \sim 37.94\%$,相对误差均值低于 22.77% 。深度较小时,数值吻合度较高,在 60 mm 深度时,误差略大。结果表明,

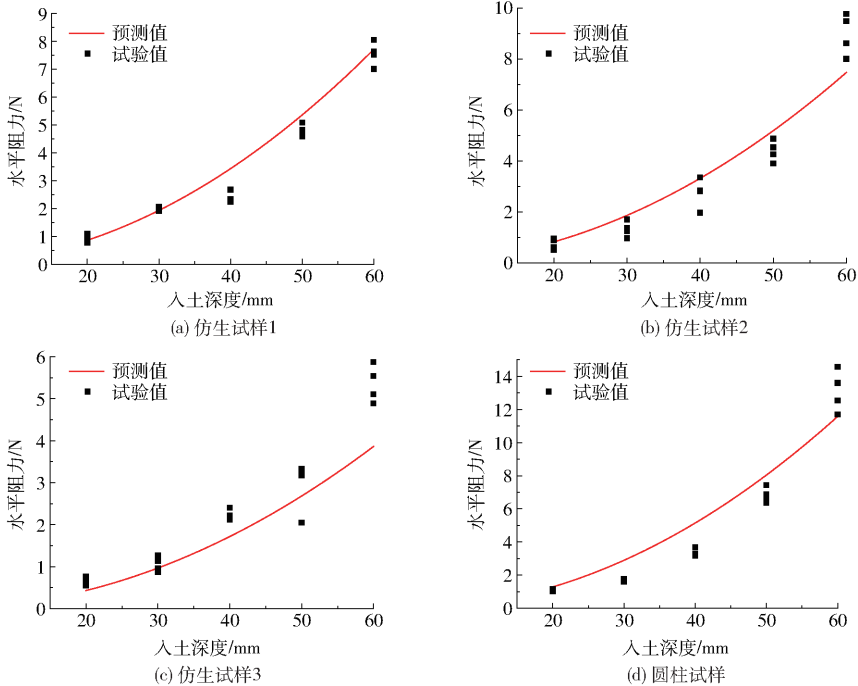


图 8 模型预测值与实测值结果对比

Fig.8 Comparison of test value and predicted value

式(2)能够较准确地预测锥形触土部件和圆柱触土部件在干沙中的水平阻力,进而评估触土部件的推进能力,具有一定的适用性。

表 3 水平阻力预测模型计算误差

Tab.3 Calculation error of drag force model			
试样	残差范围/N	相对误差/%	相对误差均值/%
仿生试样 1	0.03 ~ 1.42	6.49 ~ 35.94	16.13
仿生试样 2	0.08 ~ 1.31	1.14 ~ 36.77	14.42
仿生试样 3	0.19 ~ 2.05	2.59 ~ 32.19	15.93
圆柱试样	0.11 ~ 3.62	4.02 ~ 37.94	22.77

综上所述可知,松软地面行走机构的触土部件推进能力可通过运动及尺寸参数推断,反之,亦可根据运动条件和环境特点通过相关参数选择和设计触土部件的型式与尺寸。

4 结论

- (1)在试验条件下,触土部件在土壤中运动受到的水平阻力随速度增加而小幅线性增加,在设定速度范围内,阻力最大可增长 11.37%。
- (2)水平阻力的增大与入土深度的 2 次方成正比,在试验深度范围内,阻力平均可增大 449.09%,仿生试样具有较好的推进能力。
- (3)圆锥仿生触土部件水平阻力随锥角增大呈 2 次方非线性增长,当锥角增大至 2 倍和 3 倍时,水平阻力最多提高 55.37% 和 167.57%。
- (4)结合土槽试验结果与 ALBERT 总结的土壤阻力估算式,引入速度和锥角因素,建立适用于锥形变截面和圆柱触土部件的水平阻力预测模型,能够用于预测和评估触土部件在松软地面的推进能力。

参 考 文 献

1 任露泉. 地面机械脱附减阻仿生研究进展[J]. 中国科学: E 辑, 2008, 38(9): 1353 - 1364.
REN Luquan. Progress in the bionic study on anti-adhesion and resistance reduction of terrain machines[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2008, 38(9): 1353 - 1364. (in Chinese)

2 李建桥, 黄晗, 王颖, 等. 松软地面机器系统研究进展[J]. 农业机械学报, 2015, 46(5): 306 - 320.
LI Jianqiao, HUANG Han, WANG Ying, et al. Development on research of soft-terrain machine systems[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(5): 306 - 320. (in Chinese)

3 金大玮, 李建桥, 党兆龙, 等. 滑转条件下月球车轮沉陷模型研究[J]. 航空学报, 2013, 34(5): 1215 - 1221.
JIN Dawei, LI Jianqiao, DANG Zhaolong, et al. Study on model for sinkage of lunar rover wheel under the condition of slip[J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2013, 34(5): 1215 - 1221. (in Chinese)

4 唐正义, 吕振华, 赵建新, 等. 月球车驱动轮在模拟月壤上的沉陷特性实验分析[J]. 航天器环境工程, 2012, 29(1): 38 - 41.
TANG Zhengyi, LÜ Zhenhua, ZHAO Jianxin, et al. Analysis of sinkage of rigid driving wheel rolling on simulant lunar soil[J]. Spacecraft Environment Engineering, 2012, 29(1): 38 - 41. (in Chinese)

5 黄晗, 李建桥, 吴宝广, 等. 轻载荷条件下轻型车辆车轮牵引通过性模型的建立与验证[J]. 农业工程学报, 2015, 31(12): 64 - 70.
HUANG Han, LI Jianqiao, WU Baoguang, et al. Construction and verification of lightweight vehicle wheel tractive trafficability model under light load[J]. Transactions of the CSAE, 2015, 31(12): 64 - 70. (in Chinese)

6 WONG J Y. Theory of ground vehicles[M]. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.

7 SEGUIN A, BERTHO Y, MARTINEZ F, et al. Experimental velocity fields and forces for a cylinder penetrating into a granular medium[J]. Physical Review E, 2013, 87(1): 1 - 10.

8 FRANÇOIS Guillard, YOËL Forterre, OLIVIERI Pouliquen. Lift forces in granular media[J]. Physics of Fluids, 2014, 26(1): 1 - 16.

9 CHEHATA D, ZENITR. Dense granular flow around an immersed cylinder[J]. Physics of Fluids, 2003, 15(6): 1622 - 1631.

10 COPPERSMITH S N, LIU C, MAJUMDAR S, et al. Model for force fluctuations in bead packs[J]. Physical Review E, 1996, 53(5): 4673 - 4685.

11 ALBERT R, PFEIFER M A, BARABÁSI A L, et al. Slow drag in a granular medium[J]. Physics Review Letters, 1999, 82(1): 205 - 208.

12 BRIAN Y, CHAKRAVARTHINI M S, MICHEL V W. Walking planetary rovers-experimental analysis and modeling of leg thrust in loose granular soils[J]. Journal of Terramechanics, 2013, 50(2): 107 - 120.

13 HETTIARATCHI D R P, REECE A R. Symmetrical three-dimensional soil failure[J]. Journal of Terramechanics, 1967, 4(3): 45 - 67.

14 GODWIN R J, SPOOR G. Soil failure with narrow tines[J]. Journal of Agricultural Engineering Research, 1977, 22(3): 213 - 228.

15 李建桥, 张晓冬, 邹猛, 等. 中华绒螯蟹平面运动三维观测和步态分析[J]. 农业机械学报, 2012, 43(增刊): 335 - 338.
LI Jianqiao, ZHANG Xiaodong, ZOU Meng, et al. 3-D surveying and gaits analysis of Chinese mitten crab in smooth road[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43 (Supp.): 335 - 338. (in Chinese)

16 LI Jianqiao, ZHANG Xiaodong, ZOU Meng, et al. An experimental study on the gait patterns and kinematics of Chinese mitten crabs[J]. Journal of Bionic Engineering, 2013, 10(3): 305 - 315.

17 王颖, 李建桥, 张广权, 等. 仿生步行足沙地力学性能研究[J]. 农业机械学报, 2016, 47(2): 384 - 389.
WANG Ying, LI Jianqiao, ZHANG Guangquan, et al. Mechanical characteristics of bionic walking foot on soft sand[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(2): 384 - 389. (in Chinese)

18 WIEGHARDT K. Experiments in granular flow[J]. Annual Review of Fluid Mechanics, 1975, 7(1): 89 - 114.

19 TARDOS G I, KHAN M I, SCHAEFFER D G. Forces on a slowly rotating, rough cylinder in a couette device containing a dry, frictional powder[J]. Physics of Fluids, 1998, 10(2): 335 - 341.