

含有球面4R环路锁定模式的球面7R机构模式变换分析

刘伟¹ 刘宏昭²

(1. 西安工程大学机电工程学院, 西安 710048; 2. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

摘要: 具有运动和锁定模式的机构在变换为特定锁定模式位形后,可满足特定工况下的刚度需求。通过在球面4R机构连杆上,设置处于折叠位形的球面3R运动链,设计了一类具有锁定模式的双环球面7R机构。分析球面4R机构连杆曲线的几何特征,通过算例验证了球面4R机构连杆曲线方程的正确性。使用旋量理论分析球面4R环路处于奇异位形下连杆的瞬时转动轴线,确定了球面4R环路中连杆的瞬时转动轴线与球面3R运动链轴线共面,为机构模式变换必要条件。将球面4R环路作为广义转动副,对双环球面7R机构加速度进行分析,得到了球面4R机构环路连杆曲线尖点对应机构位形下,连杆瞬切线与球面3R运动链轴线共面,为机构模式变换必要条件。结果表明,该类球面7R机构具有锁定模式,通过旋量理论分析球面4R机构环路连杆的瞬时运动旋量,可确定机构运动模式变换位形。对于分析设计满足运动和锁定生产作业变换需求的多模式机构,具有参考价值。

关键词: 球面双环7R机构; 锁定模式; 旋量理论; 多模式

中图分类号: TH112

文献标识码: A

文章编号: 1000-1298(2024)12-0530-09

OSID:



Mode Transformation Analysis of Spherical 7R Mechanism with Spherical 4R Loop Locking Mode

LIU Wei¹ LIU Hongzhao²

(1. School of Electrical and Mechanical Engineering, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

(2. Faculty of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: Mechanisms with motion and locking modes can meet the stiffness requirements under specific working conditions after being transformed into specific locking mode configurations. The geometric characteristics of the linkage curve of the spherical 4R mechanism was analyzed, and the correctness of the linkage curve equation of the spherical 4R mechanism was verified through numerical examples. A type of double loops spherical 7R mechanism with locking mode was designed by setting a spherical 3R motion chain in a folding position on the connecting rod of the spherical 4R mechanism. Using screw theory to analyze the instantaneous rotation axis of the connecting rod in a singular configuration of the spherical 4R loop, it was determined that the instantaneous rotation axis of the connecting rod in the spherical 4R loop was coplanar with the axis of the spherical 3R motion chain as a necessary condition for mechanism mode transformation. Using the spherical 4R loop as a generalized rotational pair, the acceleration of the double loops spherical 7R mechanism was analyzed, and the necessary condition for the mechanism mode transformation was obtained, which was that the tangent of the axodes of the connecting rod and the axis of the spherical 3R motion chain were coplanar under the corresponding mechanism configuration of the sharp point of the connecting rod curve in the spherical 4R mechanism loop. This kind of spherical 7R mechanism had lock-in mode. By analyzing the instantaneous rotation of the link in the loop of the spherical 4R mechanism with screw theory, the transformation of the motion mode of the mechanism can be determined. It had a certain application value in the analysis and design of multi-mode mechanism which can meet the requirements of motion and lock-in production operation transformation.

Key words: spherical double loop 7R mechanism; locked mode; screw theory; multiple modes

收稿日期: 2024-07-23 修回日期: 2024-08-27

基金项目: 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2023JC-YBMS-295)、西安工程大学博士科研启动基金项目(BS202106)和西安市碑林区

2023年应用技术研发储备工程项目(GX2312)

作者简介: 刘伟(1985—),男,讲师,博士,主要从事并联机构综合研究,E-mail: liuweilw@xpu.edu.cn

通信作者: 刘宏昭(1954—),男,教授,博士,主要从事机械动力学和机构学研究,E-mail: liu-hongzhao@163.com

0 引言

多模式机构^[1]可以不进行重新装配,通过模式变换适应不同的工作需要。在一些应用场合中,通过将运动模式变换为锁定状态,可以提高机构刚度。例如腿部着陆器,腿部结构需要具有折叠和行走的运动模式,在着陆时,腿部结构处于锁定状态,从而具有承载高载荷和抵抗强冲击的能力^[2]。一些具有移动底座的机器人负载工作时,移动底座具有锁定模式,可以在机器人工作时保持机身姿态的稳定^[3]。

一些多模式机构在运动模式变换时,部分构件和运动副处于锁定状态。多模式机构运动模式变换或自由度数目的改变,使得机构内部存在构件和运动副从运动状态变换为锁定状态。文献[4]使用双环平行四边形机构与直线四杆机构连接,得到了具有两种运动模式的平面多环机构。该机构在两种运动模式下,机构自由度均为 1,运动模式能从锁定模式变化为直线移动模式。文献[5]在支链中引入具有两个定轴转动运动模式的 Bennett 机构,通过该支链中运动副的锁定和释放,从而实现了机构运动模式的改变。文献[6]使用 3R_PR 运动链,设计了具有 1 种 3T、4 种 2T1R 运动模式的并联机构,该机构运动模式的变换是通过支链中运动副锁定实现的。文献[7]使用两个 6R 机构连接得到 8R 机构,其具有两个自由度,锁定 1 个转动副后,可实现机构在不同 7R 或 6R 运动模式下变换。文献[8]分析了 4-CRU 并联机构所具有的 3 种运动模式,其具有两种 3T1R 运动模式和 1 种 1R2T 运动模式,两种 3T1R 运动模式通过 1R2T 运动模式变换。该 1R2T 运动模式较为特殊,为 1 个沿 X 轴的 1 维转动、沿 Z 轴的 1 维转动和 XOY 平面的 1 维移动。文献[9]综合了具有 3T1R 和 2T1R 运动模式的并联机构,且这两个模式的转动轴线不平行。目前,多模式机构的设计和分析主要集中在研究具有不同运动模式的机构,而对具有锁定模式和其他运动模式的多模式机构研究较为少见。

现有多模式机构模式变换分析方法有:①通过对机构运动学方程或方程组进行因式分解^[10]、准素分解^[11-14],根据输出构件的运动轨迹分析机构具有的运动模式特征^[15-16]。②通过数值计算方法分析机构的运动模式特征^[17-18]。③通过旋量理论^[19-20]分析具有运动分岔特性机构的运动模式特征。本文基于球面 4R 连杆曲线轨迹分析,设置折叠位形球面 3R 运动链,设计一类具有运动和锁定模式双环球面 7R 机构。通过旋量理论确定此类机构的模式变换位形。此类机构在运动到特定工作位姿下,通

过运动模式变换为锁定状态,可以进一步提升其负载能力和刚度^[21],从而适应不同的作业要求。

1 球面 4R 机构连杆曲线

1.1 球面 4R 机构连杆曲线方程

图 1 为球面 4R 机构 $R_1R_2R_3R_4$ 初始位形,转动副 R_i 轴线的单位矢量为 $\mathbf{l}_{Ri0}$ ($i=1,2,3,4$), $\mathbf{l}_{Ri0}$ 相交于点 O 。建立坐标系 $OXYZ$, XOY 平面与 $\mathbf{l}_{R10}$ 、 $\mathbf{l}_{R40}$ 所在平面共面, $\mathbf{l}_{R10}$ 与 X 轴共线。初始位形杆 3 上点 A 的方向矢量为 $\mathbf{l}_{A0}$ 。机构一般位形下,转动副 R_i 轴线的单位矢量为 $\mathbf{l}_{Ri}$, 杆 3 上点 A 的方向矢量为 $\mathbf{l}_A$ 。

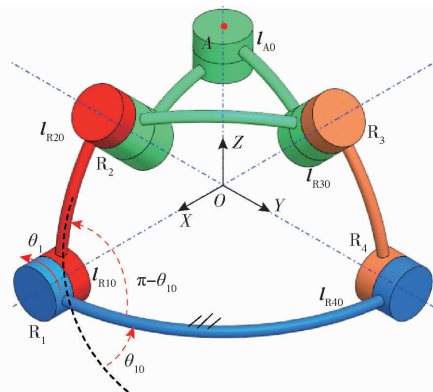


图 1 球面 4R 机构

Fig. 1 Spherical 4R mechanism

方向矢量 $\mathbf{l}_{R2}$ 由关节 R_1 的转角确定,即

$$\mathbf{l}_{R2} = \mathbf{R}_{10} \mathbf{l}_{R20} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{R}_{10}$ 是以方向矢量 $\mathbf{l}_{R10}$ 为转动轴线的旋转矩阵,其表达式为

$$\mathbf{R}_{10} = \mathbf{l}_{R10} \mathbf{l}_{R10}^T + \sin(\theta_{10} - \theta_1) \hat{\mathbf{l}}_{R10} + \cos(\theta_{10} - \theta_1) (\mathbf{E} - \mathbf{l}_{R10} \mathbf{l}_{R10}^T) \quad (2)$$

式中 $\hat{\mathbf{l}}_{R10}$ ——方向矢量 $\mathbf{l}_{R10}$ 对应的反对称矩阵

θ_{10} ——初始位形转角

θ_1 ——一般位形转角

$\mathbf{E}$ ——3×3 单位矩阵

可将 $\mathbf{l}_{R30}$ 用 $\mathbf{l}_{A0}$ 、 $\mathbf{l}_{R20}$ 、 $\mathbf{l}_{A0} \times \mathbf{l}_{R20}$ 表示为

$$\mathbf{l}_{R30} = \lambda \mathbf{l}_{A0} + \varepsilon \mathbf{l}_{R20} + \eta \mathbf{l}_{A0} \times \mathbf{l}_{R20} \quad (3)$$

λ 、 ε 、 η 可看作方向矢量 $\mathbf{l}_{R30}$ 在坐标轴分别为 $\mathbf{l}_{A0}$ 、 $\mathbf{l}_{R20}$ 、 $\mathbf{l}_{A0} \times \mathbf{l}_{R20}$ 的非正交坐标系中的坐标分量。

以 $\mathbf{l}_{R30}$ 、 $\mathbf{l}_{R20}$ 、 $\mathbf{l}_{A0}$ 点乘式(3)等号左右两边,得到

$$\begin{cases} \lambda \mathbf{l}_{R30} \mathbf{l}_{A0} + \varepsilon \mathbf{l}_{R30} \mathbf{l}_{R20} + \eta \mathbf{l}_{R30} \mathbf{l}_{A0} \times \mathbf{l}_{R20} - 1 = 0 \\ \lambda \mathbf{l}_{R20} \mathbf{l}_{A0} + \varepsilon - \mathbf{l}_{R20} \mathbf{l}_{R30} = 0 \\ \lambda + \varepsilon \mathbf{l}_{A0} \mathbf{l}_{R20} - \mathbf{l}_{A0} \mathbf{l}_{R30} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

整理得到

$$\begin{cases} k_{11} \lambda + k_{12} \varepsilon + k_{13} \eta + k_{14} = 0 \\ k_{21} \lambda + k_{22} \varepsilon + k_{23} = 0 \\ k_{31} \lambda + k_{32} \varepsilon + k_{33} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

式中 k_{ij} ——参数 λ 、 ε 、 η 的系数

可解得 $\lambda, \varepsilon, \eta^{[22]}$ 。

矢量 $\boldsymbol{l}_{R30}$ 可以写为

$$\boldsymbol{l}_{R30} = \boldsymbol{M}_0 [\lambda \quad \varepsilon \quad \eta]^T \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{M}_0 = [\boldsymbol{l}_{A0} \quad \boldsymbol{l}_{R20} \quad \boldsymbol{l}_{A0} \times \boldsymbol{l}_{R20}]$ (7)

机构处于一般位形时,转动副 R_3 轴线方向矢量 $\boldsymbol{l}_{R3}$ 可根据式(6)得到

$$\boldsymbol{l}_{R3} = \boldsymbol{M} [\lambda \quad \varepsilon \quad \eta]^T \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{l}_A \quad \boldsymbol{l}_{R2} \quad \boldsymbol{l}_A \times \boldsymbol{l}_{R2}]$ (9)

令 x_i, y_i, z_i 为 $\boldsymbol{l}_{Ri}$ 的坐标分量, x_A, y_A, z_A 为 $\boldsymbol{l}_A$ 的坐标分量,则式(8)可写为

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_A + \varepsilon x_2 - \eta (y_2 z_A - y_A z_2) \\ \lambda y_A + \varepsilon y_2 + \eta (x_2 z_A - x_A z_2) \\ \lambda z_A + \varepsilon z_2 - \eta (x_2 y_A - x_A y_2) \end{bmatrix} \tag{10}$$

根据图 1 机构几何关系可得

$$\boldsymbol{l}_{R4}^T \boldsymbol{l}_{R3} = \cos \alpha_{34} \tag{11}$$

式中 α_{34} ——转动副 R_3, R_4 轴线夹角

将式(10)代入式(11)可得关于 $\cos \theta_1, \sin \theta_1$ 的线性方程

$$A_1 \cos \theta_1 + B_1 \sin \theta_1 + C_1 = 0 \tag{12}$$

其中

$$A_1 = \sin \alpha_{14} (\varepsilon y_{20} - \eta x_A z_{20}) - \eta \cos \alpha_{14} (y_{20} z_A - y_A z_{20}) \tag{13}$$

$$B_1 = \eta \cos \alpha_{14} (y_{20} y_A + z_{20} z_A) - \sin \alpha_{14} (\varepsilon z_{20} + \eta x_A y_{20}) \tag{14}$$

$$C_1 = \cos \alpha_{34} - \cos \alpha_{14} (\varepsilon x_{20} + \lambda x_A) - \sin \alpha_{14} (\lambda y_A + \eta x_{20} z_A) \tag{15}$$

式中 α_{ij} ——转动副 R_i, R_j 轴线夹角

转动副 R_4 与机架连接,转动副 R_4 轴线的方向矢量 $\boldsymbol{l}_{R4}$ 的分量 x_4, y_4, z_4 为定值。

根据图 1 机构几何关系还可得

$$\boldsymbol{l}_{R2}^T \boldsymbol{l}_A = \cos \alpha_{2A} \tag{16}$$

得到关于 $\cos \theta_1, \sin \theta_1$ 的线性方程,即

$$A_2 \cos \theta_1 + B_2 \sin \theta_1 + C_2 = 0 \tag{17}$$

其中 $A_2 = y_{20} y_A + z_{20} z_A$ (18)

$$B_2 = y_{20} z_A - y_A z_{20} \tag{19}$$

$$C_2 = \cos \alpha_{2A} - x_{20} x_A \tag{20}$$

式(12)、(17)是关于 $\cos \theta_1, \sin \theta_1$ 的 2 个线性方程。该线性方程组非奇异时,解得结果代入公式

$$\sin^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_1 = 1 \tag{21}$$

可得

$$\begin{aligned} & -A_1^2 B_2^2 + A_1^2 C_2^2 + 2A_1 A_2 B_1 B_2 - 2A_1 A_2 C_1 C_2 - A_2^2 B_1^2 + \\ & A_2^2 C_1^2 + B_1^2 C_2^2 - 2B_1 B_2 C_1 C_2 + B_2^2 C_1^2 = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

式(22)是关于 x_A, y_A, z_A 的 4 次方程,考虑到 x_A, y_A, z_A 还需满足

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = 1 \tag{23}$$

可得到球面 4R 机构连杆曲线是不高于 8 次的空间曲线。

1.2 球面 4R 机构连杆曲线算例

球面 4R 机构如图 2 所示,结构参数为 $\alpha_{12} = 20^\circ, \alpha_{23} = 70^\circ, \alpha_{34} = 45^\circ, \alpha_{41} = 90^\circ, \alpha_{2A} = 45^\circ, \alpha_{A3} = 45^\circ$ 。 α_{2A}, α_{A3} 分别为转动副 R_2, R_3 轴线与点 A 方向向量夹角。建立坐标系 $OXYZ$, X 轴沿转动副 R_1 轴线, Y 轴沿转动副 R_4 轴线。在图 2 所示机构位形下, $\boldsymbol{l}_{R20}, \boldsymbol{l}_{R40}, \boldsymbol{l}_{R30}$ 单位矢量分量等参数如表 1 所示。

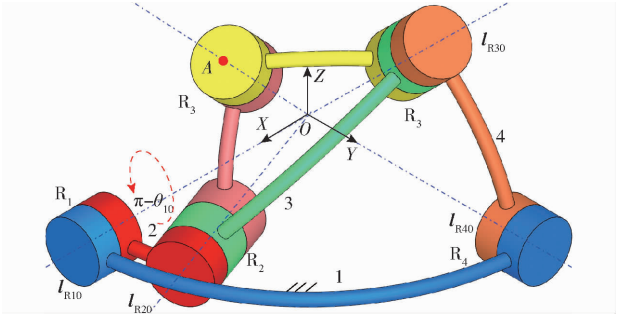


图 2 球面 4R 机构初始位形

Fig. 2 Initial configuration of spherical 4R mechanism

表 1 机构位形参数

Tab. 1 Parameters of mechanism configuration

参数	数值	参数	数值
x_{20}	0.940	x_{30}	0.106 604 413
y_{20}	0.342	y_{30}	0.707 106 781
z_{20}	0	z_{30}	0.699 024 677
x_{A0}	0.679 732 378	λ	0.930 524 037
y_{A0}	0.199 892 559	ε	-0.315 959 714
z_{A0}	0.705 696 011	η	0.948 772 606

将表 1 所示参数代入式(22),绘制其图像。如图 3 所示,式(22)对应曲面为图 3 中曲面 Σ_1 ,式(23)对应曲面为图 3 中曲面 Σ_2 。曲面 Σ_1, Σ_2 的交线为空间曲线 1、2,分别对应图 3b、3c 两种不同机构位形下连杆 3 上点 A 的连杆曲线。

1.3 球面 4R 机构连杆算例验证

使用 Solidworks 对图 3b、3c 所示球面 4R 机构进行运动仿真,如图 4 所示。将其连杆 3 上点 A 的方向矢量导出后,在 Matlab 中进行绘制,与图 3 中连杆 3 上点 A 的曲线进行比较。如图 4a 所示,红色曲线、蓝色曲线分别为 Solidworks 中图 4b 所示球面 4R 机构连杆 3 上点 A 的轨迹数据点,与图 3a 中通过曲面交线得到的轨迹一致,结果验证了 1.1 节中计算球面 4R 机构连杆轨迹方法的正确性。

2 球面 7R 机构模式分析

2.1 球面 7R 机构中运动链速度旋量分析

如图 5 所示,图 5a 球面 4R 机构和图 5b 球面

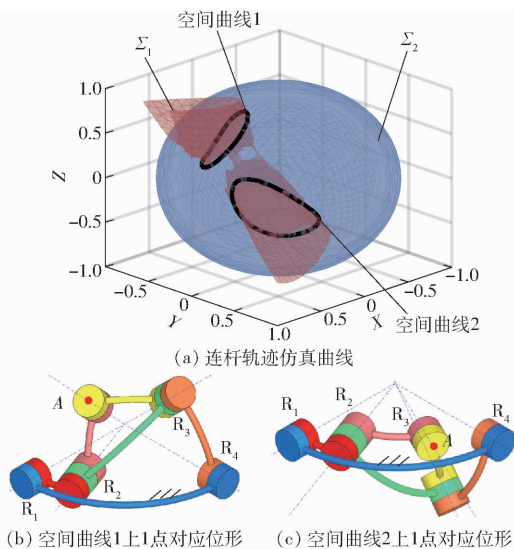


图 3 球面 4R 机构连杆曲线

Fig. 3 Link curves of spherical 4R mechanism

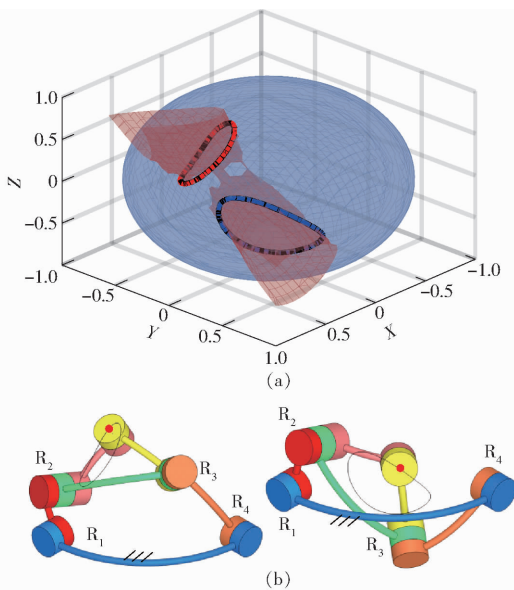


图 4 球面 4R 机构连杆曲线 Solidworks 仿真结果

Fig. 4 Solidworks simulation results of link curve of spherical 4R mechanism

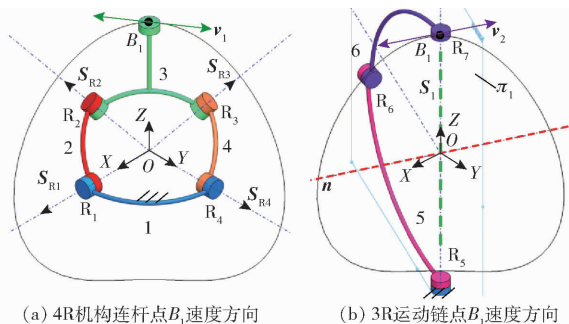


图 5 球面 7R 机构运动链速度方向

Fig. 5 Velocity direction of motion chain of spherical 7R mechanism

3R 运动链, 可以装配得到球面 7R 机构。图 5a 中球面 4R 机构连杆 3 在运动链 R_1R_2 中, 其运动旋量可表示为

$$\omega_{4R}S_{4R} = \omega_{R1}S_{R1} + \omega_{R2}S_{R2} \quad (24)$$

式中 ω_{R1}, ω_{R2} ——转动副 R_1, R_2 角速度

ω_{4R} ——球面 4R 机构连杆 3 瞬时转动角速度

S_{R1}, S_{R2} ——转动副 R_1, R_2 运动旋量

图 5 中球面 4R 机构连杆 3 在运动链 R_4R_3 中, 其运动旋量可表示为

$$\omega_{4R}S_{4R} = \omega_{R4}S_{R4} + \omega_{R3}S_{R3} \quad (25)$$

连杆 3 瞬时转动旋量轴线是 S_1, S_2 轴线所在平面与 S_4, S_3 轴线所在平面的交线, 即连杆 3 瞬时转动旋量与 S_i 的互易积为零, 即

$$S_{4R} \circ S_{Ri} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (26)$$

连杆 3 上点 B 速度可表示为

$$v_{B1} = \omega_{4R}S_{4R} \times r_{B1} \quad (27)$$

式中, r_{B1} 表示点 B 到瞬时转动轴线 S_{4R} 的位置矢量。点 B_1 为球面 4R 机构杆 3 上点 B 连杆轨迹上 1 点, 对应图 5a 所示球面 4R 机构位形。此位形下, 点 B_1 速度方向为 v_1 , 其方向沿杆 3 上点 B 轨迹上 B_1 的切线。

图 5b 为运动链 $R_5R_6R_7$, 转动副 R_5, R_6, R_7 轴线共面于 π_1 。连杆 6 上点 B_1 速度可表示为

$$v_{B1} = (\omega_{R5}S_{R5} + \omega_{R6}S_{R6} + \omega_{R7}S_{R7}) \times r_{B1} \quad (28)$$

运动链 $R_5R_6R_7$ 转动副轴线相交于点 O, 且转动副轴线共面 π_1 , 其法线方向平行图 5b 中矢量 n 。运动链 $R_5R_6R_7$ 末端 B_1 可绕面 π_1 中过点 O 的任意轴线进行转动。当运动链 $R_5R_6R_7$ 末端 B_1 绕过点 O、 B_1 的轴线 S_1 转动时, 此时点 B_1 速度为零。当运动链 $R_5R_6R_7$ 末端 B_1 绕非轴线 S_1 转动时, 此时点 B_1 速度方向沿 v_2 , 平行于面 π_1 法线矢量 n 。

将图 5 中的 2 条运动链进行装配, 得到图 6 所示球面 7R 机构, 点 B_1 为 2 条运动链上的重合点。基于图 5 中组成球面 7R 机构运动链末端点 B_1 的速度旋量分析, 可以对该机构进行运动模式分析。

2.2 具有锁定模式球面 7R 机构模式变换分析

(1) 球面 4R 环路 II 锁定模式

图 6a 杆 3 上点 B_1 速度为 v_1 , 运动链 $R_5R_6R_7$ 末端杆 3 上点 B_1 速度为 v_2 。

联立式 (27)、(28) 得到

$$\omega_{4R}S_{4R} = \omega_{R5}S_{R5} + \omega_{R6}S_{R6} + \omega_{R7}S_{R7} \quad (29)$$

由式 (29) 可知, ω_{4R} 有非零解时, S_{4R} 轴线与 S_{5R}, S_{6R}, S_{7R} 轴线所在平面共面。只有零解时, S_{4R} 轴线与 S_{5R}, S_{6R}, S_{7R} 轴线所在平面不共面。

图 6a 所示机构位形下, S_{4R} 轴线与 S_{5R}, S_{6R}, S_{7R} 轴线所在平面不共面, 点 B_1 具有两个方向不同的速度 v_1 和 v_2 , 点 B_1 的速度只能为零。此时, 球面 4R 环路 II 的 $R_1R_2R_3R_4$ 处于锁定模式, 即 $\omega_{4R} = 0$ 。图 6a 所示机构位形下, 转动副 R_7, R_5 轴线重合, 运动链

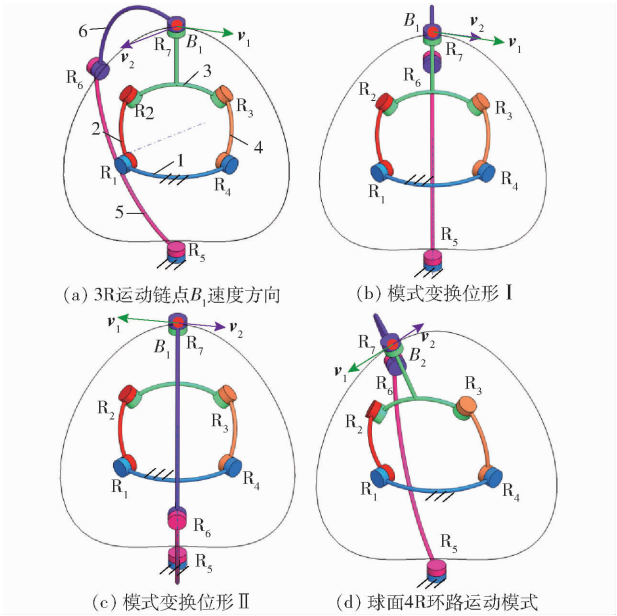


图6 具有运动和锁定模式的球面7R机构

Fig.6 Spherical 7R mechanism with motion and locking modes

$R_5R_6R_7$ 可绕转动副 R_5 轴线整周旋转,连杆6具有定轴转动运动模式。

(2)球面4R环路Ⅱ运动模式

当运动链 $R_5R_6R_7$ 整体绕转动副 R_5 轴线旋转为图6b所示机构位形, S_{4R} 轴线与 S_{5R} 、 S_{6R} 、 S_{7R} 轴线所在平面共面,此时式(29)中 ω_{4R} 有非零解,机构处于运动模式变换位形。该位形下,球面4R环路Ⅱ杆3上点 B_1 的速度方向 v_1 与运动链 $R_5R_6R_7$ 末端点 B_1 速度 v_2 方向相同。此时杆3上点 B 可以沿 v_1 方向产生瞬时运动,运动链 $R_5R_6R_7$ 将离开如图6b所示运动链折叠奇异位形。此时,运动链 $R_5R_6R_7$ 末端可实现绕转动中心点 O 的三维转动,从而运动链 $R_5R_6R_7$ 不在杆3上施加约束力偶。即球面4R环路Ⅱ可由锁定模式变换为运动模式,机构可运动到图6d所示位形。

机构在运动模式变换位形时(图6b),当运动链 $R_5R_6R_7$ 整体绕转动副 R_5 轴线旋转 180° 后,机构处于图6c所示位形。球面4R环路Ⅱ杆3上点 B_1 的速度 v_1 与运动链 $R_5R_6R_7$ 末端点 B_1 速度 v_2 方向相同,此时球面4R环路Ⅱ也可由锁定模式变换为运动模式。

2.3 运动和锁定模式的双环球面7R机构位形特征

根据图6中具有运动和锁定模式的双环球面7R机构运动模式变换过程的分析,可总结此类机构3个特征。

(1)运动模式变换时,运动链 $R_5R_6R_7$ 杆3上点的速度方向,应与球面4R环路Ⅱ $R_1R_2R_3R_4$ 杆3上同一点的速度方向相同。一个构件上一点具有2个

方向的速度时,2个方向的速度应为0。球面4R环路Ⅱ锁定模式下,对应式(29)的 ω_{4R} 只有零解。球面4R环路Ⅱ运动模式下,对应式(29)的 ω_{4R} 只有唯一非零解。球面4R环路Ⅱ处于运动模式变换位形下,对应式(29)的 ω_{4R} 有非零解。

(2)运动模式变换时,运动链 $R_5R_6R_7$ 中转动副 R_5 、 R_7 轴线重合。转动副 R_5 、 R_7 轴线重合,通过运动链 $R_5R_6R_7$ 整体绕转动副 R_5 轴线转动,改变运动链 $R_5R_6R_7$ 末端杆的速度方向,可使得球面4R环路Ⅱ $R_1R_2R_3R_4$,在静止状态下,实现其在运动和锁定模式间的变换。此时,对应运动链 $R_5R_6R_7$ 具有1个局部转动自由度,改变转动副 R_6 的空间方向,即可改变式(29)中运动旋量 S_{R_6} ,使得式(29)中 ω_{4R} 的解产生改变,从而使得机构运动模式可以进行变换。

3 球面7R机构运动模式变换位形旋量分析

根据第2节可知,球面4R环路Ⅱ从锁定模式变换为运动模式的位形时,其杆3上点的轨迹切线应与运动链 $R_5R_6R_7$ 末端的轨迹切线重合。一般情况下,机构运动模式变换时,机构处于约束奇异位形。对应球面4R环路Ⅱ杆3的运动旋量与转动副 R_5 、 R_6 、 R_7 轴线对应的 S_{R_5} 、 S_{R_6} 、 S_{R_7} 旋量共面,此时可通过确定球面4R机构连杆的运动旋量,确定机构运动模式变换位形,即运动链 $R_5R_6R_7$ 的空间位形。

3.1 连杆轨迹处于运动分岔位形旋量分析

(1)运动模式变换条件

如图7a所示,在球面4R机构的一般位形下,杆3的运动旋量的主部,可通过转动副 R_1 、 R_2 轴线所在平面,与转动副 R_3 、 R_4 轴线所在平面的交线确定,即图7a中 S_{4R1} 。球面4R机构在约束奇异位形下,如图7b所示。杆3的瞬时转动轴线为图7b中的 S_{4R2} 、 S_{4R3} 。杆3上在图7c所示位形点 C_2 的速度方向可由 $S_{4R2} \times r$ 或 $S_{4R3} \times r$ 表示。

图7c中运动链 R_5 、 R_7 的转动副轴线过点 C_2 ,运动链 $R_5R_6R_7$ 杆3上与点 C_2 的重合点,瞬时移动方向只与转动副 R_6 的转动轴线有关,速度方向为 $S_6 \times r$ 。可以发现,图7c所示运动模式变换位形下, S_{R_6} 、 S_{4R2} 、 r 共面。得到

$$S_{4R2} \times S_{R_6} \cdot r = 0 \tag{30}$$

同理,图7d所示运动模式变换位形下, S_{R_6} 、 S_{4R3} 、 r 共面,即

$$S_{4R3} \times S_{R_6} \cdot r = 0 \tag{31}$$

图7c、7d所示机构位形,分别满足式(30)、(31),杆3上点 C_2 的轨迹切线与运动链 $R_5R_6R_7$ 杆3上点 C_2 的轨迹切线重合,机构可以实现运动模式变换。

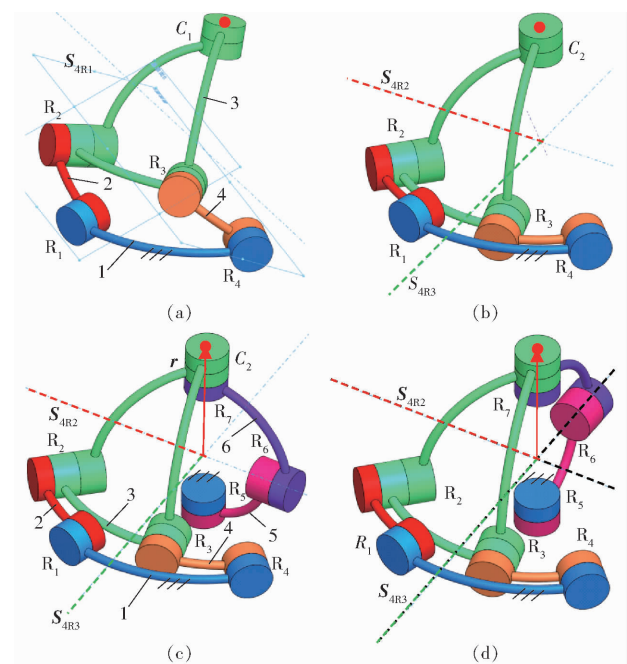


图 7 球面 4R 机构连杆瞬时轴线与模式变换位形的关系
Fig. 7 Relationship between instantaneous axis and motion mode transformation configuration of spherical 4R mechanism

图 7b 所示机构中球面具有运动分岔特性, 基于其构建的具有运动和锁定模式的球面双环 7R 机构, 如图 7c、7d 所示, 通过改变运动链 $R_5 R_6 R_7$ 的位形, 不仅可以实现球面 4R 环路中杆 3 在锁定和运动模式间变换, 还可以实现其在运动旋量 S_{4R1} 与 S_{4R2} 对应的 2 种运动模式间变换。

(2) 奇异位形连杆转动轴线分析

球面 4R 环路处于约束奇异位形时, 其连杆具有 2 条不重合的瞬时转动轴线, 其空间方向可通过计算确定。

当球面 4R 环路 4 个转动副 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 对应定坐标系中的旋量分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 、 S_4 , 可得到

$$\omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 + \omega_3 S_3 + \omega_4 S_4 = \mathbf{O} \quad (32)$$

式中 $\mathbf{O}$ ——零向量

式(32)关于时间 t 求导得^[23-25]

$$\begin{aligned} & \dot{\omega}_1 S_1 + \dot{\omega}_2 S_2 + \dot{\omega}_3 S_3 + \dot{\omega}_4 S_4 + \\ & \omega_1 S_1 \times (\omega_2 S_2 + \omega_3 S_3 + \omega_4 S_4) + \\ & \omega_2 S_2 \times (\omega_3 S_3 + \omega_4 S_4) + \\ & \omega_3 S_3 \times \omega_4 S_4 = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (33)$$

将式(32)代入式(33)得到

$$\begin{aligned} & \dot{\omega}_1 S_1 + \dot{\omega}_2 S_2 + \dot{\omega}_3 S_3 + \dot{\omega}_4 S_4 - \\ & \omega_1 \omega_2 S_2 \times S_1 + \omega_3 \omega_4 S_3 \times S_4 = \mathbf{O} \end{aligned} \quad (34)$$

当球面 4R 环路 4 个转动副轴线共面时, 矢量 $S_2 \times S_1$ 与 $S_3 \times S_4$ 方向相同, 且其均与球面 4R 机构转动副轴线垂直, 根据式(34)可得到

$$-\omega_1 \omega_2 \cos \alpha_{21} + \omega_3 \omega_4 \cos \alpha_{34} = 0 \quad (35)$$

式中 α_{21} 、 α_{34} 分别为旋量 S_2 、 S_1 轴线的夹角和 S_3 、 S_4

轴线的夹角。

由式(32)可得到关于 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 的 2 个独立的线性方程, 式(35)为关于 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 的 1 个独立的非线性方程。将式(32)、(35)联立, 可将 ω_2 、 ω_3 、 ω_4 分别用 ω_1 表示。球面 4R 环路杆 3 的运动旋量可表示为

$$\omega_{4R} S_{4R} = \omega_1 S_1 + \omega_2 S_2 \quad (36)$$

将式(36)中 ω_2 用 ω_1 表示, 即可确定旋量 S_{4R} 。根据式(30)、(31), 可确定连杆旋量 S_{4R} 与转动副 R_6 的空间关系, 即可确定运动模式变换时, 运动链 $R_5 R_6 R_7$ 的空间位形。

3.2 连杆轨迹处于尖点位形旋量分析

如图 8a 所示, 杆 3 运动旋量 S_{4R} 主部对应矢量与杆 3 上点 D_1 的位置矢量重合, 此时杆 3 上点 D_1 轨迹对应为 1 个尖点, 该尖点具有 2 条重合的切线。如图 8b 所示, 由于杆 3 运动旋量 S_{4R} 轴线与杆 3 上点的位置矢量 r 重合, 恒满足式(30), 即 S_{4R} 、 S_6 、 r 共面。可以发现图 8b 机构位形下, 当连杆 7 绕转动副 R_5 、 R_7 轴线定轴转动时, S_{4R} 、 S_6 、 r 总是共面。

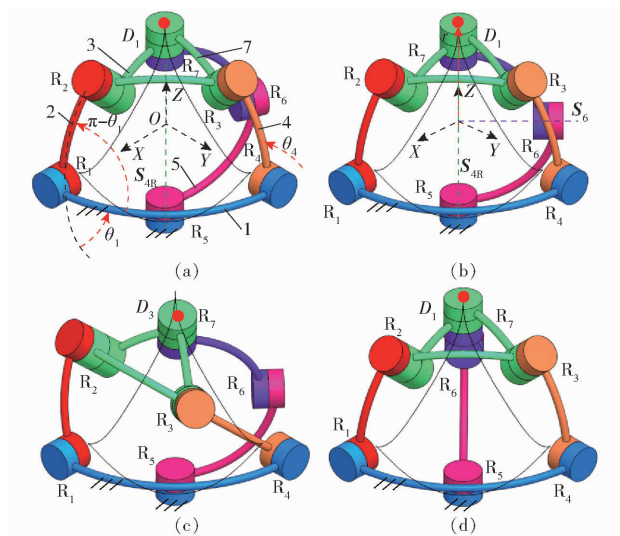


图 8 球面 4R 环路连杆轨迹尖点位形 7R 机构模式变换
Fig. 8 Spherical 4R loop link curve sharp point position of 7R mechanism mode transformation

然而, 实际上该机构并不能在任意位形下, 实现运动与锁定模式变换。在此特殊情况下, 根据 3.1 节内容, 结合式(30)、(36), 不能确定运动模式变换位形。

球面 4R 机构杆 3 在定坐标系 $OXYZ$ 中的旋量为 S_{4R} , 可得到机构速度约束方程为

$$\omega_5 S_5 + \omega_6 S_6 + \omega_7 S_7 + \omega_{4R} S_{4R} = \mathbf{O} \quad (37)$$

式(37)中 S_5 、 S_7 、 S_{4R} 重合, 且与 S_6 不重合, 可得

$$\omega_6 = 0 \quad (38)$$

式(37)关于时间 t 求导, 得到

$$\begin{aligned} &\dot{\omega}_5\boldsymbol{S}_5 + \dot{\omega}_6\boldsymbol{S}_6 + \dot{\omega}_7\boldsymbol{S}_7 + \dot{\omega}_{4R}\boldsymbol{S}_{4R} + \boldsymbol{\omega}_{4R}\dot{\boldsymbol{S}}_{4R} + \\ &\boldsymbol{\omega}_5\boldsymbol{S}_5 \times (\boldsymbol{\omega}_6\boldsymbol{S}_6 + \boldsymbol{\omega}_7\boldsymbol{S}_7 + \boldsymbol{\omega}_{4R}\boldsymbol{S}_{4R}) + \\ &\boldsymbol{\omega}_6\boldsymbol{S}_6 \times (\boldsymbol{\omega}_7\boldsymbol{S}_7 + \boldsymbol{\omega}_{4R}\boldsymbol{S}_{4R}) + \\ &\boldsymbol{\omega}_7\boldsymbol{S}_7 \times \boldsymbol{\omega}_{4R}\boldsymbol{S}_{4R} = \boldsymbol{O} \end{aligned} \tag{39}$$

将式(37)、(38)代入式(39),得到

$$\dot{\omega}_5\boldsymbol{S}_5 + \dot{\omega}_6\boldsymbol{S}_6 + \dot{\omega}_7\boldsymbol{S}_7 + \boldsymbol{\omega}_{4R}\dot{\boldsymbol{S}}_{4R} + \dot{\omega}_{4R}\boldsymbol{S}_{4R} = \boldsymbol{O} \tag{40}$$

(1) 当 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 与 $\boldsymbol{S}_5$ 、 $\boldsymbol{S}_6$ 、 $\boldsymbol{S}_7$ 不共面时

由于运动模式变换时, $\boldsymbol{S}_{4R}$ 与 $\boldsymbol{S}_5$ 、 $\boldsymbol{S}_6$ 、 $\boldsymbol{S}_7$ 共面, 根据式(40)可得到

$$\boldsymbol{\omega}_{4R} = \boldsymbol{0} \tag{41}$$

根据第 2 节内容, 机构在锁定和运动模式间变换时, 转动副 R_5 、 R_7 重合, 即

$$\boldsymbol{S}_5 = \boldsymbol{S}_7 \tag{42}$$

将式(38)、(41)、(42)代入式(37)得到

$$\boldsymbol{\omega}_5 = -\boldsymbol{\omega}_7 \tag{43}$$

根据式(43)可知, 此时机构只能做绕转动副 R_5 、 R_7 轴线的定轴转动运动模式, 球面 4R 环路Ⅱ不能进行运动模式变换。

(2) 连杆瞬心迹的切线 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 与 $\boldsymbol{S}_5$ 、 $\boldsymbol{S}_6$ 、 $\boldsymbol{S}_7$ 共面时

根据 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 与 $\boldsymbol{S}_5$ 、 $\boldsymbol{S}_6$ 、 $\boldsymbol{S}_7$ 不共面时的分析结果可知, 机构在运动模式变换时, $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 与 $\boldsymbol{S}_5$ 、 $\boldsymbol{S}_6$ 、 $\boldsymbol{S}_7$ 必定共面。

综上所述, 通过确定 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 的方向, 即可确定图 8 中机构运动模式变换位形。

3.3 球面 4R 环路连杆瞬心迹切线

球面 4R 连杆运动旋量主部 $\boldsymbol{S}_{4R}$ 末端曲线即为瞬心迹, 根据空间曲线的性质可知, 该瞬心迹的切线与矢量 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 平行。因而, 可通过求解瞬心迹切线, 确定矢量 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 。

如图 8a 所示, 球面 4R 机构杆 3, 在非约束奇异位形时的瞬时轴线旋量主部, 可根据转动副 R_1 、 R_2 轴线所在平面与转动副 R_3 、 R_4 轴线所在平面的交线确定, 即

$$\boldsymbol{S}_{4R} = [f_x(\theta_1, \theta_4) \quad f_y(\theta_1, \theta_4) \quad f_z(\theta_1, \theta_4)]^T \tag{44}$$

式(44)中 θ_1 、 θ_4 分别为转动副 R_1 、 R_4 的关节转角, $f_x(\theta_1, \theta_4)$ $f_y(\theta_1, \theta_4)$ $f_z(\theta_1, \theta_4)$ 分别为 $\boldsymbol{S}_{4R}$ 在 3 个坐标轴分量。

可将 θ_4 、 $\boldsymbol{S}_{4R}$ 均看作为 θ_1 的函数, 任意非奇异位形下, 可得到方向矢量 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 为

$$\dot{\boldsymbol{S}}_{4R} = \frac{\partial \boldsymbol{S}_{4R}}{\partial \theta_4} \frac{d\theta_4}{d\theta_1} + \frac{\partial \boldsymbol{S}_{4R}}{\partial \theta_1} \tag{45}$$

可建立球面 4R 机构运动学方程

$$g(\theta_1 \quad \theta_4) = 0 \tag{46}$$

对式(46)关于 θ_1 求导, 得到

$$\frac{d\theta_4}{d\theta_1} = h(\theta_1 \quad \theta_4) \tag{47}$$

将式(47)代入式(45), 即可得到 $\dot{\boldsymbol{S}}_{4R}$ 。

根据 3.2 节内容, 即可确定具有运动和锁定模式球面 7R 机构, 运动模式变换位形下, 运动链 $R_5R_6R_7$ 的空间位置姿态, 即可确定机构运动模式变换位形。

3.4 算例

如图 8a 所示, α_{ij} 为转动副 R_i 和 R_j 轴线夹角。

$\alpha_{14} = \alpha_{15} = \alpha_{45} = \alpha_{56} = \alpha_{67} = \pi/2$, $\alpha_{23} = \pi/3$, $\alpha_{12} = \alpha_{27} = \alpha_{37} = \alpha_{34} = \pi/4$ 。机构位形下(图 8a), 杆 3 的瞬时转动轴线为 $\boldsymbol{S}_{4R}$, 轴线 $\boldsymbol{S}_{4R}$ 与转动副 R_5 、 R_7 轴线共线, 此时杆 3 可绕 R_5 轴线作定轴转动。

图 8a 球面 4R 环路 $R_1R_2R_3R_4$ 杆 3 在非约束奇异位形时的瞬时轴线旋量, 可根据转动副 R_1 、 R_2 轴线所在平面与转动副 R_4 、 R_3 轴线所在平面的交线确定。

建立图 8a 所示坐标系, 球面 4R 环路 $R_1R_2R_3R_4$ 的 4 个转动副轴线相交于点 O 。转动副 R_1 的轴线与 X 轴重合, 转动副 R_4 的轴线在 XOY 平面内。

转动副 R_1 、 R_2 轴线所在平面的法线在 $OXYZ$ 坐标系中向量为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \end{bmatrix} \tag{48}$$

转动副 R_4 、 R_3 轴线所在平面的法线在 $OXYZ$ 坐标系中向量为

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_{14} & -\sin\alpha_{14} & 0 \\ \sin\alpha_{14} & \cos\alpha_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 \\ 0 & \sin\theta_4 & \cos\theta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha_{14}\sin\theta_4 \\ -\cos\alpha_{14}\sin\theta_4 \\ \cos\theta_4 \end{bmatrix} \tag{49}$$

与式(48)、(46)中矢量均垂直, 且过转动中心 O 的直线, 为转动副 R_1 、 R_2 所在平面, 与转动副 R_4 、 R_3 所在平面的交线, 该交线方向矢量为

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta_1 \\ -\cos\theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha_{14}\sin\theta_4 \\ -\cos\alpha_{14}\sin\theta_4 \\ \cos\theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_1\cos\theta_4 - \cos\alpha_{14}\cos\theta_1\sin\theta_4 \\ -\sin\alpha_{14}\cos\theta_1\sin\theta_4 \\ \sin\alpha_{14}\sin\theta_1\sin\theta_4 \end{bmatrix} \tag{50}$$

式中方向矢量即为省略对偶部的旋量 $\boldsymbol{S}_{4R}$ 。

如图 9 所示,瞬时轴线 S_{4R} 根据关节转角 θ_1 、 θ_4 变化,从而形成一个直纹面 Σ_r ,点 (x,y,z) 在空间的轨迹为在直纹面 Σ_r 上的曲线 Γ_r ,曲线 Γ_r 上任意一点的坐标为转角 θ_1 、 θ_4 的函数,根据球面 4R 机构运动学方程, θ_4 可作为 θ_1 的函数,则该曲线 Γ_r 上任意非奇异点的切线方向矢量为 $\dot{S}_{4R}$,可根据式(50)得到。对式(50)中关于省略对偶部的旋量 S_{4R} 分别关于 θ_1 求偏导,得到

$$\begin{aligned} \dot{S}_{4R} = & \left((\sin\theta_1 \sin\theta_4 - \cos\alpha_{14} \cos\theta_1 \cos\theta_4) \frac{d\theta_4}{d\theta_1} - \right. \\ & \cos\theta_1 \cos\theta_4 + \cos\alpha_{14} \sin\theta_1 \sin\theta_4, -\sin\alpha_{14} \cos\theta_1 \cos\theta_4 \frac{d\theta_4}{d\theta_1} + \\ & \sin\alpha_{14} \sin\theta_1 \sin\theta_4, \sin\alpha_{14} \sin\theta_1 \cos\theta_4 \frac{d\theta_4}{d\theta_1} + \\ & \left. \sin\alpha_{14} \cos\theta_1 \sin\theta_4 \right)^T \end{aligned} \quad (51)$$

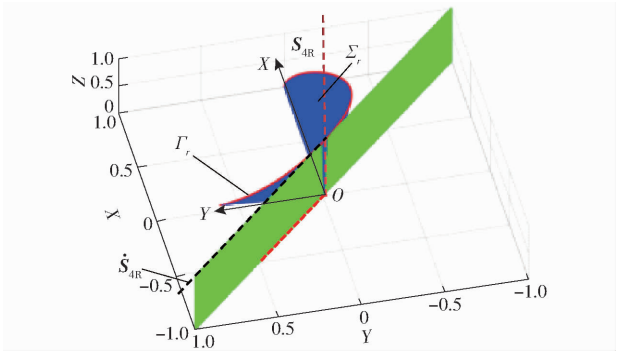


图 9 球面 4R 环路 $R_1R_2R_3R_4$ 杆 3 的瞬面

Fig.9 Axode of link 3 in spherical 4R loop $R_1R_2R_3R_4$

对球面 4R 机构运动学方程^[10]关于 θ_1 求导,可得到

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_4}{d\theta_1} = & -(\sin\alpha_{34} \cos\alpha_{14} \sin\alpha_{12} \cos\theta_4 \sin\theta_1 + \\ & \sin\alpha_{34} \sin\alpha_{12} \sin\theta_4 \cos\theta_1 + \cos\alpha_{34} \sin\alpha_{14} \sin\alpha_{12} \sin\theta_1) / \\ & (\sin\alpha_{34} \sin\alpha_{14} \cos\alpha_{12} \sin\theta_4 + \sin\alpha_{34} \cos\alpha_{14} \sin\alpha_{12} \sin\theta_4 \cos\theta_1 + \\ & \sin\alpha_{34} \sin\alpha_{12} \cos\theta_4 \sin\theta_1) \end{aligned} \quad (52)$$

如图 9 所示,将图 8a 中结构参数和关节转角 $\theta_1 = \theta_4 = \pi/2$ 代入式(51),得到图 8a 机构位形下, $\dot{S}_{4R}$ 的矢量为 $(-1,1,0)^T$ 。图 8a 中运动链 $R_5R_6R_7$ 整体绕 R_5 轴线旋转,使得运动链 $R_5R_6R_7$ 转动副所在平面与 $\dot{S}_{4R}$ 平行,如图 8b 所示,此时运动链 $R_5R_6R_7$ 末端的点 D_1 的速度方向与杆 3 上点 D_1 的速度重合。图 8b 所示机构位形下,可以实现运动与锁定两种运动模式的变换。

4 结论

- (1)球面 4R 机构连杆上设置折叠 3R 运动链,可以设计具有运动和锁定模式的球面 7R 双环机构。通过算例,验证了球面 4R 机构连杆轨迹计算方法的正确性。基于连杆曲线的切线方向,使用旋量理论确定了机构运动和锁定模式变换的位形特征。
- (2)对球面 7R 机构使用旋量理论进行速度、角加速度分析,分析球面 4R 机构约束奇异位形、连杆曲线尖点对应机构位形下,连杆瞬时转动轴线特征,确定了具有运动和锁定模式的球面 7R 机构运动模式变换位形,得到了此类机构运动模式变换的必要条件。

参 考 文 献

[1] 李永泉,蔡俊,李玉昆,等. 运动分岔并联机构运动学性能分析[J]. 农业机械学报,2023,54(4):447-458.
LI Yongquan, CAI Jun, LI Yukun, et al. Kinematics performance analysis of bifurcation parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(4): 447-458. (in Chinese)

[2] LIN R, GUO W. Type synthesis of reconfiguration parallel mechanisms transforming between trusses and mechanisms based on friction self-locking composite joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 168:104597.

[3] DHARMAWAN A, VIBHUTE A, FOONG S, et al. A survey of platform designs for portable robotic welding in large scale structures[C]//2014 13th International Conference on Control Automation Robotics & Vision (ICARCV). IEEE, 2014: 1683-1688.

[4] HAO G, KONG X, HE X. A planar reconfigurable linear rigid-body motion linkage with two operation modes[J]. ARCHIVE Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part C, Journal of Mechanical Engineering Science, 2014, 228(16): 2985-2991.

[5] KONG X, JIN Y. Type synthesis of 3-DOF multi-mode translational/spherical parallel mechanisms with lockable joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96: 323-333.

[6] CHABLAT D, KONG X, ZHANG C. Kinematics, workspace and singularity analysis of a parallel robot with five operation modes[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2018, 10(3): 035001.

[7] PFURNER M. Synthesis and motion analysis of a single-loop 8R-chain[C]//4th IEEE/IFTOMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots (ReMAR). IEEE, 2018.

[8] PUTRAYUDANTO P, NURAHMI L, WEI G. Multi operation modes of 4-CRU parallel mechanism for 3D-printing building[M]. Singapore: Mechanism and Machine Science, 2021.

[9] KONG X. Type synthesis of 3-DOF parallel manipulators with both a planar operation mode and a spatial translational operation mode[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2013, 5(4): 0410151-0410158.

[10] 刘伟,刘宏昭,胡旭宇. 具有多模式球面 4R 机构结构参数研究[J]. 农业机械学报, 2022, 53(3): 440-448.

- LIU Wei, LIU Hongzhao, HU Xuyu. Structural parameters of spherical 4R mechanism with multiple modes[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(3): 440–448. (in Chinese)
- [11] KONG X. Reconfiguration analysis of a 3-DOF parallel mechanism using euler parameter quaternions and algebraic geometry method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 74(6): 188–201.
- [12] COX D, LITTLE J, OSHEA D. Ideals, varieties, and algorithms; an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, undergraduate texts in mathematics series[M]. Switzerland: Springer International Publishing, 2015.
- [13] GAO S. Factoring multivariate polynomials via partial differential equations[J]. Mathematics of Computation, 2001, 72(242): 801–822.
- [14] EISENBUD D, HUNEKE C, VASCONCELOS W. Direct methods for primary decomposition[J]. Inventiones Mathematicae, 1992, 110(1): 207–235.
- [15] 刘伟, 刘宏昭. 非结式消元 7R 双环球面机构运动学位移分析[J]. 机械工程学报, 2024, 60(7): 45–53.
LIU Wei, LIU Hongzhao. Kinematic position analysis of a 7R double loops spherical mechanism without resultant elimination [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(7): 45–53. (in Chinese)
- [16] 单彦霞, 张建伟, 于靖军, 等. 多模式并联机构操作模式变换方法研究[J]. 农业机械学报, 2020, 51(6): 396–403.
SHAN Yanxia, ZHANG Jianwei, YU Jingjun, et al. Operation mode transformation method of multi-mode parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(6): 396–403. (in Chinese)
- [17] GAN W, PELLEGRINO S. Numerical approach to the kinematic analysis of deployable structures forming a closed loop[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2006, 220(7): 1045–1056.
- [18] CHEN Y, YOU Z. Two-fold symmetrical 6R foldable frame and its bifurcations[J]. International Journal of Solids and Structures, 2009, 46(25–26): 4504–4514.
- [19] LÓPEZ-CUSTODIO P, MÜLLER A, KANG X, et al. Tangential intersection of branches of motion[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 147: 1037301.
- [20] MÜLLER A. Higher order local analysis of singularities in parallel mechanisms[C] // ASME 2002 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference-Montreal, 2002: 515–522.
- [21] TIAN H, MA H, XIA J, et al. Stiffness analysis of a metamorphic parallel mechanism with three configurations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 142: 103595.
- [22] SHAOPING B. Algebraic coupler curve of spherical four-bar linkages and its applications[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 158(1): 104218.
- [23] MARTINEZ J, DUFFY J. An application of screw algebra to the acceleration analysis of serial chains[J]. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(4): 445–457.
- [24] GALLARDO J, RICO J, FRISOLI A, et al. Dynamics of parallel manipulators by means of screw theory[J]. Mechanism & Machine Theory, 2003, 38(11): 1113–1131.
- [25] ARDEMA M. Analytical dynamics. Theory and applications[M]. New York, London: Kluwer Academic / Plenum, 2005.

(上接第 518 页)

- [17] 王越. 基于车联网信息的混合动力客车智能能量管理控制策略研究[D]. 长春: 吉林大学, 2020.
WANG Yue. Research on intelligent energy management strategy for hybrid electric bus based on vehicular network information [D]. Changchun: Jilin University, 2020. (in Chinese)
- [18] 裴焕鑫. 功率分流式混合动力汽车分层拓扑图建模与构型方案的研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2021.
PEI Huanxin. Modeling and design of power split hybrid electric vehicle using hierarchical topological graph theory [D]. Chongqing: Chongqing University, 2021. (in Chinese)
- [19] 张俊. 混合动力汽车双模 EVT 构型分析[D]. 长春: 吉林大学, 2016.
ZHANG Jun. Analysis of configuration of two-mode EVT for hybrid electric vehicle [D]. Changchun: Jilin University, 2016. (in Chinese)
- [20] 张镇宇. 基于综合效率优化的混动列车能量管理策略设计[D]. 重庆: 重庆大学, 2022.
ZHANG Zhenyu. Design of energy management strategy for hybrid railway based on comprehensive efficiency optimization [D]. Chongqing: Chongqing University, 2022. (in Chinese)
- [21] ZHANG J, FENG G, YAN X, et al. Cooperative control method considering efficiency and tracking performance for unmanned hybrid tractor based on rotary tillage prediction[J]. Energy, 2024, 288: 129874.
- [22] 李金凤, 张学敏, 宋正河, 等. 基于 TRIZ 理论的分布式混合动力拖拉机动力系统设计及验证[J/OL]. 吉林大学学报(工学版); 2023: 1–17.
LI Jinfeng, ZHANG Xuemin, SONG Zhenghe, et al. Design and experiment of distributed hybrid electric tractor powertrain system based on TRIZ theory[J/OL]. Journal of Jilin University(Engineering and Technology Edition), 2023, 1–17. <https://doi.org/10.13229/j.cnki.jdxbgxb.20230217>. (in Chinese)
- [23] 西蒙娜·奥诺里, 洛伦佐·塞拉奥, 乔治·里佐尼. 混合动力汽车能量管理策略[M]. 胡晓松, 唐小林, 刘腾, 译. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [24] 张俊江, 冯湛辉, 徐立友, 等. 基于庞特里亚金极小值原理的混合动力拖拉机节能控制[J]. 农业机械学报, 2023, 54(5): 396–406.
ZHANG Junjiang, FENG Ganghui, XU Liyou, et al. Energy-saving control of hybrid tractor based on Pontryagin's minimum principle[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(5): 396–406. (in Chinese)