基于 Frenet 标架的涡旋始端型线重构与几何特性分析*

刘　涛[1]　邬再新[2]　芮执元[1]

(1. 兰州理工大学数字制造技术与应用省部共建教育部重点实验室，兰州 730050；
2. 兰州理工大学机电工程学院，兰州 730050)

【摘要】 针对当前型线研究中尚未建立表征修正型线和主体型线固有特性统一模型的问题，建立了基于 Frenet 标架曲率半径函数的涡旋型线通用方程，分别采用零次曲线和一次曲线对涡旋始端型线进行重构。定量分析了型线参数对涡旋始端齿厚的影响，构建了基于母线曲率半径函数方程的涡旋压缩腔面积几何模型，研究了曲率半径函数参数对面积特性的影响。结果表明：以曲率半径函数构成涡旋母线的连续性方程，在设计阶段即能得到完全啮合型线和完整涡旋齿廓，无需再进行齿端修正；一次曲线重构较大的设计自由度可以使其兼顾涡旋端部齿厚和内容积比要求，获得较零次曲线重构综合性能更为优越的涡旋齿。

关键词：涡旋型线　曲率半径　Frenet 标架　重构　几何特性

中图分类号：TH455　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2011)02-0197-06

Reconstruction and Geometrical Property of Top Scroll Profile Based on Frenet Frame

Liu Tao[1]　Wu Zaixin[2]　Rui Zhiyuan[1]

(1. *Key Laboratory of Digital Manufacturing Technology and Application*, *Ministry of Education*, *Lanzhou University of Technology*, *Lanzhou* 730050, *China*
2. *School of Mechanical and Electronical Engineering*, *Lanzhou University of Technology*, *Lanzhou* 730050, *China*)

Abstract

According to the situation that there is no general model to express both main profile and modified top profile, a general integration equation expressed in tangential angle series was established for scroll profile. The start part of profile was reconstructed with zeroth-order curve and first-order curve, respectively. The influence of parameters of top profile on thickness of scroll tooth was analyzed quantitatively. Furthermore, the geometrical models of area of compression chamber were set up based on curvature radius function of base line. The effect of curvature radius parameters on area property was explored. This study showed that first-order curve construction of top scroll could achieve higher performance by improving volume ratio while maintain reasonable tooth strength. With continuity equation of scroll baseline in form of radius of curvature, a fully-meshed profile and complete tooth profile could be obtained in the stage of machine design, so that there was no need to modify top scroll in later stages. The results could be applied in the scroll profile design.

Key words　Scroll profile, Radius of curvature, Frenet frame, Reconstruction, Geometrical property

引言

涡旋机械以其结构紧凑、高效节能、微振低噪等诸多特点，在制冷和空调领域得到广泛应用。近年来已扩展到涡旋空压机、涡旋增压器、涡旋泵、涡旋燃气发动机和涡旋膨胀机[1~3]等领域。型线对涡旋

收稿日期：2009-11-26　修回日期：2010-01-19
* 国家自然科学基金资助项目(50965011)和甘肃省自然科学基金资助项目(0710RJZA061、1014RJZA025)
作者简介：刘涛，教授，博士，主要从事机械设计制造及其自动化研究，E-mail：liutao1971@lut.cn

齿的几何特性、整机结构和综合性能等有显著影响，因此一直是涡旋机械设计理论的研究热点之一[4~6]。

涡旋始端型线的局部修正可以改善基圆渐开线的加工性能，提高涡旋机械的内容积比，但目前修正方法仅限于图解法[7]和解析法[8~9]，尚未建立表征修正型线和基圆渐开线固有特性的统一方程，因此难以系统分析型线参数对涡旋机械几何特性、容积特性以及动力学特性等综合性能的影响。

本文运用微分几何理论，建立基于曲率半径函数的涡旋型线通用积分方程，并将其应用于涡旋始端型线的重构中，系统研究型线参数对涡旋机械几何特性的影响。提出齿厚系数的概念并定量研究零次曲线、一次曲线始端重构对涡旋端部齿厚的影响；建立基于母线曲率半径方程的涡旋压缩机构面积特性几何模型，定量分析重构型线面积特性的变化规律。

1 曲率半径函数表示的型线方程

图 1 平面内的两个正交的圆矢量函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 和 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$，它们的矢端轨迹为 xOy 平面内的单位圆。过平面曲线上的任一个给定点 B，都有正交的切向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与法向量 $\boldsymbol{\beta}$，在 B 点建立 Frenet 活动标架并使圆矢量函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)$、$\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 分别与 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 方向平行，这样涡旋型线方程的向量函数通用表达式可写成

$$\boldsymbol{r} = r_b\boldsymbol{e}(\varphi) - r_s\boldsymbol{e}_1(\varphi) \tag{1}$$

式中 r_b——广义基圆半径

r_s——广义展成半径

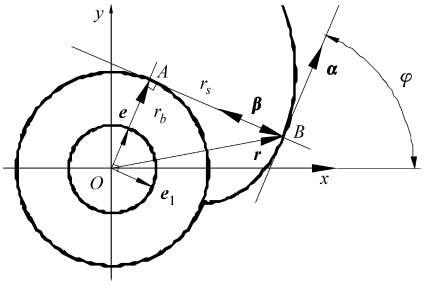

图 1 圆矢量函数与型线基本向量

Fig. 1 Circular vectors and basic vectors of scroll profile

r_b 和 r_s 满足[10]

$$r_b = \frac{\mathrm{d}r_s}{\mathrm{d}\varphi} \tag{2}$$

将圆矢量函数展开，可得型线的坐标表达式

$$\begin{cases} x = r_b\cos\varphi + r_s\sin\varphi \\ y = r_b\sin\varphi - r_s\cos\varphi \end{cases} \tag{3}$$

对式(3)微分并将式(2)代入，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = \left(\dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\cos\varphi \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \left(\dfrac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\sin\varphi \end{cases} \tag{4}$$

由式(4)得弧长

$$s = \int_0^{\varphi}\sqrt{x'^2 + y'^2}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s\right)\mathrm{d}\varphi \tag{5}$$

由式(5)得曲率半径

$$\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\mathrm{d}r_b}{\mathrm{d}\varphi} + r_s \tag{6}$$

将式(5)代入式(3)，得到以曲率半径表示的型线积分方程

$$\begin{cases} x(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi}\rho\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ y(\varphi) = \displaystyle\int_0^{\varphi}\rho\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{cases} \tag{7}$$

曲率半径函数可以写成切向角 φ 的集成级数形式

$$\rho(\varphi) = C_0 + C_1\varphi + C_2\varphi^2 + C_3\varphi^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{n} C_i\varphi^i \quad (i = 0,1,\cdots,n) \tag{8}$$

式中 i——曲率半径函数曲线的阶次。当 $i=0$ 时称为零次曲线，型线方程代表的曲线是圆弧；当 $i=1$ 时称为一次曲线，型线方程代表的曲线是圆渐开线；当 $i\geqslant 2$ 时称为高次曲线

C_i——i 次系数，其值由光滑连接条件确定

2 曲率半径函数涡旋始端型线重构

为了提高涡旋机械的性能，通常的做法是对涡旋始端型线进行局部修正，本文利用曲率半径函数方程对涡旋始端型线进行重构。

如图 2 所示，设始端重构型线的起始切向角为 φ_1，与主体型线连接点处的切向角为 φ_2，由于连接点处两曲线具有相同的法向量 $\boldsymbol{\beta}$，满足斜率连续条件，只需保证位置连续，就可使始端型线与主体型线实现光滑连接，达到一阶参数连续，即一阶连续。

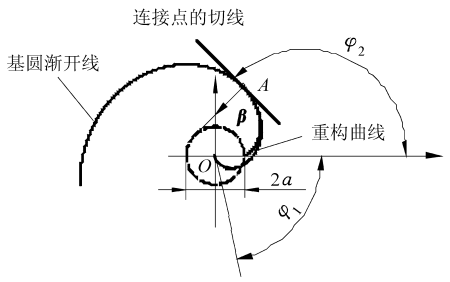

图 2 始端型线的重构曲线

Fig. 2 Reconstruction of top scroll profile

主体型线为基圆渐开线，a 为基圆半径。当型线母线的切向角变化范围为 $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{\max}$ 时，曲率半径函数的表达式为

$$\rho(\varphi)=\begin{cases}\rho_0(\varphi) & (\varphi\in[\varphi_1,\varphi_2])\\ a\varphi & (\varphi\in[\varphi_2,\varphi_{\max}])\end{cases} \tag{9}$$

当 $\rho_0(\varphi)=C_0$ 时，始端型线曲率半径函数为零次曲线，其对应的型线类型是圆弧。

当 $\rho_0(\varphi)=C_0+C_1\varphi$ 时，始端型线为一次曲线，其对应的型线类型是圆渐开线及等距线。

将曲率半径函数代入式(6)中，得到一条光滑的涡旋型线 F，其方程为

$$\begin{cases}x(\varphi)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_{\max}}\rho(\varphi)\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\ y(\varphi)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_{\max}}\rho(\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\end{cases} \tag{10}$$

如图 3 所示，以 F 为母线，以其内法向等距线[11] F_i 构成动涡旋齿外壁型线，外法向等距线 F_o 构成静涡旋齿内壁型线。再以 F 的中心对称曲线 F' 作为另一条母线，以其内法向等距线 F_i' 构成静涡旋齿外壁型线，外法向等距线 F_o' 构成动涡旋齿内壁型线。两条母线的起始端在坐标原点 O 处相切，曲率中心 O_1、O_2 和坐标原点 O 共线，其曲率半径相等，满足连续性条件，故所得涡旋齿型线是光滑曲线。

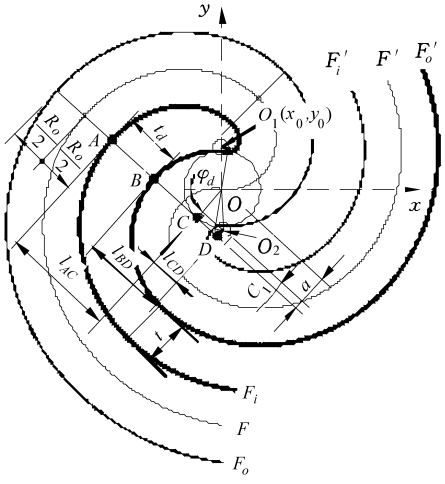

图 3　齿厚系数计算示意图

Fig. 3　Schematic of coefficient of tooth thickness

3　涡旋始端重构型线的齿厚系数计算

图 3 中直线 CD 是基圆和始端重构曲线渐缩线的公切线，切点分别为 C、D。直线 CD 与动涡旋齿的内、外壁型线交点为 B、A，线段 l_{AC} 为外壁型线的曲率半径，其曲率中心为 C。线段 l_{BD} 为内壁型线的曲率半径，其曲率中心为 D。显然，点 A、B、C 和 D 共线，A、B 两点具有相同的法向量。

若已知母线方程如式(6)，则其渐缩线方程为

$$\begin{cases}x^*(\varphi)=x(\varphi)-\dfrac{y'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}\\ y^*(\varphi)=y(\varphi)+\dfrac{x'(x'^2+y'^2)}{x'y''-y'x''}\end{cases} \tag{11}$$

O_1 为母线 F 的渐缩线的曲率中心，其坐标为

$$\begin{cases}x_0(\varphi)=x^*(\varphi)-\dfrac{y^{*\prime}(x^{*\prime 2}+y^{*\prime 2})}{x^{*\prime}y^{*\prime\prime}-y^{*\prime}x^{*\prime\prime}}\\ y_0(\varphi)=y^*(\varphi)+\dfrac{x^{*\prime}(x^{*\prime 2}+y^{*\prime 2})}{x^{*\prime}y^{*\prime\prime}-y^{*\prime}x^{*\prime\prime}}\end{cases} \tag{12}$$

若始端重构曲线取零次曲线，则其渐缩线的轨迹为平面内一点 O_1；若始端重构曲线取一次曲线，则其渐缩线的轨迹为平面内圆弧，O_1 即为圆心。

由于涡旋始端部分的外壁型线和内壁型线不是法向等距线，除 A、B 两点外，内、外侧型线上其余点的法向量不相同，因此基圆渐开线中法向齿厚的定义不再适用。为了定量分析始端重构曲线参数对始端部分齿厚的影响，引入当量齿厚

$$t_d=l_{AC}+l_{CD}-l_{BD} \tag{13}$$

其中

$$l_{AC}=a\varphi_d-\frac{R_o}{2} \tag{14}$$

$$\varphi_d=\arcsin\left(\frac{a-C_1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right)+\pi \tag{15}$$

$$l_{CD}=\sqrt{x_0^2+y_0^2-(a-C_1)^2} \tag{16}$$

$$l_{BD}=C_1(\varphi_d-\pi)+C_0+\frac{R_o}{2} \tag{17}$$

$$t=\pi a-R_o \tag{18}$$

式中　R_o——回转半径

定义齿厚系数

$$\xi=\frac{t_d}{t} \tag{19}$$

已知 $a=2.069$ mm，$R_o=4$ mm 条件下，零次曲线和一次曲线重构的动涡旋齿分别如图 4 和图 5 所示。

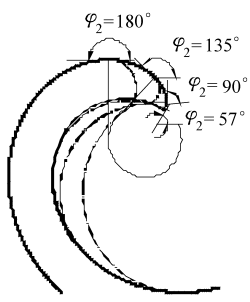

图 4　零次曲线重构得到的动涡旋齿

Fig. 4　Scroll wrap with zeroth-order curve reconstruction

零次曲线和一次曲线始端重构齿厚系数计算值如表 1 和表 2 所示。

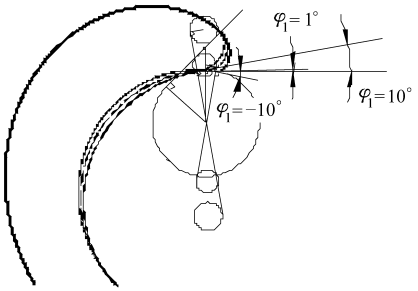

图 5 $\varphi_2=135°$时一次曲线重构得到的动涡旋齿

Fig. 5 Scroll wrap with first-order curve reconstruction

表 1 零次曲线重构齿厚系数计算值

Tab. 1 Tooth-thickness parameters with zeroth-order reconstruction

切向角 φ_2/(°)	切向角 φ_1/(°)	零次系数 C_0	当量齿厚 t_d/mm	齿厚系数 ξ
57	-33	2.069	2.497	1.00
90	-25	2.284	2.628	1.05
135	1	2.877	3.319	1.33
180	35	3.579	4.369	1.75

表 2 一次曲线重构齿厚系数计算值

Tab. 2 Tooth-thickness parameters with first-order reconstruction

切向角 φ_2/(°)	切向角 φ_1/(°)	零次系数 C_0	一次系数 C_1	当量齿厚 t_d/mm	齿厚系数 ξ
	-38	1.914	0.381	2.499	1.00
57	-33	2.069	0	2.499	1.00
	-28	2.276	-0.465	2.499	1.00
	-10	2.281	0.443	3.125	1.25
135	1	2.877	0	3.319	1.33
	10	3.662	-0.542	3.503	1.40

4 一次曲率半径函数型线的面积特性

由于涡旋齿直壁等高的结构特点,其压缩腔的容积特性可以转换为横截面的面积特性进行研究。

已知设计参数:涡旋圈数 $N=3$,基圆渐开线最大切向角 $\varphi_{max}=630°$,基圆半径 $a=2.069$ mm,回转半径 $R_o=4$ mm,以吸气闭合瞬时的曲轴转角位置作为零点。

4.1 吸气腔面积

动、静涡旋啮合形成的封闭腔从外到内依次为吸气腔、压缩腔和排气腔。吸气腔完全由基圆渐开线的法向等距线构成,其横截面积为

$$A_s(\theta)=R_o\int_{\varphi_{max}-360°-\theta}^{\varphi_{max}-\theta}a\varphi\mathrm{d}\varphi \quad (0°\leqslant\theta\leqslant360°) \tag{20}$$

4.2 压缩腔面积

如图 6 所示,当动涡旋相对于静涡旋作回转半径为 R_o 的圆形平动时,动涡旋齿外壁与静涡旋齿内壁包围形成的封闭压缩腔面积如图中阴影部分所示,点 1、2 为压缩腔的两个密封点,即啮合点。点 B 为齿端一次曲线渐缩线上的点,其坐标(x_1,y_1)由式(10)确定。点 D 为主体渐开线基圆上的切点,其坐标(x_2,y_2)由基圆方程确定。

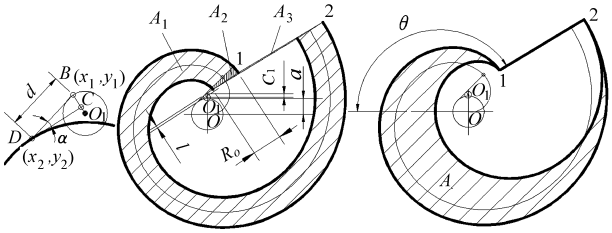

图 6 压缩腔面积

Fig. 6 Area of compression chamber

动、静涡旋型线啮合过程中,当曲轴转角 $0°\leqslant\theta\leqslant270°-\varphi_2$ 时,压缩腔仅由基圆渐开线的法向等距线构成,其横截面积为

$$A(\theta)=A_1(\theta)=R_o\int_{\varphi_2}^{\varphi_{max}-\theta}a\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{21}$$

当曲轴转角 $270°-\varphi_2\leqslant\theta\leqslant270°-\varphi_1$ 时,压缩腔由基圆渐开线和一次曲线的法向等距线构成,A_2 为一次曲线构成的面积

$$A_2(\theta)=R_o\int_{\varphi_{max}-\theta-360°}^{\varphi_2}(C_0+C_1\varphi)\mathrm{d}\varphi \tag{22}$$

由于啮合点 1、2 的连线与基圆不相切,故产生面积增量 A_3,其形状呈平行四边形,大小与啮合点 1、2 位置有关

$$A_3(\theta)=R_o l \tag{23}$$

$$\text{其中}\quad l=d\sin\left(\arctan\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}-(180°-\theta)\right) \tag{24}$$

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \tag{25}$$

此时封闭压缩腔的横截面积为

$$A(\theta)=A_1(\theta)+A_2(\theta)+A_3(\theta) \tag{26}$$

当曲轴转角 $\theta\geqslant270°-\varphi_1$ 时,压缩过程结束,封闭压缩腔的横截面积为零。排气过程开始,开始排气角为

$$\theta^*=270°-\varphi_1 \tag{27}$$

由于涡旋齿的直壁等高特性,故涡旋压缩机构的内容积比可用吸气闭合面积与压缩终了面积之比表示为

$$v=\frac{A_s(0)}{A(\theta^*)} \tag{28}$$

不同始端型线重构的面积特性计算值如表 3 所示。

表 3　一次曲线重构面积参数计算值

Tab. 3　Values of area parameters of first-order profile

φ_2 /(°)	φ_1 /(°)	θ^* /(°)	$A(\theta^*)$ /mm²	v	Δv /%
57	-38	308	131.4	5.593	4.73
	-33	303	135.4	5.340	0
	-28	298	139.4	5.272	-1.28
135	-10	280	151.1	4.864	5.83
	1	269	159.9	4.596	0
	10	260	167.3	4.393	-4.42

5　讨论

（1）始端齿厚。在零次曲线重构中，随着 φ_2 的增大，涡旋始端齿厚增大，如图 4 和表 1 所示；在一次曲线重构中，随着 φ_2 的增大，涡旋始端齿厚增大，且当 φ_2 一定时，随着 φ_1 的增大，涡旋始端齿厚增大，见图 5 和表 2。由此可见，切向角参数 φ 对涡旋始端齿厚有较大影响，且一次曲线重构可以获得更多的齿端厚度选择。当 $\varphi_2 = 57°$ 时，当量齿厚方向与涡旋齿内外壁型线的公切线重合，$\xi = 1$，与 φ_1 的变化无关。

（2）面积特性。一次曲线重构压缩腔面积中 A_1 随着 φ_2 的减小而增大，如图 7 所示。φ_2 一定时，随着 φ_1 的变化，A_2 曲线的斜率变化规律各异，由一次曲线系数 C_0 和 C_1 确定，如图 7、8 所示。

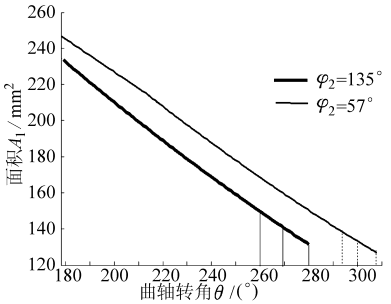

图 7　A_1 随曲轴转角的变化历程

Fig. 7　Variation of area (A_1) *vs* crank angle (θ)

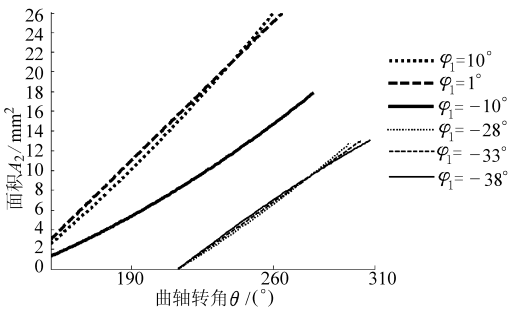

图 8　A_2 随曲轴转角的变化历程

Fig. 8　Variation of area (A_2) *vs* crank angle (θ)

如图 9 所示，当 $\varphi_2 = 135°$ 时，面积增量 A_3 的值经历了从零—正—零—负的波动变化过程，A_3 为零时封闭压缩腔的两啮合点连线与基圆相切。当 $\varphi_2 = 57°$ 时，面积增量 A_3 的值从零变为负值，中间无极性变化，不呈现波动性。这一现象与重构型线连接点处几何边界条件仅为一阶连续，曲率半径函数的变化率大小不同有关。在排气瞬时，A_3 的值恒等于 aR_o，与重构曲线参数无关。A_3 占第二压缩腔总面积值的 5% ~6%，不可忽略。

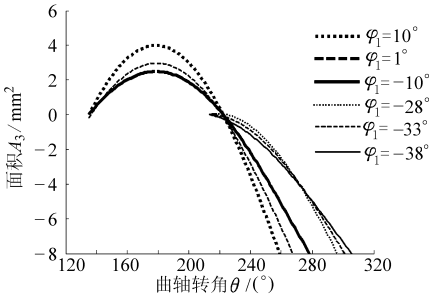

图 9　A_3 随曲轴转角的变化历程

Fig. 9　Variation of area (A_3) *vs* crank angle (θ)

（3）内容积比。一次曲线重构中随着 φ_2 的增大，θ^* 减小，压缩过程缩短，v 减小；φ_2 一定时，随着 φ_1 的增大，θ^* 减小，A 增大，v 减小，如表 3 和图 10、图 11 所示。虽然减小 φ_2 和 φ_1 可以获得较大的内容积比，但过分地减小 φ_2 和 φ_1 将使齿端部分强度削弱，此外当重构曲线和基圆渐开线连接点处的曲率半径小于 $R_o/2$ 时，还将导致涡旋齿端部型线不光滑，使涡旋齿的加工性能和动力学特性恶化。

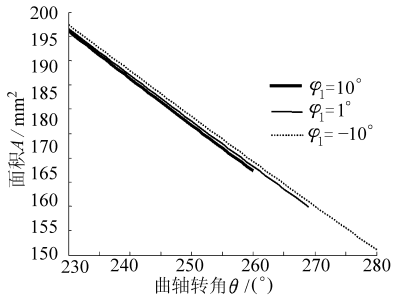

图 10　$\varphi_2 = 135°$ 时压缩腔面积的变化历程

Fig. 10　Variation of area of compression chamber, $\varphi_2 = 135°$

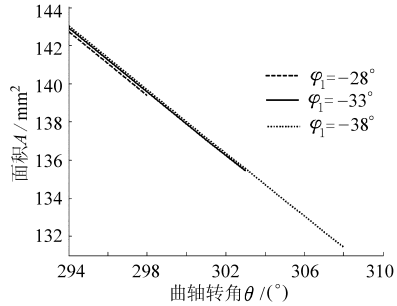

图 11　$\varphi_2 = 57°$ 时压缩腔面积的变化历程

Fig. 11　Variation of area of compression chamber, $\varphi_2 = 57°$

6 结论

(1) 涡旋型线母线的曲率半径函数积分方程不但可以表示基圆渐开线,还可描述一阶连续始端重构型线,建立以切向角的连续变化为基础的型线方程可得到完全啮合型线和完整涡旋齿廓,无需再进行齿端修正。

(2)涡旋始端齿厚和面积特性随曲率半径函数不同而呈现不同的变化规律。通过对曲率半径函数的优化选取,可以设计满足几何特性和容积特性要求的涡旋型线,有利于涡旋机械的柔性化设计。

(3) 在切向角相同条件下,一次曲线始端重构曲率半径函数系数有 2 个,可以兼顾涡旋齿端强度和内容积比要求,获得较零次曲线重构综合性能更为优越的涡旋齿。

(4) 一次曲线的实质是基圆半径等于 C_1 的圆渐开线(或其法向等距线),若 $C_1=0$,则一次曲线退化为零次曲线,即圆弧曲线,其曲率半径等于 C_0。由于基圆渐开线和圆弧型线的数控加工技术已经成熟,故一次曲线涡旋齿端重构理论具有较强实用性。

参 考 文 献

1 Yuanyang, Li Liansheng. Research on oil-free air scroll compressor with high speed in 30kW fuel cell[J]. Applied Thermal Engineering, 2003, 23(5): 593 ~ 603.

2 Sawada T, Ohbayashi T. Theoretical prediction of the pumping performance of dry pumps (taking the scroll pump and the screw pump by way of example)[J]. Journal of the Vacuum Society of Japan, 2006, 49(8): 460 ~ 465.

3 Lemort V, Quoilin S, Cuevas C, et al. Testing and modeling a scroll expander integrated into an organic Rankine cycle[J]. Applied Thermal Engineering, 2009, 29(14 ~ 15): 3 094 ~ 3 102.

4 Gravesen J, Christian H. The geometry of the scroll compressor[J]. Siam Review, 2001, 43(1): 113 ~ 126.

5 Wang Baolong, Li Xianting, Shi Wenxing. A general geometrical model of scroll compressors based on discretional initial angles of involute[J]. International Journal of Refrigeration, 2005, 28(6): 958 ~ 966.

6 王立存,陈进,李世六, 等. 基于泛函的涡旋型线共轭啮合理论[J]. 机械工程学报, 2007, 43(3): 50 ~ 53.
Wang Licun, Chen Jin, Li Shiliu, et al. Conjugate meshing theory of scroll profiles based on functional expression[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(3): 50 ~ 53. (in Chinese)

7 Liu Zhenquan, Du Guirong, Yu Shicai. The graphic method of modified wrap of scroll compressor[C] // Proceedings of International Compressor Engineering Conference at Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA: Ray W. Herrick Laboratories Press, 1992: 1 099 ~ 1 106.

8 高秀峰,冯诗愚,顾兆林,等. 圆弧类修正齿型涡旋机械气体力研究[J]. 西安交通大学学报, 2004, 38(11): 1 165 ~ 1 168.
Gao Xiufeng, Feng Shiyu, Gu Zhaolin, et al. Gas forces for scroll machinery modified by arc-shaped top wrap[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2004, 38(11): 1 165 ~ 1 168. (in Chinese)

9 王君,刘振全. 采用圆渐开线修正涡旋压缩机涡齿型线[J]. 机械工程学报, 2006, 42(6): 221 ~ 226.
Wang Jun, Liu Zhenquan. Investigation of wrap profile modification using circle involute for scroll compressor[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(6): 221 ~ 226. (in Chinese)

10 Bush J W, Beagle W P. Derivation of a general relation governing the conjugacy of scroll profiles[C] // Proceedings of International Compressor Engineering Conference at Purdue University, West Lafayette, Indiana, USA: Ray W. Herrick Laboratories Press, 1992: 1 079 ~ 1 087.

11 刘涛,邬再新,刘振全. 法向等距线法生成涡旋压缩机型线的研究[J]. 机械工程学报, 2004, 40(1): 55 ~ 58.
Liu Tao, Wu Zaixin, Liu Zhenquan. Study on generating profile with normal-equidistant-curve method for scroll compressor[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(1): 55 ~ 58. (in Chinese)

12 刘涛,芮执元,邬再新,等. 基于正交标架矢量函数的涡旋机械集成型线研究[J]. 农业机械学报, 2010, 41(5): 209 ~ 212.
Liu Tao, Rui Zhiyuan, Wu Zaixin, et al. Integration of profile for scroll fluid machine based on vector function of orthogonal frame[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(5): 209 ~ 212. (in Chinese)