

# 面向狭长空间的三自由度并联机器人设计与建模

徐冬梅<sup>1</sup> 刘湘龙<sup>1</sup> 于思淼<sup>2</sup> 徐超<sup>1</sup> 杨帆<sup>1</sup> 曹维清<sup>3</sup>

(1. 西安科技大学机械工程学院, 西安 710054; 2. 西安建筑科技大学机电工程学院, 西安 710055;  
3. 芜湖哈特机器人产业技术研究院有限公司, 芜湖 241000)

**摘要:** 并联机器人因具有刚度大、结构稳定、承载能力大和运动负荷小等优点, 在农业和工业等领域得到了广泛的应用。现有大部分并联机器人因支链呈空间对称分布, 难以进入狭长空间工作。因此, 针对狭长的工作环境, 提出了一种新型三自由度并联结构, 该机构整体沿一条直线导轨方向布置, 减少了垂直于导轨方向的宽度, 使之易于放入狭窄的空间内, 同时能拥有较大工作空间, 并实现3个自由度上的平动运动。通过G-K公式计算机构自由度; 验证了该并联机器人设计的合理性; 对平台进行了运动学和动力学分析; 并根据遗传算法分析其奇异点; 通过解析法对机构工作空间进行了分析。研究成果为三自由度并联机器人进入狭长空间工作提供了新的思路与构型。

**关键词:** 并联机器人; 三自由度; 运动学; 动力学; 狹长空间

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2024)01-0426-10

OSID:



## Design and Modeling of Novel Three Degree-of-freedom Parallel Robot for Narrow Space

XU Dongmei<sup>1</sup> LIU Xianglong<sup>1</sup> YU Simiao<sup>2</sup> XU Chao<sup>1</sup> YANG Fan<sup>1</sup> CAO Chuqing<sup>3</sup>

(1. College of Mechanical Engineering, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China

3. Wuhu HIT Robot Technology Research Institute Co., Ltd., Wuhu 241000, China)

**Abstract:** Parallel robots are widely studied for the advantages of high stiffness, stable structure, large bearing capacity and small motion load, and have been widely used in agricultural and industrial fields. Due to the distribution of branch chains, most of the existing parallel robots cannot work in a long and narrow space while having a large working space. Therefore, for the narrow and long working environment, a three-degree of freedom parallel mechanism was proposed. The whole mechanism was arranged along a linear guide rail direction, reducing the width perpendicular to the guide rail direction, so that it was easy to fit into a narrow space, while having a large working space, and realizing translational motion on three degrees of freedom. The degree of freedom of the mechanism was calculated by G-K formula and the rationality of the design of parallel robot was verified. The kinematics and dynamics of the platform were analyzed. The singularity was analyzed by genetic algorithm. Finally, the kinematics and dynamics simulation were carried out in ADAMS software, by comparing with the mathematical model in Simulink software, the error of the two results was generally less than 0.05%, which showed that the mathematical model was correct. The working space of the mechanism was analyzed by analytical method. The research results can provide an idea and structure for 3-DOF parallel robot working in narrow and long space. It can also provide a theoretical basis for the mathematical modeling of the structure.

**Key words:** parallel robot; three degrees of freedom; kinematics; dynamics; narrow space

收稿日期: 2023-06-02 修回日期: 2023-07-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(52005398)

作者简介: 徐冬梅(1987—), 女, 副教授, 博士, 主要从事并联机器人设计及控制和精密压电驱动研究, E-mail: dongmeixu@xust.edu.cn

## 0 引言

相较于串联机器人,并联机器人具有刚度高、精度高、承载能力强以及结构紧凑等特点<sup>[1-2]</sup>。基于并联机器人的特点,许多学者对其进行了研究。倪涛等<sup>[3]</sup>对 Stewart 并联机器人进行了柔顺控制策略研究;刘秀莹等<sup>[4]</sup>对球面并联机器人进行了运动学参数优化;FANG 等<sup>[5]</sup>提出了一种新型的冗余驱动并联机构 2UPR&-1RPS&1RPU 的拓扑结构。并联机器人已被广泛应用于农业、加工制造装配、轻工业和医疗器械等诸多领域<sup>[6-11]</sup>。除此之外,并联机器人还被广泛应用于特种加工、食品包装、天文望远镜、农业播种与采摘等诸多方面<sup>[12-13]</sup>。在工业生产应用中,一般机器人进行工作往往不需要用到完整的 6 个自由度,因此少自由度并联机器人便应运而生。少自由度并联机器人中应用最为广泛的为三自由度并联机器人<sup>[14]</sup>。许多学者对三自由度并联机器人进行了研究,赵磊等<sup>[15]</sup>针对 3-RRRU 并联机器人进行了运动学标定与误差分析,提高了控制精度;柴馨雪等<sup>[16]</sup>结合螺旋理论和虚功原理对 2-UPR-RPU 并联机器人进行了动力学建模和性能分析;FU 等<sup>[17]</sup>设计了一种基于工作空间的新型并联机器人,并对其运动学、工作空间、奇异性和平面干涉进行了分析;叶鹏达等<sup>[18]</sup>基于区间数学理论提出一种高精度、无漏判点的区间离散法;SLAVUTIN 等<sup>[19]</sup>提出基于螺旋理论和最小并联机器人奇异性判断依据;张青云等<sup>[20]</sup>对空间柔性并联机器人进行了动力学建模和振动仿真。李菊等<sup>[21]</sup>针对两支链三平移并联机构进行了动力学分析与性能优化。翟国栋等<sup>[22]</sup>对直线电机驱动六自由度并联机构进行了动力学特性研究。

在三自由度并联机器人研究中,针对应用于狭长工作空间的并联机器人研究很少,目前大部分并联机构在进入狭长空间工作时,因结构和支链空间分布的原因,难以保证机构拥有较大尺寸和工作空间。因此本文提出一种可用于狭长工作空间的三平动并联机构,并对其进行研究。

## 1 模型结构与工作原理

### 1.1 并联机构组成

本文所提到的三自由度并联机器人由 3 个压电直线电机、3 个滑块、导轨、4 条支链以及动平台组成,3 个电机安装在滑块上,电机带动滑块实现直线运动,从而通过支链来驱动动平台实现 3 平动的位移运动。两侧电机控制动平台沿  $X_A$  和  $Z_A$  方向位移,中间电机控制动平台沿  $Y_A$  方向位移。

本文设计导轨长度为 500 mm,上平台长度为 142 mm,宽度为 16 mm,  $l_{11}$ 、 $l_{12}$  和  $l_{13}$  分别为 125、90、155 mm, 铰点  $c_2$  到  $b_2$  和铰点  $a_2$  到  $c_2$  的水平距离均为 50 mm。而本机构实际应用中的尺寸可以根据工作场景中的实际需求而改变。其结构简图如图 1 所示。

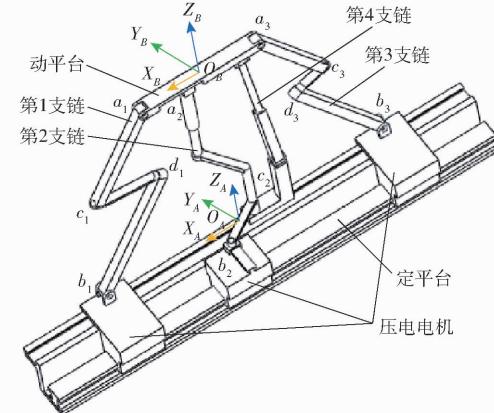


图 1 并联机器人结构简图

Fig. 1 Structure diagram of parallel robot

### 1.2 并联机器人工作原理

并联机器人采用四支链结构,其中  $(a_1, b_1)$ 、 $(a_2, b_2)$  和  $(a_3, b_3)$  所在的支链分别为机构第 1、第 2 和第 3 支链。而余下的 1 条支链为机构第 4 支链,该支链没有驱动能力,而是在第 1、3 支链上电机在带动动平台运动的同时,该支链跟随动平台产生运动。第 1 支链和第 3 支链上电机驱动,经过两支链传递,从而实现该机构动平台在  $X_A$  轴方向和  $Z_A$  轴方向产生运动,该机构在  $X_A$  轴方向上的运动空间受导轨长度限制,第 2 支链由于电机驱动作用,支链上  $c_2$  和  $b_2$  的相对位置产生变化,使得该机构能够实现在  $Y_A$  方向上的运动。图 2 为该新型机构三维模型图。

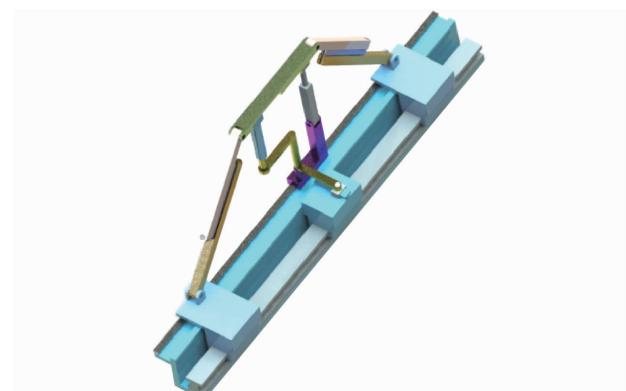


图 2 并联机器人模型图

Fig. 2 Model diagram of parallel robot

### 1.3 并联机器人自由度

该机构有 17 个构件(包含机架),机构运动副包含 12 个转动副、6 个移动副和 1 个圆柱副,通过

修正的 G-K 公式计算该机构自由度为

$$f = 6(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + u = 3 \quad (1)$$

式中  $f$ —并联机器人自由度

$n$ —组成构件数(包括机架)

$g$ —运动副数目

$f_i$ —第  $i$  个运动副自由度

$u$ —机构过约束总数

当定平台小导轨上的滑块与中间压电电机产生相对运动时,即点  $b_2$  和  $c_2$  产生相对运动时,会使上平台产生  $Y_A$  轴方向的平动,两端电机对向运动会带动上平台产生  $Z_A$  轴平动,而两端电机同向运动会带动上平台产生  $X_A$  轴平动,并联机构的 3 个平动自由度,又因为第 4 支链靠动平台侧的转动副限制了动平台绕  $Y_A$  轴的转动,第 1 和第 3 支链上靠动平台侧的 2 个转动副限制了动平台绕  $X_A$  和  $Z_A$  轴的转动,可知本并联机构为三自由度平动并联机构。

## 2 运动学建模

并联机器人运动学反解是已知动平台位姿参数求解机构各驱动变量的过程,而运动学正解是已知各驱动变量求解动平台位姿的过程<sup>[23]</sup>。

对于本文的并联机构,运动学反解是在已知动平台 3 个平动运动参数求解驱动机构运动的 3 个驱动电机的运动参数,运动学正解是已知 3 个驱动电机的运动参数求解动平台 3 个平动运动参数。

### 2.1 位置反解建模

以初始位置处下铰点的连线中心为原点建立静坐标系  $O_A X_A Y_A Z_A$ ,  $X_A$  轴平行于电机所在导轨方向,  $Y_A$  轴指向初始位置下的动平台中心;以动平台中心为原点建立动坐标系  $O_B X_B Y_B Z_B$ ,  $X_B$  轴指向上铰点  $a_1$  方向,  $Y_B$  轴平行于  $Y_A$  轴方向。并联机器人结构示意图如图 3 所示。

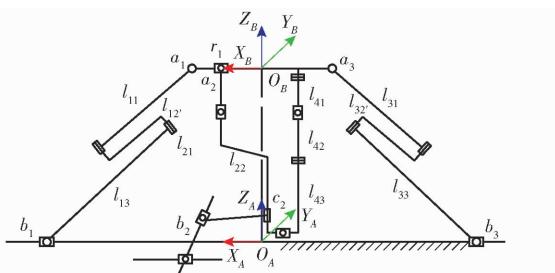


图 3 并联机器人结构示意图

Fig. 3 Schematic structure diagram of parallel robot

静坐标系原点到下铰点  $b_1$  的向量  $\mathbf{l}_{o_A b_1}$  可以表示为

$$\mathbf{l}_{o_A b_1} = \mathbf{l}_{o_B a_1} + \mathbf{l}_{o_A o_B} + \mathbf{l}_{11} + \mathbf{l}_{12} + \mathbf{l}_{13} \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{l}_{o_A o_B} = [X_{OB} \ Y_{OB} \ Z_{OB}]^T$$

$$\mathbf{l}_{o_B a_1} = [r_1 \ 0 \ 0]^T$$

式中  $\mathbf{l}_{12}$ —杆  $l_{11}$  和  $l_{13}$  转动中心的连线向量

对于下铰点  $b_1$  坐标的列矩阵可表示为

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} X_{OB} + r_1 + l_{ex} \\ 0 \\ Z_{OB} + l_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{b1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} l_{ex} &= (l_{11} + l_{13} - \sqrt{l_{12}^2 - Y_{OB}^2}) \cos\alpha - r_2 \sin\alpha \\ l_{ez} &= -(l_{11} + l_{13} - \sqrt{l_{12}^2 - Y_{OB}^2}) \sin\alpha - r_2 \cos\alpha \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $l_{ex}$ —向量  $\mathbf{l}_{a_1 b_1}$  在  $X_A$  方向上的投影

$l_{ez}$ —向量  $\mathbf{l}_{a_1 b_1}$  在  $Z_A$  方向上的投影

$X_{b1}$ —点  $b_1$  在  $X_A$  轴上的坐标

$l_{12}$ —杆  $l_{12}$  上两转动副轴线的距离

$r_2$ —向量  $\mathbf{l}_{11}$  和  $\mathbf{l}_{13}$  的距离在  $X_A O_A Z_A$  平面上的投影

通过  $Z$  轴方向的等式关系求得夹角  $\alpha$  为

$$\alpha = \arcsin \frac{Z_{OB} u - r_2}{\sqrt{r_2^2 - Z_{OB}^2 + u^2}} \quad (5)$$

其中  $u = l_{11} + l_{13} - \sqrt{l_{12}^2 - Y_{OB}^2}$

该支链驱动电机位移  $M_1$  为下铰点  $b_1$  在  $X_A$  轴方向位置相对其初始位置  $X_{01}$  的位移,即

$$M_1 = X_{b1} - X_{01} \quad (6)$$

沿  $Z_A$  负方向观察并联机器人如图 4 所示。

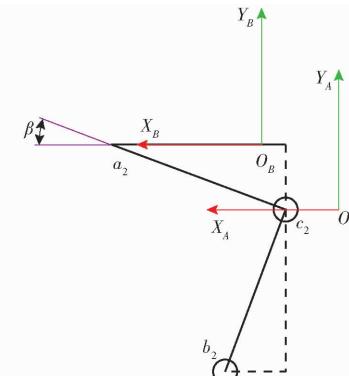


图 4 机构第 2 支链俯视示意图

Fig. 4 Schematic view of the second chain of mechanism

静坐标系原点到下铰点  $b_2$  的向量  $\mathbf{l}_{o_A b_2}$  可以表示为

$$\mathbf{l}_{o_A b_2} = \mathbf{l}_{o_A o_B} + \mathbf{l}_{o_B a_2} + \mathbf{l}_{a_2 c_2} + \mathbf{l}_{c_2 b_2} \quad (7)$$

其中  $\mathbf{l}_{o_A b_2} = [X_{b2} \ Y_{b2} \ 0]^T$  (8)

式中  $(X_{b2}, Y_{b2})$ —铰点  $b_2$  的坐标

该支链驱动电机位移  $M_2$  为点  $b_2$  在  $X_A$  轴方向位置相对其初始位置  $X_{02}$  的位移,即

$$M_2 = X_{b2} - X_{02} \quad (9)$$

其中

$$X_{b2} = X_{OB} + r_4 \sin\beta - X_{c_2 o_B}$$

式中  $r_4$ ——向量  $\mathbf{l}_{c_2 b_2}$  在  $X_A O_A Y_A$  平面的投影长度  
 $X_{c_2 O_B}$ ——点  $c_2$  和  $O_B$  之间的  $X$  轴方向上的距离,取定值  
 $\beta$ ——反解中  $\mathbf{l}_{a_2 c_2}$  与  $X_A$  轴的夹角

根据机构的几何关系有

$$l_{O_B a_2} = r_3 \cos\beta - X_{c_2 O_B} \quad (10)$$

其中  $\beta = \arcsin(Y_{O_B}/r_3)$

式中  $r_3$ —— $\mathbf{l}_{a_2 c_2}$  在  $X_A O_A Y_A$  平面的投影长度

整理各运动支链运动学方程为

$$\begin{cases} M_1 = X_{OB} + r_1 + l_{ex} - X_{01} \\ M_2 = X_{OB} + l_{O_B a_2} + r_4 \sin\beta - r_3 \cos\beta - X_{02} \\ M_3 = X_{OB} - r_1 - l_{ex} - X_{03} \end{cases} \quad (11)$$

式中  $M_3$ ——第3运动支链上的电机位移

$X_{03}$ ——机构初始位置电机在  $X_A$  轴上的位置

## 2.2 速度反解建模

根据式(11),其两端对时间求导可得该机器人速度方程为

$$\begin{cases} V_{b1} = \frac{dX_{OB}}{dt} + \frac{dl_{ex}}{dt} \\ V_{b2} = \frac{dX_{OB}}{dt} + \frac{d(r_4 \sin\beta)}{dt} - \frac{d(r_3 \cos\beta)}{dt} \\ V_{b3} = \frac{dX_{OB}}{dt} - \frac{dl_{ex}}{dt} \end{cases} \quad (12)$$

式中  $V_{b1}$ 、 $V_{b2}$ 、 $V_{b3}$ ——铰点  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  在  $X_A$  轴方向上速度,即电机驱动速度

并联机器人的速度雅可比矩阵是从整个机构的角度反映并联机器人输入构件的速度与输出构件速度关系的矩阵。因为并联机器人有着运动学反解容易、正解复杂的特点,所以在并联机器人的特性研究过程中,多用其逆速度雅可比矩阵<sup>[24]</sup>。其与构件输入输出速度之间存在关系

$$[V_{M1} \quad V_{M2} \quad V_{M3}]^T = \mathbf{J}_K [V_x \quad V_y \quad V_z]^T \quad (13)$$

式中  $V_{M1}$ 、 $V_{M2}$ 、 $V_{M3}$ ——电机驱动速度

$V_x$ 、 $V_y$ 、 $V_z$ ——动平台的上平台  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  方向上平动速度

$\mathbf{J}_K$ ——逆速度雅可比矩阵

通过整理和化简,逆速度雅可比矩阵表达式为

$$\mathbf{J}_K = \begin{bmatrix} 1 & \partial V_{M1} / \partial V_y & \partial V_{M1} / \partial V_z \\ 1 & r_4 / r_3 & 0 \\ 1 & \partial V_{M3} / \partial V_y & \partial V_{M3} / \partial V_z \end{bmatrix} \quad (14)$$

## 2.3 加速度反解建模

根据式(12),其两端对时间求导可得该机器人加速度方程为

$$\begin{cases} A_{b1} = \frac{d^2 X_{OB}}{dt^2} + \frac{d^2 l_{ex}}{dt^2} \\ A_{b2} = \frac{d^2 X_{OB}}{dt^2} + \frac{d^2 (r_4 \sin\beta)}{dt^2} - \frac{d^2 (r_3 \cos\beta)}{dt^2} \\ A_{b3} = \frac{d^2 X_{OB}}{dt^2} - \frac{d^2 l_{ex}}{dt^2} \end{cases} \quad (15)$$

式中  $A_{b1}$ 、 $A_{b2}$ 、 $A_{b3}$ ——铰点  $b_1$ 、 $b_2$ 、 $b_3$  在  $X_A$  轴方向上加速度,即电机驱动加速度

## 2.4 运动学正解建模

根据机构杆长条件和几何关系,可以得到机构各变量之间存在的关系

$$\begin{cases} X_{OB} + r_1 + u \cos\alpha_1 - r_2 \sin\alpha_1 = X_{b1} \\ Z_{OB} - u \sin\alpha_1 - r_2 \cos\alpha_1 = 0 \\ X_{b2} = X_{OB} + l_{O_B a_2} + r_4 \sin\beta_1 - r_3 \cos\beta_1 \\ X_{OB} - r_1 - u \cos\alpha_1 + r_2 \sin\alpha_1 = X_{b3} \\ \sin\beta_1 = Y_{OB} / r_3 \end{cases} \quad (16)$$

式中  $\alpha_1$ ——正解中静坐标系  $X$  与  $l_{11}$  的夹角

$\beta_1$ ——正解中  $\mathbf{l}_{a_2 c_2}$  与  $X_A$  轴夹角

解得上平台位移与下铰点位置之间即电机位置之间的关系式为

$$\begin{bmatrix} X_{OB} \\ Y_{OB} \\ Z_{OB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_{b1} + X_{b4}) / 2 \\ X_{b1} - (X_{b1} + X_{b4}) / 2 + 11.5 \\ u \sin\alpha_1 + r_1 \cos\alpha_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

联立方程式(16)、(17)解得

$$\begin{cases} t = (X_{b3} - X_{b1}) / 2 + r_1 \\ \alpha_1 = \arcsin \frac{r_2 t - u \sqrt{r_2^2 - t^2 + u^2}}{r_2^2 + u^2} \end{cases} \quad (18)$$

建立了该三自由度并联机器人运动学参数化模型,通过改变构件尺寸参数可得在不同尺寸下本构型的运动学模型。

## 3 动力学建模

### 3.1 逆向动力学建模

根据拉格朗日方程建立动力学为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{L}(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}(q, \dot{q})}{\partial q_i} = \tau_i \quad (19)$$

其中  $\mathbf{L} = \mathbf{T} - \mathbf{V}$  (20)

式中  $q_i$ ——广义坐标

$\dot{q}_i$ ——广义速度

$\tau_i$ ——广义力

$\mathbf{T}$ ——所有构件总动能

$\mathbf{V}$ ——所有构件总势能

对于各构件动能计算式为

$$T = \frac{1}{2} m v_e^2 + \frac{1}{2} \mathbf{J} \omega_e^2 \quad (21)$$

其中  $\mathbf{J} = \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{A}^{(10)} \mathbf{J}_0 (\mathbf{A}^{(10)})^T (\mathbf{A}^{(21)})^T$  (22)

式中  $v_c$ ——构件质心相对静坐标系的平移速度

$\omega_c$ ——构件质心相对静坐标系的转动速度

$m$ ——构件质量

$\mathbf{J}$ ——在静坐标系下构件转动惯量

$\mathbf{J}_0$ ——主轴坐标系下构件转动惯量

$\mathbf{A}^{(10)}$ ——初始位置动坐标系相对构件主轴坐标系的方向余弦矩阵

$\mathbf{A}^{(21)}$ ——静坐标系相对动坐标系的方向余弦矩阵

以静坐标系  $Z_A = 0$  作为零势能面, 构件  $i$  的势能可以表示为

$$V_i = m_i g Z_c \quad (23)$$

式中  $m_i$ ——构件  $i$  质量

$Z_c$ ——构件质心在静坐标系下的  $Z$  坐标

化简为动力学方程的标准形式为

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (24)$$

根据式(19)和式(24)推导得到  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  的关系式为

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

电机驱动力与广义力之间有关系

$$\mathbf{f} = (\mathbf{J}_k^T)^{-1} \boldsymbol{\tau} \quad (26)$$

### 3.2 正向动力学建模

正向动力学是在已知机器人的关节驱动力或驱动力矩的情况下求解机器人的末端运动轨迹(位置、速度及加速度)。

由式(24)和式(26)可得

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_k^T \mathbf{f} - \mathbf{M}(\mathbf{q}) - \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q}) \\ \dot{\mathbf{q}} = \int \ddot{\mathbf{q}} dt + \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q} = \int \dot{\mathbf{q}} dt + \mathbf{q}_0 \end{cases} \quad (27)$$

根据运动学中求得的雅可比矩阵  $\mathbf{J}_k$  和逆向动力学中求得的  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ 、 $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 、 $\mathbf{G}(\mathbf{q})$  矩阵, 在已知压电电机驱动力情况下可以计算出动平台运动轨迹(位置、速度及加速度)。

通过拉格朗日法建立了机构多刚体动力学参数化模型, 通过改变构件质量和尺寸参数可得在不同尺寸和质量下本构型的动力学模型。

## 4 工作空间及奇异性分析

### 4.1 工作空间

在满足杆长限制的前提下, 同时为了防止机构的移动副脱离, 保证机构运行稳定性, 设置约束限制

$$\begin{cases} -43 \text{ mm} \leq Y_{OB} \leq 43 \text{ mm} \\ 128.5 \text{ mm} \leq Z_{OB} \leq 161.5 \text{ mm} \end{cases} \quad (28)$$

根据几何关系可以确定工作空间

$$\begin{cases} (X_{OB} - X_{b1\max})^2 + Z_{OB}^2 \leq l_e \\ (X_{OB} - X_{b3\min})^2 + Z_{OB}^2 \leq l_e \\ (Z_{OB} - r_{41} - r_{42})^2 + Y_{OB}^2 \leq (108.5 \text{ mm})^2 \\ 128.5 \text{ mm} \leq Z_{OB} \leq 161.5 \text{ mm} \\ -43 \text{ mm} \leq Y_{OB} \leq 43 \text{ mm} \end{cases} \quad (29)$$

$$\text{其中 } l_e = \sqrt{(l_{11} + l_{13} - \sqrt{l_{12}^2 - Y_{OB}^2})^2 + r_2^2} \quad (30)$$

式中  $X_{b1\max}$ ——铰点  $b_1$  所能达到的最大位置

$X_{b3\min}$ ——铰点  $b_3$  所能达到的最小位置

$r_{41}$ ——杆  $l_{41}$  上转动副轴心到定坐标  $X_B O_B Y_B$  平面的距离

$r_{42}$ ——杆  $l_{42}$  上转动副轴在静坐标系中的  $Z$  轴高度

$l_e$ ——上下铰点的连线在  $X_A O_A Z_A$  平面上的投影长度

在坐标系  $O X_A Y_A Z_A$  中满足不等式(29)所有关系形成的封闭空间即为机构的可达工作空间, 如图 5 所示。

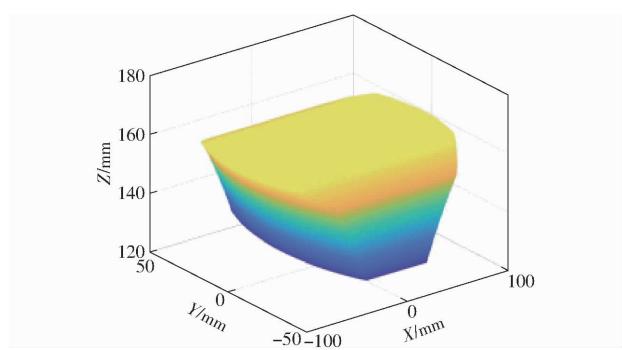


图 5 并联机器人工作空间图

Fig. 5 Workspace diagram of parallel robot

### 4.2 奇异性

当并联机器人位于奇异位置时, 动平台将产生多余的自由度或处于死点, 这会导致机构失去控制, 所以需要通过分析避免并联机器人处于奇异位置, 防止对其运动和控制等产生不利影响<sup>[25]</sup>。本文通过遗传算法来计算在工作空间内该机构有无奇异。

在上平台 3 个位移参数所能达到的连续范围里, 其逆速度雅可比矩阵的行列式是关于上平台位移参数的连续函数, 对该函数进行遗传算法分析, 最后的迭代结果有 3 种情况: ①通过迭代雅可比矩阵行列式的最小值大于 0, 说明该连续函数不存在零点。②通过迭代雅可比矩阵行列式的最大值大于 0, 最小值小于 0, 函数存在零点。③通过迭代雅可比矩阵行列式的最大值小于 0, 说明该连续函数不

存在零点。

将逆速度雅可比矩阵行列式作为此次遗传算法的目标函数

$$f(x) = \det |J_K| \quad (31)$$

遗传算法参数选择会对最后的结果产生很大的影响,本次遗传算法参数设置如表1所示。

表1 遗传算法参数

Tab. 1 Genetic algorithm parameters

参数	种群数目	最大遗传代数	个体长度	代沟	交叉概率	变异概率
数值	100	100	20	0.95	0.7	0.01

遗传算法流程如图6所示。

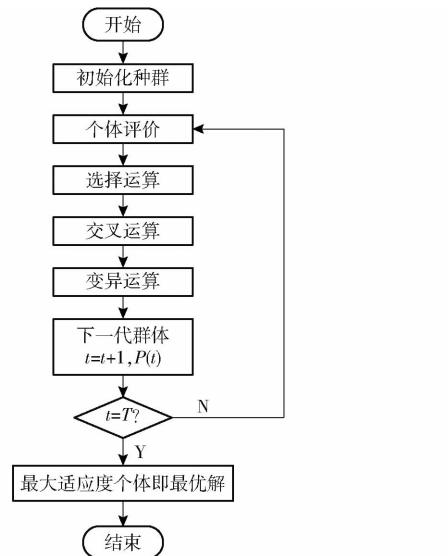


图6 遗传算法流程图

Fig. 6 Genetic algorithm flow chart

因为在该机构逆速度雅可比矩阵中位移参数  $X_{OB}$  不存在,将雅可比矩阵中的另外 2 个位移参数  $Y_{OB}$  和  $Z_{OB}$  作为本次寻优的决策变量,这两个变量的约束条件为 2 个变量的可运动范围(式(28))。

首先对其行列式进行最小值的寻优,本次优化的模型为

$$\min f(x) = \det |J_K| \quad (32)$$

本次寻优采用格雷码对机器人工作空间范围内的变量值进行编码。

选择运算使用比例算子即以赌轮盘形式选择算子。交叉运算使用单点交叉算子;变异运算使用基本位变异算子。

此次最小值寻优结果为 1.726。其结果大于零,说明逆速度雅可比矩阵行列式在设定范围内其最小值大于 0,又因为其在设定范围内连续,可知该机构逆速度雅可比矩阵不存在零点,则机构在设定的运动范围内不存在奇异点。

最后逆速度雅可比矩阵  $J_K$  的行列式寻

优结果如图7所示。

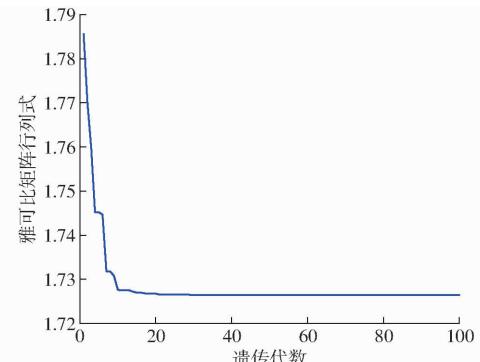


图7 遗传算法迭代图

Fig. 7 Genetic algorithm iteration diagram

## 5 动平台力输出特性

基于芯明天公司一款压电直线电机,对动平台各个方向的最大输出力进行理论分析。

根据电机参数可知,最大输出力为 30 N,即动力学中的电机驱动力  $f$ ,根据式(26)可得每个电机驱动力与动平台输出力之间的关系为

$$\begin{bmatrix} \tau_X \\ \tau_Y \\ \tau_Z \end{bmatrix} = J_K^T \begin{bmatrix} f_{M1} \\ f_{M2} \\ f_{M3} \end{bmatrix} \quad (33)$$

式中  $\tau_X$ —动平台 X 方向上输出力

$\tau_Y$ —动平台 Y 方向上输出力

$\tau_Z$ —动平台 Z 方向上输出力

$f_{M1}$ —第 1 支链上电机驱动力

$f_{M2}$ —第 2 支链上电机驱动力

$f_{M3}$ —第 3 支链上电机驱动力

为了求动平台各个轴向上最大输出力,分别以  $\tau_X$ 、 $\tau_Y$  和  $\tau_Z$  的最大值为寻优结果建立 3 个目标函数,采用遗传算法进行寻优,即

$$\begin{cases} \tau_X = A_{11}f_{M1} + A_{21}f_{M2} + A_{31}f_{M3} \\ \tau_Y = A_{12}f_{M1} + A_{22}f_{M2} + A_{32}f_{M3} \\ \tau_Z = A_{13}f_{M1} + A_{23}f_{M2} + A_{33}f_{M3} \end{cases} \quad (34)$$

式中  $A_{ij}$ — $J_K$  矩阵第  $i$  行第  $j$  列子式

以 N31.100K 型直线压电电机为例,分析动平台 X、Y 和 Z 方向最大输出力。该电机部分参数如表2 所示。

表2 压电电机参数

Tab. 2 Piezoelectric motor parameters

参数	速度上限/ (mm·s <sup>-1</sup> )	最大输出 力/N	最大保持 力/N	质量/g
数值	5	30	40	640

根据机构雅可比矩阵可知,动平台 X 轴方向位置对动平台输出力无影响。

当  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  为工作空间内任意值时,  $f_{M1}$ 、 $f_{M2}$  和  $f_{M3}$  分别为 30、30、30 N 或者 -30、-30、-30 N 时, 动平台  $X$  轴输出力最大为 90 N 或者 -90 N。

当  $Y = 43$  mm,  $Z = 128.5$  mm 时,  $f_{M1}$ 、 $f_{M2}$  和  $f_{M3}$  分别为 30、30、-30 N 或者 -30、-30、30 N 时, 动平台  $Y$  轴输出力最大为 94.1 N 或者 -94.1 N。

当  $Y = 0$  mm,  $Z = 161.5$  mm 时,  $f_{M1}$  和  $f_{M3}$  分别为 -30 N 和 30 N 或者 30 N 和 -30 N 时, 动平台的  $Z$  轴输出力最大为 119.2 N 或者 -119.2 N。

初始位置时 ( $X = 0$  mm,  $Y = 0$  mm,  $Z = 160$  mm),  $X$  轴最大输出力为 90 N,  $Y$  轴最大输出力为 30 N,  $Z$  轴最大输出力为 114.02 N。

主要工作指标下输出力如表 3 所示, 而其中  $Y$  和  $Z$  表示动平台的中心在定坐标系下的位置,  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴输出力表示了在动平台指定的工作位置下, 电机驱动力与动平台输出力之间存在的关系,  $F_{X\text{-max}}$ 、 $F_{Y\text{-max}}$  和  $F_{Z\text{-max}}$  分别表示动平台  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴最大输出力。

表 3 主要工作指标下输出力分析

Tab. 3 Output force analysis under main working index

$Y/\text{mm}$	$Z/\text{mm}$	$X$ 轴输出力	$Y$ 轴输出力	$Z$ 轴输出力	$F_{X\text{-max}}/\text{N}$	$F_{Y\text{-max}}/\text{N}$	$F_{Z\text{-max}}/\text{N}$
-40	130	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} - 0.78f_{M1} + 0.78f_{M3}$	$0.92f_{M3} - 0.92f_{M1}$	90	76.8	55.2
-20	130	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} - 0.36f_{M1} + 0.36f_{M3}$	$1.01f_{M3} - 1.01f_{M1}$	90	51.6	60.6
0	130	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2}$	$1.03f_{M3} - 1.03f_{M1}$	90	30.0	61.8
20	130	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} + 0.36f_{M1} - 0.36f_{M3}$	$1.01f_{M1} - 1.01f_{M3}$	90	51.6	60.6
40	130	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} + 0.78f_{M1} - 0.78f_{M3}$	$0.92f_{M1} - 0.92f_{M3}$	90	76.8	55.2
-40	150	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} - 0.93f_{M1} + 0.93f_{M3}$	$1.26f_{M3} - 1.26f_{M1}$	90	85.8	75.6
-20	150	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} - 0.45f_{M1} + 0.45f_{M3}$	$1.42f_{M3} - 1.42f_{M1}$	90	57.0	85.2
0	150	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2}$	$1.49f_{M3} - 1.49f_{M1}$	90	30.0	89.4
20	150	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} + 0.45f_{M1} - 0.45f_{M3}$	$1.42f_{M1} - 1.42f_{M3}$	90	57.0	85.2
40	150	$f_{M1} + f_{M2} + f_{M3}$	$f_{M2} + 0.93f_{M1} - 0.93f_{M3}$	$1.26f_{M1} - 1.26f_{M3}$	90	85.8	75.6

注: 上述数据均为基于理想模型得出的结果。

## 6 仿真

通过对理论公式进行转译的方式得到运动学和动力学的 Simulink 程序。为了验证运动学建模与动力学建模的正确性, 在 Simulink 和 ADAMS 软件中对机构进行了运动学建模与动力学建模的仿真对比。

### 6.1 运动学对比验证

给定两运动学模型动平台相同的运动轨迹。在运动学反解验证中, 给定动平台在  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴的位移分别为  $15\sin(5t)$ 、 $10\sin(5t)$ 、 $5\sin(5t)$ , 单位为 mm, 运动学位置反解、速度反解、加速度反解验证结果分别如图 8~10 所示。

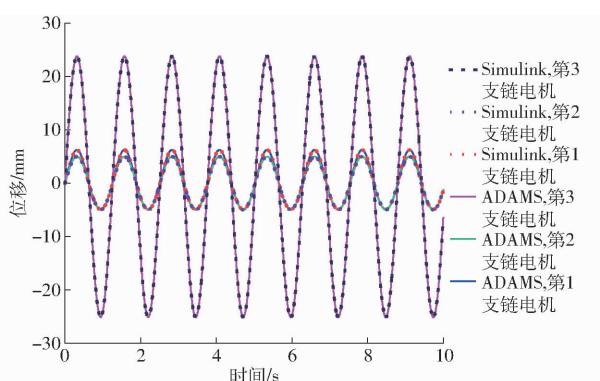


图 8 运动学反解位移对比

Fig. 8 Inverse kinematics displacement comparison

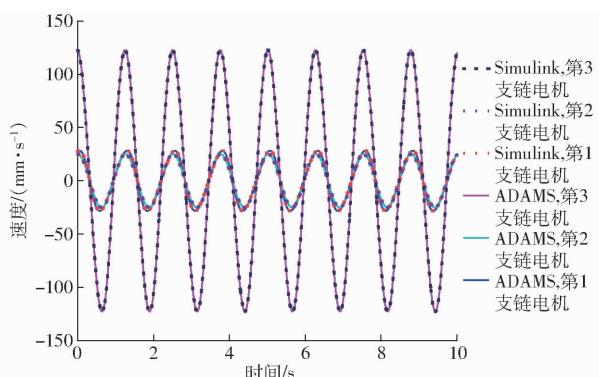


图 9 运动学反解速度对比

Fig. 9 Inverse kinematics velocity comparison

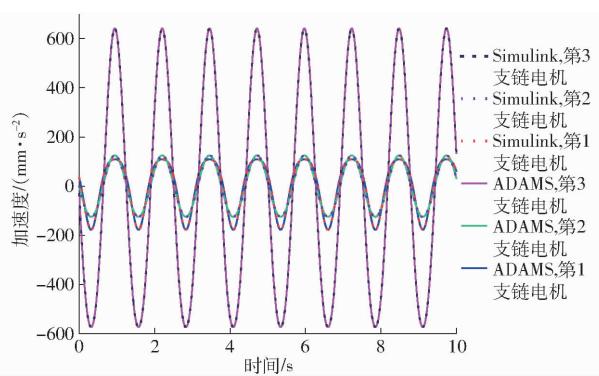


图 10 运动学反解加速度对比

Fig. 10 Inverse kinematics acceleration comparison

在运动学正解验证中, 给定压电电机 M1、M2、

M3 的驱动位移分别为  $15\sin(5t)$ 、 $10\sin(5t)$ 、 $5\sin(5t)$ , 单位为 mm, 验证结果如图 11 所示。

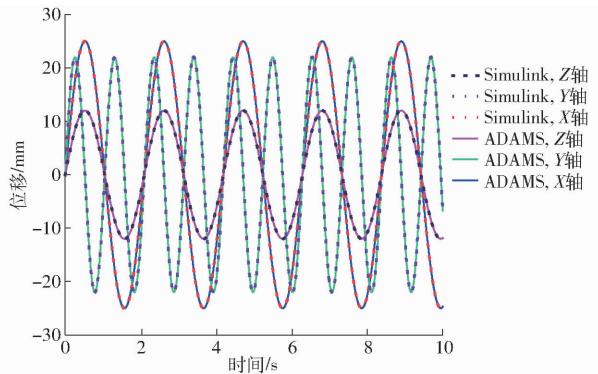


图 11 运动学正解位移对比

Fig. 11 Forward kinematic displacement comparison

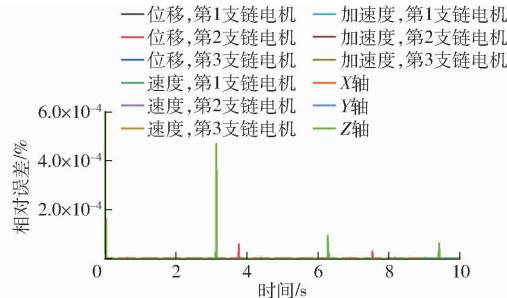


图 12 运动学数据相对误差对比

Fig. 12 Kinematic data relative error comparison

图 12 为运动学仿真部分的误差。由图 12 得到并联机构驱动电机和动平台各个参数与 Simulink 和 ADAMS 仿真结果的相对误差。

分别对机构运动学位移、速度、加速度反解以及运动学位移正解进行了 ADAMS 模型与 Simulink 数学模型的对比验证, 验证了运动学建模的准确性, 从图 8~11 可看出, 两模型得出的数据曲线吻合, 且从图 12 可得, 相对误差绝对值小于 0.01%, 在合理的误差允许范围内, 充分说明了运动学模型的准确性, 同时也说明了雅可比矩阵的正确性。

## 6.2 动力学对比验证

在逆向动力学验证中, 给定电机 M1、M2、M3 驱动位移分别为  $20\sin(6t)$ 、 $25\sin(6t)$ 、 $15\sin(5t)$ , 单位为 mm, 给定机器人活动构件材料为铝合金, 验证结果如图 13 所示。图 14 为动力学仿真部分误差。

对机构的逆向动力学进行了 ADAMS 模型和 Simulink 数学模型的对比验证。从图 13 可看, 两模型逆向动力学中电机的驱动力曲线吻合, 从图 14 可得, 相对误差绝对值小于 0.01%, 在合理的误差允许范围内, 说明了机构逆向动力学模型的准确性。又因式(26), 从而进一步佐证了雅可比矩阵的正确性。

正向动力学的验证中, 给定动平台在 X、Y 和 Z 轴上运动轨迹分别为  $25\sin(3t)$ 、 $22\sin(6t)$ 、

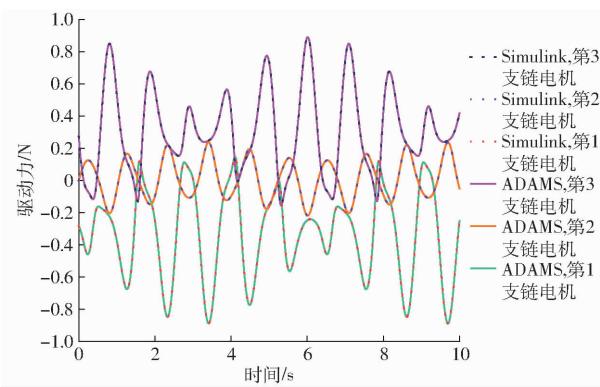


图 13 逆向动力学电机驱动力对比

Fig. 13 Reverse dynamics motor driving force comparison

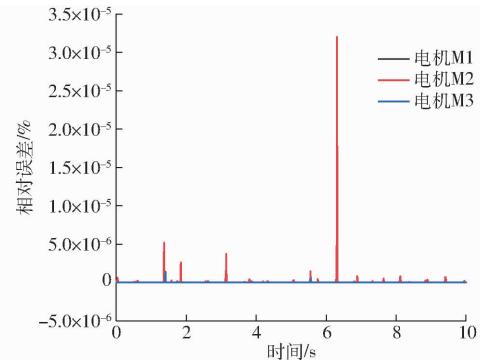


图 14 逆向动力学数据相对误差对比

Fig. 14 Reverse dynamics data relative error comparison

$12\sin(3t)$ , 单位为 mm, 验证结果如图 15 所示。

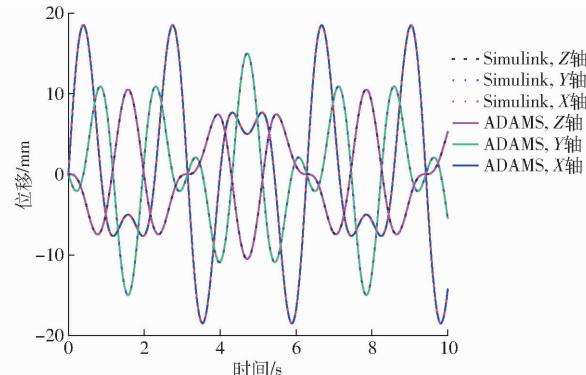


图 15 正向动力学位移对比

Fig. 15 Forward dynamic displacement comparison

图 16 为正向动力学仿真部分的误差。通过逆向动力学模型, 在 Simulink 中对 3 个电机给定位移与正向动力学求解出的位移进行比较, 得到并联机构正向动力学的相对误差。

在正向动力学验证中, 因直接给机构电机输入驱动力, 难以控制仿真长时间运行。本文在验证了逆向动力学模型的前提下, 给定机构动平台运动轨迹, 通过 Simulink 数学模型计算出广义力然后输入机构 Simulink 正向动力学的数学模型, 最后得出动平台运动轨迹与给定的动平台运动轨迹吻合, 且从图 16 可得, 相对误差绝对值小于 0.05%, 在合理的误差允许范围内, 说明 Simulink 中正向动力学数学

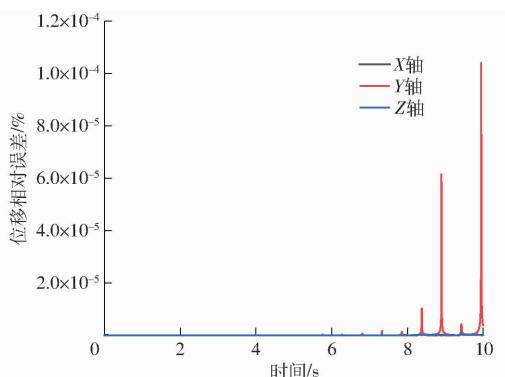


图 16 正向动力学数据相对误差对比

Fig. 16 Forward dynamic data relative error comparison

模型的准确性。

## 7 结束语

设计了一种新型的三自由度并联机构,并通过

G-K 公式计算得该机构存在 3 个自由度。通过解析法计算了该机构运动学正反解,同时求得了该机构雅可比矩阵。利用拉格朗日法,求得了该机构动力学方程。并在 Simulink 上搭建了该机构运动学模型和动力学模型,然后与机构 ADAMS 模型进行了对比验证,验证了机构运动学模型和动力学模型的正确性,为该新型机构参数化建模提供了一种可行的新方法。以机构运动学正解的解析解为基础,根据机构几何关系,求得了机构工作空间,在 Matlab 中绘制出了工作空间图。采用遗传算法,计算了在机构空间内,该机构没有奇异位形,以及以芯明天电机为驱动,理想模型下机器人动平台的最大输出力。说明了该新型并联机器人拥有良好的力学性能,且在进入狭长缝隙工作的同时拥有较大工作空间。

## 参 考 文 献

- [1] NIKU S B. 机器人学导论——分析、系统及应用 [M]. 孙富春, 朱继洪, 刘国栋, 等,译. 北京:电子工业出版社, 2004: 2–24.
- [2] 熊有伦. 机器人学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1992: 5–80.
- [3] 倪涛, 孙旭, 李东, 等. 基于外力估计的并联机器人柔顺控制策略研究 [J]. 农业机械学报, 2022, 53(8): 443–451.  
NI Tao, SUN Xu, LI Dong, et al. Research on compliant control strategy of parallel robot based on external force estimation [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(8): 443–451. (in Chinese)
- [4] 刘秀莹, 张建军, 刘承磊, 等. 基于工作空间的踝关节康复广义球面并联机器人运动学参数优化 [J]. 中国机械工程, 2021, 32(16): 1921–1929.  
LIU Xiuying, ZHANG Jianjun, LIU Chenglei, et al. Kinematic parameter optimization of workspace-based generalized spherical parallel robots for ankle joint rehabilitation [J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(16): 1921–1929. (in Chinese)
- [5] FANG H, TANG T, ZHANG J. Kinematic analysis and comparison of a 2R1T redundantly actuated parallel manipulator and its non-redundantly actuated forms [J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 142: 103587.
- [6] ZHANG G, GUO J, HOU Y, et al. Analysis of the PU-2UPS antenna parallel mechanism [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2021, 35: 717–728.
- [7] LIU J, TIAN Y, GAO F. A novel six-legged walking machine tool for in-situ operations [J]. Frontiers of Mechanical Engineering, 2020, 15: 351–364.
- [8] ZHANG D S, XU Y D, YAO J T, et al. Analysis and optimization of a spatial parallel mechanism for a new 5-DOF hybrid serial-parallel manipulator [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2018, 31(1): 1–9.
- [9] LU S, LI Y, DING B. Kinematics and dynamics analysis of the 3PUS-PRU parallel mechanism module designed for a novel 6-DOF gantry hybrid machine tool [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020, 34(1): 345–357.
- [10] PAKZAD S, AKHBARI S, MAHBOUBKHAH M. Kinematic and dynamic analyses of a novel 4-DOF parallel mechanism [J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2019, 41: 1–13.
- [11] LIM H, LEE S H, SO B R, et al. Design of a new 6-DOF parallel mechanism with a suspended platform [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2015, 13: 942–950.
- [12] XIA G, LIAO C, FU Y. Calibration and uncertainty evaluation of double parallel-joint coordinate measuring machine [J]. Optics and Precision Engineering, 2014, 22(5): 1227–1234.
- [13] SANTOLARIA J, AGUILAR J J, YAGÜE J A, et al. Kinematic parameter estimation technique for calibration and repeatability improvement of articulated arm coordinate measuring machines [J]. Precision Engineering, 2008, 32(4): 251–268.
- [14] 何开拓. 平面三自由度并联机构的分析与设计 [D]. 南京: 南京理工大学, 2018.  
HE Kaituo. Analysis and design of planar three-degree-of-freedom parallel mechanism [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2018. (in Chinese)
- [15] 赵磊, 闫照方, 袁倩倩, 等. 大空间运动 3-RRRU 并联机器人运动学标定与误差分析 [J]. 农业机械学报, 2021, 52(11): 411–420.  
ZHAO Lei, YAN Zhaofang, LUAN Qianqian, et al. Kinematics calibration and error analysis of 3-RRRU parallel manipulator with large space motion [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(11): 411–420. (in Chinese)

- [16] 柴馨雪,杨泳,徐灵敏,等.2-UPR-RPU并联机器人的动力学建模与性能分析[J].机械工程学报,2020,56(13):110-119.  
CHAI Xinxue, YANG Yong, XU Lingmin, et al. Dynamic modeling and performance analysis of a 2-UPR-RPU parallel robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(13) : 110 - 119. (in Chinese)
- [17] FU J, GAO F. Designing a novel three-degree-of-freedom parallel robot based on workspace [J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2016, 13(1) : 31.
- [18] 叶鹏达,尤晶晶,仇鑫,等.并联机器人工作空间的区间离散法[J].光学精密工程,2021,29(8):1847-1856.  
YE Pengda, YOU Jingjing, QIU Xin, et al. Interval discretization method for parallel robot workspace [J]. Optics and Precision Engineering, 2021, 29(8) : 1847 - 1856. (in Chinese)
- [19] SLAVUTIN M, SHAI O, SHEFFER A, et al. A novel criterion for singularity analysis of parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 137 : 459 - 475.
- [20] 张青云,赵新华,刘凉,等.空间柔性闭链机器人动力学建模与振动仿真[J].农业机械学报,2021,52(1):401-409.  
ZHANG Qingyun, ZHAO Xinhua, LIU Liang, et al. Dynamic modeling and vibration simulation of spatial flexible closed-chain robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1) : 401 - 409. (in Chinese)
- [21] 李菊,肖思进,沈惠平,等.两支链三平移并联机构动力学分析与性能优化[J].农业机械学报,2022,53(10):412-422.  
LI Ju, XIAO Sijin, SHEN Huiping, et al. Dynamics analysis and performance optimization of two-chain and three-translation parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(10) : 412 - 422. ( in Chinese)
- [22] 翟国栋,刘龙宇,蔡晨光,等.直线电机驱动六自由度并联机构动力学特性研究[J].农业机械学报,2022,53(11):450-458.  
ZHAI Guodong, LIU Longyu, CAI Chenguang, et al. Dynamic characteristics of 6-DOF parallel mechanism driven by linear motor[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022 , 53(11) : 450 - 458. (in Chinese)
- [23] 张振涛.三自由度并联机器人分析与设计[D].哈尔滨:哈尔滨工业大学,2008.  
ZHANG Zhentao. Analysis and design of 3-DOF parallel robot [J]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2008. ( in Chinese)
- [24] SICILIANO B, KHATIB O. Springer handbook of robotics[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2016.
- [25] 许兆棠,刘远伟,陈小岗,等.并联机器人[M].北京:机械工业出版社,2021:158-159.

(上接第269页)

- [20] 韦紫君,宋玲,胡小春,等.基于实体级遮蔽BERT与BiLSTM-CRF的农业命名实体识别[J].农业工程学报,2022,38(15):195-203.  
WEI Zijun, SONG Ling, HU Xiaochun, et al. Named entity recognition of agricultural based entity-level masking BERT and BiLSTM-CRF[J]. Transactions of the CSAE, 2022,38(15) :195 - 203. ( in Chinese)
- [21] LIU J, PENG T, ZHANG X, et al. Prediction of landslides using LSTM and SOFTMAX neural network [C] // Conference Proceedings of the 7th International Symposium on Project Management (ISPM2019), 2019.
- [22] 鲍彤,罗瑞,郭婷,等.基于BERT字向量和TextCNN的农业问句分类模型分析[J].南方农业学报,2022,53(7):2068-2076.  
BAO Tong, LUO Rui, GUO Ting, et al. Agricultural question classification model based on BERT word vector and TextCNN[J]. Journal of Southern Agriculture, 2022,53(7) :2068 - 2076. ( in Chinese)
- [23] LI Z, YANG X, ZHOU L, et al. Text matching in insurance question-answering community based on an integrated BiLSTM-TextCNN model fusing multi-feature[J]. Entropy, 2023,25(4):639.
- [24] 涂文博,袁贞明,俞凯.针对文本分类的神经网络模型[J].计算机系统应用,2019,28(7):145-150.  
TU Wenbo, YUAN Zhenming, YU Kai. Neural network models for text classification [J]. Computer Systems & Applications, 2019,28(7):145 - 150. ( in Chinese)
- [25] 张明岳,吴华瑞,朱华吉.基于卷积模型的农业问答语性特征抽取分析[J].农业机械学报,2018,49(12):203-210.  
ZHANG Mingyue, WU Huarui, ZHU Huaji. Analysis of extraction of semantic feature in agricultural question and answer based on convolutional model [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49 ( 12 ) : 203 - 210. ( in Chinese)
- [26] 吴华瑞,郭威,邓颖,等.农业文本语义理解技术综述[J].农业机械学报,2022,53(5):1-16.  
WU Huarui, GUO Wei, DENG Ying, et al. Review of semantic analysis techniques of agricultural texts[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery , 2022,53(5) :1 - 16. ( in Chinese)