

运动副分布顺序对并联机构运动学与动力学性能的影响

沈惠平 仲锐 李菊 李涛

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 根据基于方位特征(POC)的并联机构拓扑设计理论,设计了两种零耦合度且部分运动解耦的三自由度两平移一转动(2T1R)并联机构,它们具有相同运动副类型和数目,但在支链中的分布顺序不同;对这两种机构进行了方位特征、自由度及耦合度等主要拓扑特征分析,并给出其拓扑解析式;根据拓扑特征运动学建模原理,求解了这两种机构的符号式位置正反解,分别分析了两种机构的工作空间和机构发生奇异的条件及奇异位形;根据基于虚功原理的序单开链法对两种机构进行逆向动力学建模,分别求得两种机构的驱动力;对比两种机构运动学与动力学性能,并给出优选机型。给出了优选机型用于水果深加工中智能分拣、输送等应用场景的概念设计。

关键词: 并联机构; 拓扑设计; 方位特征集; 运动解耦; 运动学; 动力学

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2023)07-0412-15

OSID:



Influence of Different Distribution Order of Joints on Kinematic and Dynamic Performance of Parallel Mechanism

SHEN Huiping ZHONG Rui LI Ju LI Tao

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: According to the topology design theory of parallel mechanism based on the position and orientation characteristics (POC), two three-degree-of-freedom (3-DOF) two-translation-one-rotation (2T1R) parallel mechanisms (PMs) with zero coupling degree and partial motion decoupling were designed, which had the same type and number of kinematic pairs, but the distribution order was different in the branches. Firstly, the main topological characteristics of these two PMs, such as orientation, DOF and coupling degree, were analyzed, and their topological analytical expressions were given. Secondly, according to the kinematic modeling principle based on topological characteristics, the symbolic forward and reverse position solutions of the two PMs were solved, and the workspace, singular conditions and configurations of the two PMs were analyzed respectively. At the same time, according to the single-open-chain method based on virtual work principle, the reverse dynamics of the two PMs were established, and the actuated forces of the two PMs were obtained respectively. Furthermore, the kinematics and dynamics performances of the two PMs were compared, and the optimal PM was suggested. Finally, the conceptual design of the application scenario of the optimal PM used for intelligent sorting and conveying in fruit deep processing was given. The research result can provide a technical basis for the structural design and practical application of this mechanism.

Key words: parallel mechanism; topology design; position and orientation characteristics set; motion decoupling; kinematics; dynamic

0 引言

三自由度纯平移和纯转动并联机构在抓取及调姿等方面已有较多的研究与应用^[1],但具有转动和移动特性混合的并联机构研究和应用相对较少。

HUNT^[2]于1983年设计了一种含寄生运动的3-DOF空间机构,ZHANG等^[3]对2T1R的平面并联机构类型进行了综合并实现了模块化设计,但缺少对机构的运动学分析;刘艳敏等^[4]研究了2T1R机构的综合方法,并优选了部分新机型;余顺年

等^[5]提出了一种以两平移—转动并联机构为主体的新型中医推拿机器人机型,并求出其运动学正反解的解析解;WANG 等^[6]提出了一种 Cylindrical 型两平移—转动并联机构;杨宁等^[7]根据基于螺旋理论对两平移—转动型并联机构的结构综合进行研究;REFAAT 等^[8]根据位移李群理论对三自由度运动并联机构进行型综合研究;张彦斌等^[9]根据线性变换理论,对无奇异完全各向同性 2T1R 型空间并联机构进行型综合;杨廷力等^[10-11]基于单开链单元对 2T1R 型并联机构进行了型综合,得到多种含有平面闭回路结构的新型机构;SHEN 等^[12]设计并分析了一类具有解耦运动和符号式位置正解的 2T1R 并联机构,并研究了优化支链布置对运动学、动力学和刚度的影响;TETIK 等^[13]利用回路方程的雅可比矩阵确定了 3-RRS 并联机构的奇异性;SUN 等^[14]使用边界搜索方法求解了 3-PRS 并联机构的工作空间;LI 等^[15]对 3-PRS 使用数值搜索方法对并联机构的可达工作空间进行了分析。上述大部分 2T1R 并联机构很少具有运动解耦性^[16-18]及符号式位置正解^[19-20],使得机构运动学建模以及误差分析、刚度分析以及动力学分析等方面较为困难,计算量大。

机构动力学分析方法中,拉格朗日法^[21-22]通过动能及势能推导来建立动力学方程,其表现形式相对简单,但在解决多杆件机构时计算量较大;牛顿—欧拉法^[23]将待分析机构拆分开,建立相对应完整的动力学模型,对于构件较多的机构,分析较繁琐、计算量大;而虚功原理法^[24-25]通过系统的虚位移做功建立机构动力学模型,只需要计算较少速度矩阵,具有高效、便捷的特点。基于虚功原理的力分析序单开链法^[26]能求出驱动副反力(矩)外,还能求解出机构运动副中的作用力。

本文根据基于方位特征方程(POC)的并联机构拓扑设计理论方法^[11],设计两种零耦合度的 2T1R 并联机构,它们具有相同运动副类型和数目,但在支链中的分布顺序不同,对这两种机构的主要拓扑特性(POC 集、自由度、耦合度)进行分析;根据基于拓扑特征的运动学建模方法,求解两种并联机构的位置正反解;基于位置正解求解各自的工作空间与奇异性;又根据基于雅可比矩阵求解两种并联机构动平台中心点的速度与加速度曲线,根据基于虚功原理的力分析序单开链法对两种机构进行动力学建模,求解各自的驱动力;对比分析两种新型机构的运动学、动力学性能,得到其一为优选机构,并给出优选机构应用场景的概念设计。

1 机构设计和分析

1.1 机构设计

1.1.1 支链设计

机构动平台 POC 集计算式^[11,24]为

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (1)$$

其中

$$M_{bi} = \bigcup_{k=1}^m M_{J_k} \quad (2)$$

式中 M_{J_k} ——第 i 个运动副 POC 集

M_{bi} ——第 i 条支链末端 POC 集

M_{pa} ——机构动平台 POC 集

(1) 混合支链 I 设计

2-DOF 的两滑块平面五杆机构($P_1 \perp R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp P_2$)如图 1a 所示。为便于阐述,在静平台 0 上建立坐标系 $oxyz$, x 轴方向平行于 P_1 轴线方向, y 轴方向垂直于 P_1 轴线方向, z 轴方向平行于静平台 0 法线方向。取 R_{12} 轴线上一点为基点,显然,其末端构件能够产生平行于 xoz 平面的两维移动(2T)以及平行于 y 轴的一维转动(1R),即其 POC 为 2T1R。

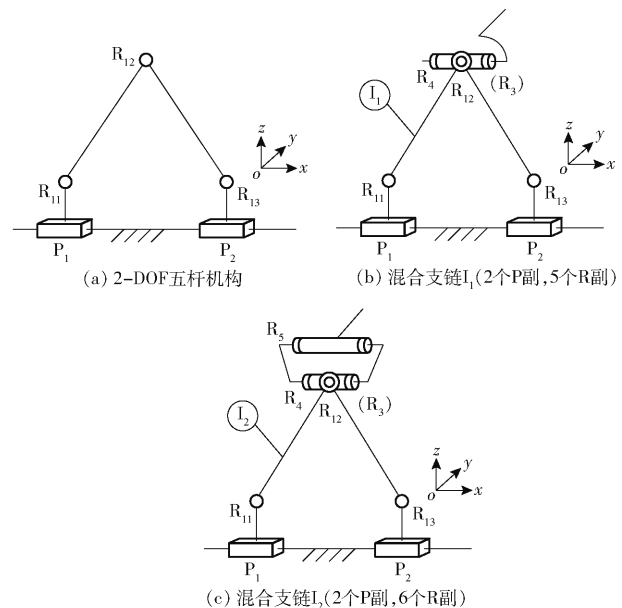


图 1 两种混合支链

Fig. 1 Two kinds of mixed branch chains

由式(1)可得,该子并联机构末端输出的 POC 集为

$$M_{sub} = M_{P_i} \cap M_{R_{1j}} = \begin{bmatrix} t^2 (\perp R_{12}) \\ r^1 (\parallel R_{12}) \end{bmatrix}$$

在子并联机构的输出转动副 R_{12} 的输出轴上串联一个与其同轴线的转动副 R_3 ,即转动副 R_{12} 与 R_3 是复合铰链,再在垂直于 R_3 的轴线上串联一个转动副 R_4 (即 $R_4 \perp R_3$);且用转动副 R_4 连接动平台 1 的一端,从而得到混合支链 I_1 (图 1b)。

在子并联机构输出转动副 R_{12} 的输出轴上串联

一个与其同轴线的转动副 R_3 , 即转动副 R_{12} 与 R_3 是复合铰链; 再在垂直于 R_3 的轴线上串联一个轴线平行的转动副组 R_4 、 R_5 (即 $R_4 \perp R_3$), 且 $R_4 \parallel R_5$, 且用转动副 R_5 连接动平台 1 的一端, 从而得到混合支链 I_2 (图 1c)。

由式(2)可知, 混合支链 I_1 、 I_2 上末端转动副 R_4 、 R_5 轴线上一点的 POC 集分别为

$$M_1 = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{12}, R_4)) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_5) \\ r^1(\parallel R_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond(R_{12}, R_5)) \end{bmatrix} \quad (4)$$

式(3)表明, 混合支链 I_1 末端的输出运动为 xoz 平面内的两维移动(2T)以及绕转动副 R_4 、 R_{12} 轴线的两维转动(2R); 式(4)表明, 混合支链 I_2 末端的输出运动为三维移动(3T)以及绕转动副 R_5 、 R_{12} 轴线的两维转动(2R), 因设计目的是两平移一转动, 故需设计另一条约束支链来分别约束支链 I 中多余的运动元素, 以满足其设计目标。

(2) 混合支链 II 设计

为使机构具有较好的承载能力及刚度, 混合支链 II 采用包含由 4 个转动副组成的平行四边形机构(简称: P_a 机构), 且至少包含 2T1R 运动元素的支链结构。

将移动副 P_3 与 P_a 机构一短边串联的转动副 R_5 刚性连接, 且移动副 P_3 的轴线与转动副 R_5 相互平行; 又在该 P_a 机构对边短杆上串联另一个转动副 R_6 , 使转动副 R_6 与动平台 1 另一端连接, 这样, 组成另外一条混合支链 II_1 。因此, 混合支链 II_1 可记作 $\{-P_3 \parallel R_5(-P_a) \parallel R_6-\}$, 如图 2a 所示。

同样, 将移动副 P_3 与 P_a 机构的一条短边平行且刚性连接, 在 P_a 机构的另一边短杆再串联转动副 R_6 , 使转动副 R_6 的轴线与 R_5 相互平行布置, 且用转动副 R_6 连接动平台 1 的另一端, 从而组成混合支链 II_2 。因此, 混合支链 II_2 可记作 $\{-P_3(-P_a) \parallel R_6-\}$, 如图 2b 所示。

对于混合支链 II_1 , 由式(2)可知, 混合支链 II_1 末端构件上 R_6 轴线外任一点的 POC 集为

$$M_3 = M_{P_3} \cup M_{P_a} \cup M_{R_5} \cup M_{R_6} = \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_3) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond abcd) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_6) \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_5) \\ r^1(\parallel R_5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix}$$

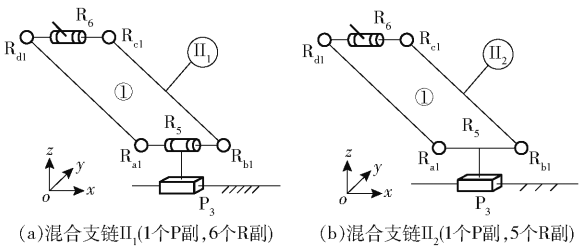


图 2 混合支链 II 的设计

Fig. 2 Hybrid branch chains II

因此, 混合支链 II_1 末端构件能够产生三维移动(3T)和平行于转动副 R_6 的一维转动(1R)。

对于混合支链 II_2 , 由式(2)可知, 混合支链 II_2 末端构件上 R_6 轴线上任一点的 POC 集为

$$M_4 = M_{P_3} \cup M_{P_a} \cup M_{R_6} = \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_3) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond abcd) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix}$$

因此, 混合支链 II_2 末端构件能够产生平行于 xoz 平面的二维移动(2T)和平行于转动副 R_6 的一维转动(1R)。

1.1.2 机构构成

使混合支链 I_1 中的移动副 P_1 、 P_2 与混合支链 II_1 中的 P_3 平行布置, 且将设计的混合支链 I_1 与混合支链 II_1 相互配合, 混合支链 I_2 与混合支链 II_2 组合, 分别并行地连接于静平台 0 与动平台 1 之间, 得到的机构 A 与机构 B 如图 3 所示。机构 A 动平台前端转动副 R_4 在 Y 向的位置不变, 而机构 B 动平台后端转动副 R_6 在 Y 向的位置不变。混合支链 I 都含有五杆机构, 混合支链 II 都含有 P_a 机构, 但其支链拓扑结构的局部稍有不同, 而运动副类型及总数均相同。

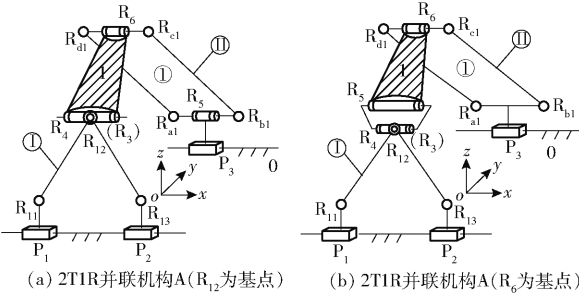


图 3 两种 2T1R 并联机构

Fig. 3 Two new types of 2T1R parallel mechanisms

根据式(1)可知, 2T1R 并联机构 A 动平台 1 上 R_4 轴线上一点的 POC 集为

$$M_{P_{a1}} = M_1 \cap M_3 = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{12}, R_4)) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond xoz) \\ r^1(\parallel R_6) \end{bmatrix}$$

同样, 2T1R 并联机构 B 动平台 1 上 R_6 轴线上一点的 POC 集为

$$M_{P_{a2}} = M_2 \cap M_4 =$$

$$\left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond (R_{12}, R_5)) \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_6) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^2(\parallel \diamond xoz) \\ r^1(\parallel R_6) \end{matrix} \right]$$

1.2 机构自由度计算

机构全周自由度计算公式^[11,24]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \quad (5)$$

$$\text{其中 } \xi_{Lj} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\} \quad (6)$$

$$v = m - n + 1$$

式中 F ——机构自由度

f_i ——第 i 个运动副的自由度 (不含局部自由度)

m ——机构所含的运动副数

v ——独立回路数

n ——机构所含的构件数

ξ_{Lj} ——第 j 个回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ ——由前 j 条支链组成的子并联机构的 POC 集

$M_{b(j+1)}$ ——第 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

对机构 A、B 而言, 显然, 第 1 条回路为平面五杆机构 (子并联机构), 易知, 其独立位移方程数 ξ_{L1} 为 3, 由式 (5) 可知, 该子并联机构自由度为

$$F_{(1-2)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{Lj} = 5 - 3 = 2$$

而第 2 回路有所不同, 对于并联机构 A, 第 2 回路由上述子并联机构、转动副组 ($R_3 \perp R_4$) 与混合支链 $\Pi_1 \{ -P_3 \parallel R_5(-Pa) \parallel R_6 - \}$ 构成, 其独立位移方程数 ξ_{L2} 由式 (6) 计算为

$$\xi_{L2} =$$

$$\dim. \left\{ \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^0 \\ r^2(\parallel \diamond (R_3, R_4)) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_6) \end{matrix} \right] \right\} =$$

$$\dim \left\{ \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond (R_6, R_{11})) \end{matrix} \right] \right\} = 5$$

故并联机构 A 的自由度 F_2 由式 (5) 计算为

$$F_2 = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 11 - 3 - 5 = 3$$

对于并联机构 B, 第 2 回路由上述子并联机构、转动副组 ($R_3 \perp R_4 \parallel R_5$) 与混合支链 $\Pi_2 \{ -P_3(-Pa) \parallel R_6 - \}$ 构成, 其独立位移方程数 ξ_{L3} 由式 (6) 计算为

$$\xi_{L3} = \dim. \left\{ \left[\begin{matrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_5) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_{11}) \\ r^1(\parallel \diamond (R_3, R_5)) \end{matrix} \right] \cup \right.$$

$$\left. \left[\begin{matrix} t^2(\perp R_6) \\ r^0 \end{matrix} \right] \right\} = \dim \left\{ \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond (R_6, R_{11})) \end{matrix} \right] \right\} = 5$$

故并联机构 B 自由度 F_1 由式 (5) 计算为

$$F_1 = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{Lj} = 11 - 3 - 5 = 3$$

机构自由度为 3, 因此, 当取静平台 0 上的移动副 P_1 、 P_2 、 P_3 为驱动副时, 动平台 1 可以实现 xoz 平面的两维移动和绕转动副 R_4 轴线的一维转动的输出运动。

1.3 耦合度计算

由基于单开链 (SOC) 组成原理^[11]可知, 任何一个机构都可分解为约束度为正、零、负的 3 种有序单开链 (SOC), 第 j 个 SOC _{j} 的约束度^[11,18]为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{Lj} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = +1, +2, +3 \end{cases} \quad (7)$$

式中 m_j ——第 j 个 SOC _{j} 的运动副数

I_j ——第 j 个 SOC _{j} 的驱动副数

一组有序的 v 个 SOC 可划分为若干个最小的子运动链 SKC, 每个 SKC 仅含一个自由度为零的基本运动链 (BKC), SKC 的耦合度 κ , 其计算式为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min. \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (8)$$

对于并联机构 A, 其两个回路的 SOC 约束度由式 (7) 分别计算为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^m f_i - I_1 - \xi_{L1} = 5 - 2 - 3 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^m f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 5 = 0$$

由 SKC 的判定准则^[11,24]可知, 并联机构 A 包含有 2 个 SKC, 其中, SKC₁ 为 $P_1 \perp R_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp P_2$, SKC₂ 为 $R_3 \perp R_4 \parallel R_6 \parallel Pa \parallel R_5 \parallel P_3$, 其耦合度由式 (8) 计算为

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{2} \min. \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

而对于并联机构 B, 两个回路的 SOC 约束度由式 (7) 分别计算为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^m f_i - I_1 - \xi_{L1} = 5 - 2 - 3 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^m f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 5 = 0$$

由 SKC 的判定准则^[11,24]可知, 并联机构 B 包含

有 2 个 SKC,其中,SKC₁ 为 P₁ ⊥ R₁₁ ∥ R₁₂ ∥ R₁₃ ⊥ P₂, SKC₂ 为 R₃ ⊥ R₄ ∥ R₅ ∥ R₆ ∥ P_a ∥ P₃,其耦合度由式(8)计算为

$$\kappa_3 = \kappa_4 = \frac{1}{2} \min. \left\{ \sum_{j=1}^n |\Delta_j| \right\} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

表明两种机构均只包含 2 个 SKC,其耦合度 κ 为 0,因此,机构符号式位置正解可由独立求解 2 个 SKC 而得。

1.4 运动解耦性与基于 SKC 的机构拓扑解析

并联机构 A、B 的拓扑结构解析式^[18]可表示为

$$\begin{aligned} & {}^{2T1R}PM^0[3,2(5,6)] = \\ & {}^{2T2R}SKC_1^0[0;3] + {}^{3T1R}SKC_2^0[0;5] = \\ & 3_J_{in} + BKC_1^0(0;3) + BKC_2^0(0;5) \quad (9) \\ & {}^{2T1R}PM^0[3,2(5,6)] = \\ & {}^{3T2R}SKC_1^0[0;3] + {}^{2T1R}SKC_2^0[0;5] = \\ & 3_J_{in} + BKC_1^0(0;3) + BKC_2^0(0;5) \quad (10) \end{aligned}$$

对上述两种并联机构的拓扑分析表明:这两个机构的动平台均可实现 xoz 运动平面内的两维移动(2T)以及绕 x 轴(平行于转动副 R₄ 轴线)的一维转动,其自由度均为 3。这两个机构的耦合度为零,进而无须设定虚拟变量,可直接求解得出其位置正解。动平台基点(对机构 A 而言为 R₄,对机构 B 而言为 R₆)在 y 轴方向的位置分量为定值。并联机构 A 在 xoz 平面内 x 轴方向和 z 轴方向的两维移动(x,z)由 SKC₁ 中的移动副 P₁、P₂ 决定,机构 A 的转动角由移动副 P₁、P₂、P₃ 共同决定;并联机构 B 在 xoz 平面内 x 轴方向的一维移动(x)由 SKC₁ 中的移动副 P₁、P₂ 决定,而在 xoz 平面内 z 轴方向的一维移动以及转动角由移动副 P₁、P₂、P₃ 共同决定;因此,并联机构 A 具有较好的部分运动解耦性。

2 并联机构运动学分析

2.1 位置分析

2.1.1 机构 A 正逆解分析

机构 A 的运动学模型如图 4 所示,其位置正解求解归纳为:已知求驱动副输入量 x₁、x₂、x₃,求动平台 1 基点位置 O'(x,y,z) 及姿态角 α。

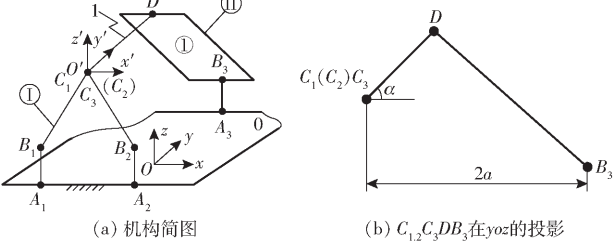


图 4 并联机构 A 运动学建模
Fig.4 Kinematic modeling of parallel mechanism A

设静平台 0 两导轨之间的距离为 2a,静坐标系 Oxyz 原点 O 位于两导轨的几何中心处,x 轴平行于 A₁A₂,y 轴垂直于 A₁A₂,z 轴由右手螺旋法则确定。在动平台 1 中转动副 R₄(图 4a 中点 C₃)的中心建立 O'x'y'z'坐标系,x'轴与静坐标系 x 轴平行且方向一致,y'轴与静坐标系 y 轴平行且方向一致,z'轴与静坐标系 z 轴平行且方向一致。

设 A₁B₁ = A₂B₂ = A₃B₃ = l₁, B₁C₁ = B₂C₂ = l₂, C₃D = l₃, DB₃ = l₄,动平台姿态角为 α,如图 4b 所示。

设 A₁ = (x₁, -a, 0), A₂ = (x₂, -a, 0), A₃ = (x₃, a, 0),则 B₁ = (x₁, -a, l₁), B₂ = (x₂, -a, l₁), B₃ = (x₃, a, l₁)。由 B₁C₁ = B₂C₂ = l₂,得 x_{c1} = x_{c2} = x_{c3} = $\frac{x_1 + x_2}{2}$,即

$$C_1 = C_2 = C_3 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, -a, l_1 + H \right) \quad (11)$$

该机构中 C_{1,2,3}D ∈ B₃ 在 yoz 面的投影,如图 4b 所示。

因此,可以得到

$$D = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, l_3 \cos \alpha - a, l_1 + l_3 \sin \alpha + H \right) \quad (12)$$

由杆长约束条件 DB₃ = l₄,可得

$$\alpha = 2 \arctan \frac{N_1 + m \sqrt{N_1^2 + N_2^2 - N_3^2}}{N_2 + N_3} \quad (m = \pm 1) \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 \right)^2} \\ I &= l_4^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right)^2 \\ N_1 &= 2Hl_3 \quad N_2 = -4al_3 \\ N_3 &= I - H^2 - l_3^2 - 4a^2 \end{aligned}$$

式(13)中 m = ±1,所以正解数目为 2 × 1 = 2。

而机构的位置逆解求解可归纳为:已知动平台 1 的位置 O'及姿态角 α,求驱动副输入量 x₁、x₂、x₃。

由杆长约束条件 DB₃ = l₄ 及位置正解,可得

$$\begin{cases} x_1 = x_{c3} + u \sqrt{l_2^2 - (z_{c3} - l_1)^2} \quad (u = \pm 1) \\ x_2 = 2x_{c3} - x_1 \\ x_3 = x_{c3} + v \sqrt{l_4^2 - (l_3 \cos \alpha - 2a)^2 - (l_3 \sin \alpha + z_{c3} - l_1)^2} \end{cases} \quad (v = \pm 1) \quad (14)$$

由于式(14)中 u = ±1, v = ±1,所以正解数目为 2 × 2 = 4。

2.1.2 机构 B 正逆解分析

机构 B 运动学模型如图 5 所示。

机构 B 静坐标 Oxyz 建立同机构 A。在动平台 1 中转动副 R₆(图 5a 中点 C₃)的中心建立 O'x'y'z'坐

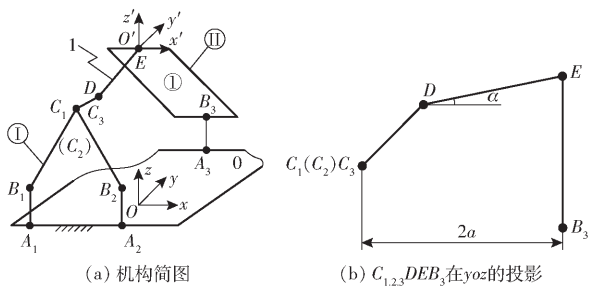


图 5 并联机构 B 运动学建模

Fig. 5 Kinematic modeling of parallel mechanism B

标系, x' 轴与静坐标系 x 轴平行且方向一致, y' 轴与静坐标系 y 轴平行且方向一致, z' 轴与静坐标系 z 轴平行且方向一致。

设 $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3 = l_1$, $B_1C_1 = B_2C_2 = l_2$, $C_3D = l_3$, $DE = l_4$, $EB_3 = l_5$, 动平台姿态角为 α , 如图 5b 所示。

设 $A_1 = (x_1, -a, 0)$, $A_2 = (x_2, -a, 0)$, $A_3 = (x_3, a, 0)$; 则 $B_1 = (x_1, -a, l_1)$, $B_2 = (x_2, -a, l_1)$, $B_3 = (x_3, a, l_1)$, $E = (x_E, y_E, z_E)$ 。因 $B_1C_1 = B_2C_2 = l_2$, 故 $x_{C1} = x_{C2} = x_{C3} = x_E - \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_E = a$, 易有

$$C_1 = C_2 = C_3 = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, -a, l_1 + \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2} \right)$$
$$D = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_E - l_4 \sin \alpha, z_E - l_4 \cos \alpha \right)$$

由杆长约束条件 $DE = l_4$, 可得

$$\begin{cases} z_E = l_1 + n \sqrt{l_5^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_3 \right)^2} & (n = \pm 1) \\ \alpha = 2 \arctan \frac{N_1 + m \sqrt{N_1^2 + N_2^2 - N_3^2}}{N_2 + N_3} & (m = \pm 1) \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$N_1 = 4al_4 \quad N_2 = 2Jl_4$$
$$N_3 = l_4^2 + J^2 + 4a^2 - l_3^2$$

$$J = z_E - l_1 - \sqrt{l_2^2 - \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right)^2}$$

由于式(15)中 $m = \pm 1, n = \pm 1$, 因此正解数目为 $2 \times 2 = 4$ 。

进一步, 逆解可由位置正解得

$$\begin{cases} x_1 = x_E + u \sqrt{l_2^2 - K} & (u = \pm 1) \\ x_2 = 2x_E - x_1 \\ x_3 = x_E + v \sqrt{l_5^2 - (z_E - l_1)^2} & (v = \pm 1) \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$K = [z_E - l_4 \cos \alpha - l_1 + w \sqrt{l_3^2 - (y_E - l_4 \sin \alpha + a)^2}]^2 \quad (w = \pm 1) \quad (17)$$

由于式(16)、(17)中 $u = \pm 1, v = \pm 1, w = \pm 1$,

因此反解数目为 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 。

2.1.3 正逆解验算

设并联机构 A 尺寸参数为: $a = 300 \text{ mm}$, $l_1 = 100 \text{ mm}$, $l_2 = 200 \text{ mm}$, $l_3 = 450 \text{ mm}$, $l_4 = 320 \text{ mm}$ 。取 3 个驱动量 $x_1 = -106.09 \text{ mm}$, $x_2 = 181.67 \text{ mm}$, $x_3 = -70.29 \text{ mm}$ 。将上述参数代入正解式(12)、(13)得到动平台的位置正解, 如表 1 所示。

表 1 运动学正解的理论计算值

Tab. 1 Theoretical calculation of forward kinematic solution

序号	x/mm	y/mm	z/mm	α/rad
1	37.79	-300	238.919 2	-0.709 7
2*	37.79	-300	238.919 2	0.254 7

表 1 中的 2 组数据对应的构型图如图 6 所示。

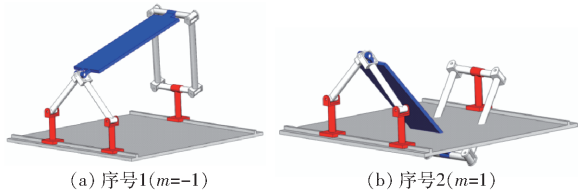


图 6 机构 A 的正解及其对应的构型

Fig. 6 Positive solution of mechanism A and its corresponding configuration

将以图 6a 构型(即表 1 中序号 1 对应的构型)作为机构 A 的后续运动学、动力学计算对象。

将在正解中表 1 中的序号 1 数值代入式(17), 得到的 4 组反解如表 2 所示, 其所对应 4 个构型如图 7 所示。

表 2 运动学反解的理论计算值

Tab. 2 Theoretical calculation of inverse kinematics

mm			
序号	x_1	x_2	x_3
1	181.67	-106.09	145.860 4
2	181.67	-106.09	-70.280 4
3	-106.09	181.67	145.860 4
4*	-106.09	181.67	-70.280 4

可见, 表 2 中序号 4 参数与设定的机构输入参数以及图 6a 与图 7d 所示构型一致, 从而验证了正逆解公式的正确性。

设并联机构 B 的尺寸参数为: $a = 300 \text{ mm}$, $l_1 = 100 \text{ mm}$, $l_2 = 200 \text{ mm}$, $l_3 = 180 \text{ mm}$, $l_4 = 450 \text{ mm}$, $l_5 = 320 \text{ mm}$ 。用同样的方法, 验证了机构 B 位置正逆解公式的正确性。

2.2 工作空间

工作空间表示动平台操作端的运动范围, 是并联机构的一个重要运动学指标^[24-25]。因并联机构 A、B 均具有符号位置正解, 故采用位置正解来计算

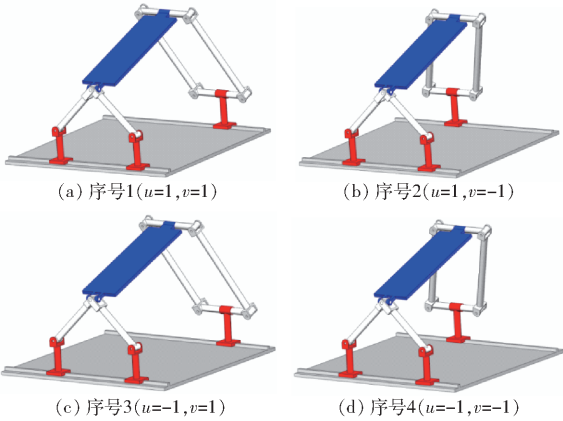


图 7 机构 A 的反解及其对应的构型

Fig. 7 Inverse solution of mechanism A and its corresponding configuration

工作空间。相比于通过位置逆解及预设工作空间的搜索范围、搜索所有满足约束条件的点以形成三维图的方法,该方法直接搜索驱动副的范围以确定工作空间,具有计算量少、工作空间计算准确等优点^[24]。

2.2.1 并联机构 A

确定机构 A 中 3 个驱动移动副 P_1 、 P_2 和 P_3 的移动量稍大于机构杆件移动范围,分别取为 $-250\text{ mm} \leq x_1 \leq 0\text{ mm}$, $0\text{ mm} \leq x_2 \leq 250\text{ mm}$, $-300\text{ mm} \leq x_3 \leq 300\text{ mm}$ 。通过 Matlab 软件,对正解式(14)~(16)进行编程,得到该机构动平台上质心的三维工作空间如图 8a 所示;而工作空间 xyz 中 3 个不同方向的投影如图 8b~8d 所示。

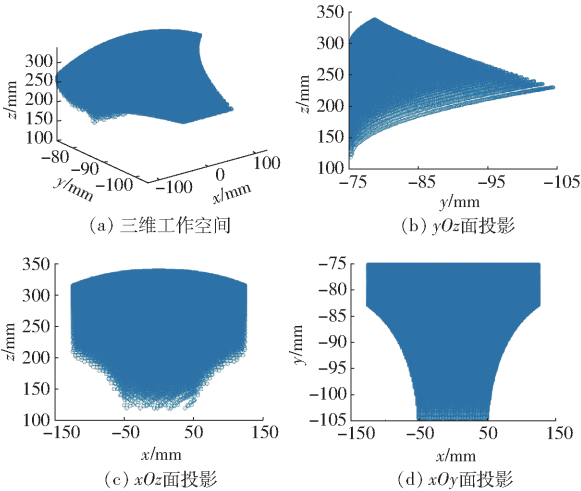


图 8 并联机构 A 工作空间及其在 xOy 、 yOz 、 xOz 面的投影

Fig. 8 Workspaces and its projection on xOy , yOz and xOz planes

工作空间在 $x = 60\text{ mm}$ 、 $y = -85\text{ mm}$ 、 $z = 300\text{ mm}$ 平面上的截图,如图 9 所示。

2.2.2 并联机构 B

同样,确定机构 B 中 3 个驱动移动副 P_1 、 P_2 和 P_3 的移动范围同机构 A。通过 Matlab 软件,对正解

式(15)进行编程,得到该机构动平台上质心的三维工作空间,如图 10a 所示;而工作空间 xyz 3 个不同方向的投影,如图 10b~10d 所示。

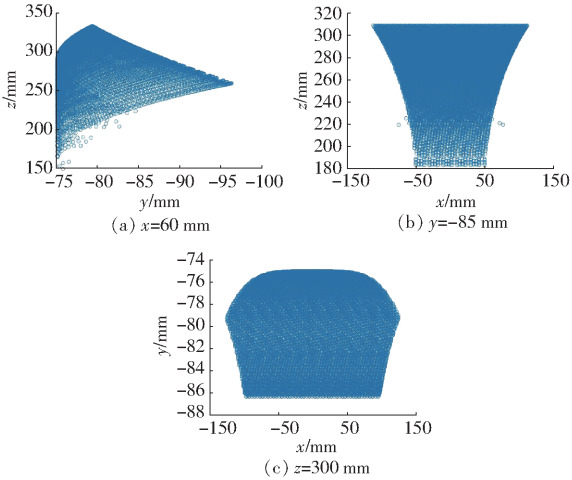


图 9 并联机构 A 工作空间内 xyz 方向上的截面图

Fig. 9 Different cross sections in x , y , z directions in workspace

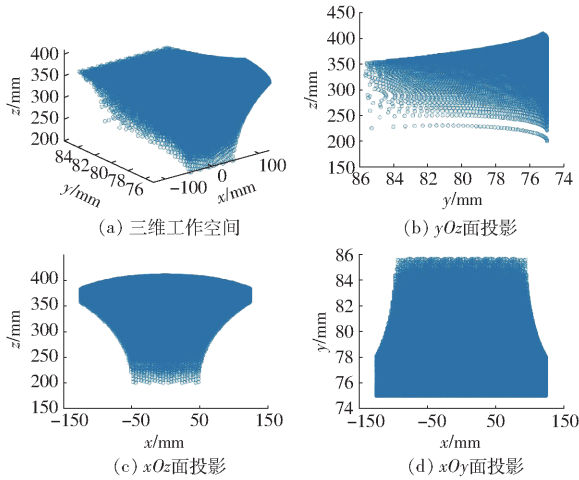


图 10 并联机构 B 工作空间及其在 xOy 、 yOz 、 xOz 面的投影

Fig. 10 Workspaces and its projection on xOy , yOz and xOz planes

工作空间在 $x = 50\text{ mm}$ 、 $y = 213\text{ mm}$ 、 $z = 385\text{ mm}$ 平面上的截图,如图 11 所示。

2.3 奇异性分析

采用基于雅可比矩阵的奇异位形及分析方法。雅可比矩阵为^[26-27]输入关节速度到机构末端输出速度的映射,由于矩阵内部元素与位置有关,该映射关系为

$$J_o \dot{X} + J_i \dot{p} = 0 \tag{18}$$

式中 J_o 、 J_i ——输出、输入雅可比矩阵

$\dot{X}$ ——输出元素 $\dot{p}$ ——输入元素

根据 J_o 和 J_i 矩阵是否奇异,将机构分为 3 种奇异类型:①当 $\det(J_i) = 0$ 时,机构发生输入奇异。②当 $\det(J_o) = 0$ 时,机构发生输出奇异。③当

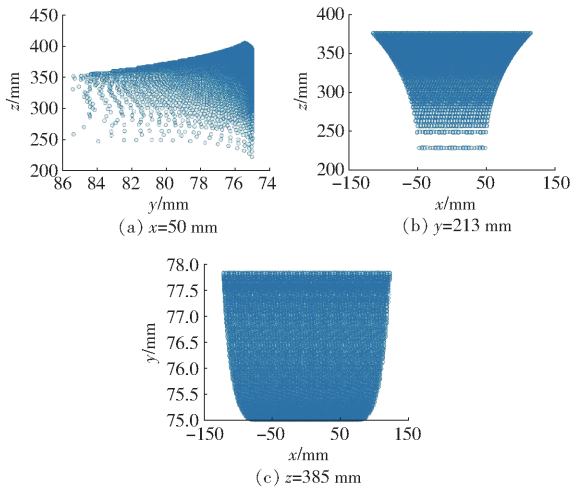

 图 11 并联机构 B 工作空间内 xyz 方向上的截面图

 Fig. 11 Different cross sections in x , y , z directions in workspace

$\det(\mathbf{J}_i) = \det(\mathbf{J}_o) = 0$ 时,机构发生综合奇异。

2.3.1 并联机构 A

设机构动平台基点 R_4 输出速度 $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha}]^T$, 驱动副输入速度 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3]^T$ 。对支链 I 和 II 分别建立满足几何杆长约束 $C_1B_1 = l_2$ 、 $C_2B_2 = l_2$ 、 $DB_3 = l_4$ 的位置方程,并全微分后可得

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_i = - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_{C3}} = 2(x_{C3} - x_1) \quad f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial z_{C3}} = 2(z_{C3} - l_1)$$

$$f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0 \quad f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_{C3}} = 2(x_{C3} - x_2)$$

$$f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial z_{C3}} = 2(z_{C3} - l_1) \quad f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0$$

$$f_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial x_{C3}} = 2(x_{C3} - x_3)$$

$$f_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial z_{C3}} = 2(z_{C3} + l_3 \sin \alpha - l_1)$$

$$f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = 2l_3[(a - y_{C3}) \sin \alpha + (z_{C3} - l_1) \cos \alpha]$$

$$g_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2(x_{C3} - x_1)$$

$$g_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2(x_{C3} - x_2)$$

$$g_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -2(x_{C3} - x_3)$$

(1) 输入奇异

当 $\det(\mathbf{J}_i) = 0$ 时,机构发生输入奇异,有 3 种

情况:① $g_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2(x_{C3} - x_1) = 0$,显然,该情况

不满足构型要求。② $g_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -2(x_{C3} - x_2) = 0$,

显然,该情况不满足构型要求。③ $g_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = -2(x_{C3} - x_3) = 0$,即点 A_3 与点 C_3 的 x 轴的坐标相等,如图 12 所示。

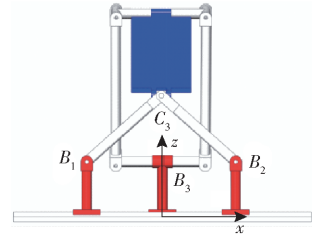


图 12 输入奇异位置

Fig. 12 Input singular position

(2) 输出奇异

当 $\det(\mathbf{J}_o) = 0$ 时,机构发生输出奇异。故机构

输出奇异也有 3 种情况:① $f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial z_{C3}} = 2(z_{C3} - l_1) = 0$,此时,点 C_3 和点 B_2 的 z 轴坐标相同,如图 13 所示。

② $f_{21} = f_{11}$ 时,即 $x_1 = x_2$,显然,该情况不满足构型要求。

③ $f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = 0$,即当动平台的姿态角满足

$\alpha = \arctan \frac{z_{C3} - l_1}{y_{C3} - a}$ 时,机构发生输出奇异。

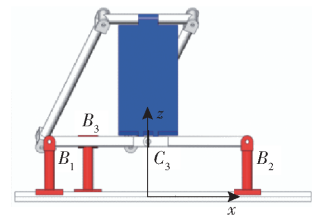


图 13 输出奇异位置

Fig. 13 Output singular position

(3) 综合奇异

当 $\det(\mathbf{J}_i) = \det(\mathbf{J}_o) = 0$ 时,即输入、输出奇异同时存在,机构才发生综合奇异,经分析该机构不发生综合奇异。

2.3.2 并联机构 B

设机构动平台基点 R_6 的输出速度 $\dot{\mathbf{X}} = [\dot{x} \quad \dot{z} \quad \dot{\alpha}]^T$, 驱动副的输入速度 $\dot{\boldsymbol{\rho}} = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3]^T$ 。对支链 I 和 II 分别建立满足几何杆长约束 $C_1D = l_3$ 、 $C_2B_2 = l_2$ 、 $EB_3 = l_5$ 的位置方程,并全微分可得

$$\mathbf{J}_0 = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_i = - \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}$$
$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_E} =$$
$$2 \frac{[z_E - l_4 \cos \alpha - l_1 - \sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2}](x_E - x_1)}{\sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2}}$$
$$f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial z_E} = -2[l_1 + \sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2} - z_E + l_4 \cos \alpha]$$
$$f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} =$$
$$-2l_3 \{ (a + y_E) \cos \alpha + [l_1 + \sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2} - z_E] \sin \alpha \}$$
$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_E} = 2(x_1 - x_2) \quad f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial z_E} = 0 \quad f_{23} = \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = 0$$
$$f_{31} = \frac{\partial f_3}{\partial x_E} = 2(x_E - x_3) \quad f_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial z_E} = 2(z_E - l_1)$$
$$f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = 0$$

$$g_{11} = -2 \frac{[z_E - l_4 \cos \alpha - l_1 - \sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2}](x_E - x_1)}{\sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2}}$$
$$g_{21} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2(x_E - x_1) \quad g_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2(x_E - x_2)$$
$$g_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 2(x_{C3} - x_3)$$

(1)输入奇异

当 $\det(\boldsymbol{J}_i) = 0$ 时,机构发生输入奇异,有 4 种情况:① $g_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -2(x_E - x_1) = 0$,显然,该情况不满足构型要求。② $g_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 2(x_E - x_2) = 0$,显然,该情况不满足构型要求。③ $g_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 2(x_E - x_3) = 0$,即点 A_3 与点 E 的 x 轴坐标相同时发生输入奇异,如图 14 所示。④ $g_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} =$

$$-2 \frac{[z_E - l_1 - \sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2} - l_4 \cos \alpha](x_E - x_1)}{\sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2}} = 0,$$

即点 C_1 与点 D 的 z 轴坐标相等时发生输入奇异,如图 15 所示。

(2)输出奇异

当 $\det(\boldsymbol{J}_o) = 0$ 时,机构发生输出奇异,故机构输出奇异也有 3 种情况:① $f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_E} = 0$,即 $x_1 = x_2$ 时,显然该情况不符合构型要求。② $f_{32} = \frac{\partial f_3}{\partial z_E} = 0$,此时,矩阵不满秩, $\det(\boldsymbol{J}_o) = 0$ 发生输出奇异,即点 E

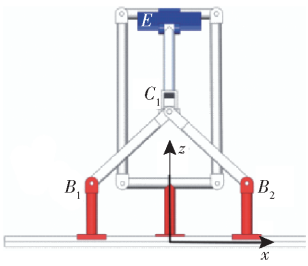


图 14 输入奇异位置 1

Fig. 14 Input singular position 1

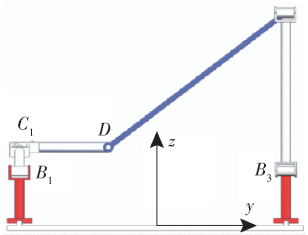


图 15 输入奇异位置 2

Fig. 15 Input singular position 2

与点 B_2 的 z 轴坐标相等,由于杆长之间干涉达不到该位置,因此,该情况下奇异位置不存在。③ $f_{13} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = 0$,即当动平台的姿态角满足等式 $\alpha = \arctan \frac{a + y_E}{z_E - l_1 - \sqrt{l_2^2 - (x_E - x_1)^2}}$ 时,机构发生输出奇异。

(3)综合奇异

当 $\det(\boldsymbol{J}_i) = \det(\boldsymbol{J}_o) = 0$ 时,机构才发生综合奇异;经分析发现该机构不发生综合奇异。

3 机构动力学分析

3.1 并联机构 A

因机构 A、B 的耦合度均为零,因此这两个机构各杆件的速度和加速度均可由刚体运动学速度(加速度)合成定律求得,其分析计算流程图如图 16 所示。

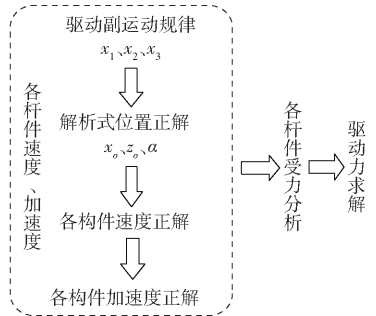


图 16 机构速度、加速度分析流程图

Fig. 16 Flow chart of velocity and acceleration analysis

取 3 个驱动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 的输入函数分别为 $y_1 = 20\sin(\pi t)$ 、 $y_2 = -10\sin(\pi t)$ 、 $y_3 = 20\sin(\pi t)$,且 3 个驱动副的初始位置分别为 $\rho_1 = -131.07 \text{ mm}$ 、 $\rho_2 = 181.55 \text{ mm}$ 、 $\rho_3 = -57.74 \text{ mm}$ 。

利用 Matlab 得到机构 A 动平台质心的速度与加速度的理论计算曲线如图 17 所示。

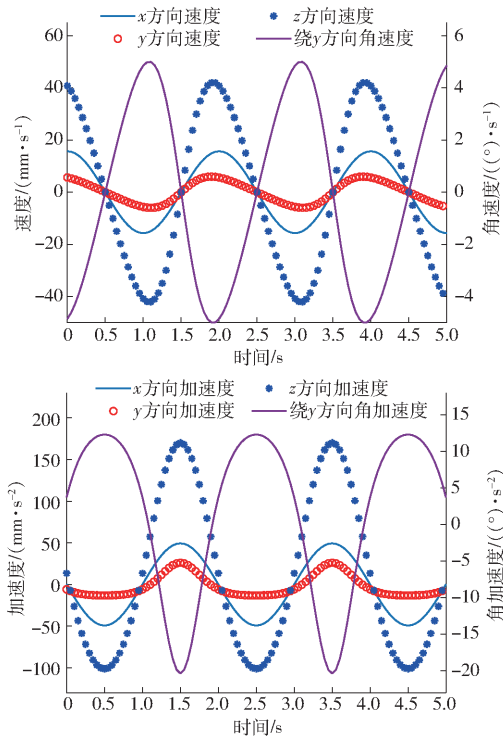


图 17 机构 A 动平台质心速度、加速度理论计算曲线
Fig. 17 Theoretical calculation curves of center of mass velocity and acceleration of moving platform of mechanism A

在 ADAMS 软件中对虚拟样机进行仿真,得到机构 A 动平台的质心的速度与加速度仿真曲线如图 18 所示。

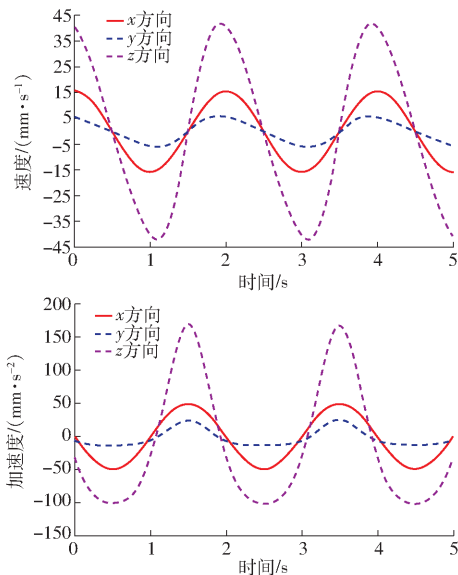


图 18 机构 A 动平台质心速度、加速度仿真曲线
Fig. 18 Simulation curves of center of mass velocity and acceleration of moving platform of mechanism A

3.2 并联机构 B

3 个驱动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 取相同的输入函数及 3 个驱动副的初始位置,利用 Matlab 得到机构 B 动

平台质心的速度与加速度的理论计算曲线如图 19 所示。

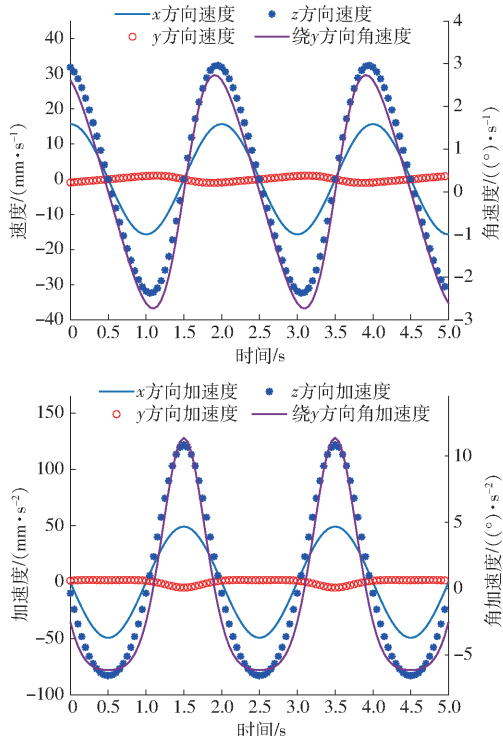


图 19 机构 B 动平台质心速度、加速度的理论计算曲线
Fig. 19 Theoretical calculation curves of center of mass velocity and acceleration of moving platform of mechanism B

在 ADAMS 软件中对虚拟样机进行仿真,得到机构 B 动平台的质心的速度与加速度仿真曲线如图 20 所示。

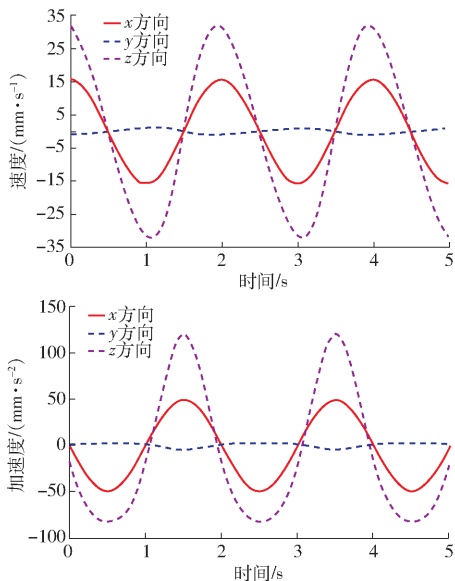


图 20 机构 B 动平台质心速度、加速度的仿真曲线
Fig. 20 Simulation curves of center of mass velocity and acceleration of moving platform of mechanism B

从图 17、18 及图 19、20 可知,并联机构 A、B 理论计算的速度与加速度曲线与 ADAMS 仿真得到的曲线一致,表明其运动学建模求解的正确性;动平台 1

质心的速度与加速度曲线变化平缓,没有陡增陡减的突变现象发生,表明该机构 A、B 运动性能良好,均有潜在利用价值。

3.3 机构动力学建模

3.3.1 基于虚功原理的力分析序单开链法

对自由度为 f 、广义速度为 $\dot{\mathbf{q}}_{(f)} = [\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \cdots \ \dot{q}_f]^T$ 的机械系统,基于单开链(SOC)的机构组成原理,将其分成若干个子运动链(SK),而每一个子运动链又可拓扑分解为若干个单开链;假定解除原系统若干个运动副的 k 个约束后,解除的运动副支反力将转换为作用在新系统构件上的未知外力。

3.3.1.1 并联机构 A

(1)SKC₂ 内各构件受力分析

取动平台质点为点 P ,则有

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} F_p \\ M_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p + m_p g - m_p a_1 \\ \tau_p - I_p \varepsilon_1 - \omega_1 \times (I_p \omega_1) \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中 f_p ——动平台质心外力
 τ_p ——动平台质心外力矩
 m_p ——动平台质量
 I_p ——动平台惯性矩阵
 ε_1 ——动平台角加速度
 ω_1 ——动平台角速度
 a_1 ——动平台线性速度
 g ——重力加速度

由驱动副 A_3B_3 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{A_3} = \begin{bmatrix} F_{A_3} \\ M_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 + m_{A_3} g - m_{A_3} a_{A_3} \\ K \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中 $K = [0 \ 0 \ 0]^T$

式中 f_3 ——驱动副 P_3 驱动力
 m_{A_3} ——驱动副 P_3 质量
 a_{A_3} ——驱动副 P_3 加速度

由转动杆 DB_3 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{DB_3} = \begin{bmatrix} F_{DB_3} \\ M_{DB_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{DB_3} g - m_{DB_3} a_{DB_3} \\ -I_{DB_3} \varepsilon_{DB_3} - \omega_{DB_3} \times (I_{DB_3} \omega_{DB_3}) \end{bmatrix} \quad (21)$$

式中 m_{DB_3} ——转动杆 DB_3 质量
 I_{DB_3} ——转动杆 DB_3 惯性矩阵

(2)SKC₁ 内各构件受力分析

由驱动副 A_iB_i 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{A_iB_i} = \begin{bmatrix} F_{A_iB_i} \\ M_{A_iB_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i + m_{A_iB_i} g - m_{A_iB_i} a_{A_iB_i} \\ K \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (22)$$

式中 f_i ——驱动副 A_iB_i 驱动力

$m_{A_iB_i}$ ——驱动副 A_iB_i 质量
 $a_{A_iB_i}$ ——驱动副 A_iB_i 加速度

由转动杆 B_jC_j 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{B_jC_j} = \begin{bmatrix} F_{B_jC_j} \\ M_{B_jC_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_jC_j} g - m_{B_jC_j} a_{B_jC_j} \\ -I_{B_jC_j} \varepsilon_{B_jC_j} - \omega_{B_jC_j} \times (I_{B_jC_j} \omega_{B_jC_j}) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (23)$$

式中 $m_{B_jC_j}$ ——转动杆 B_jC_j 质量
 $I_{B_jC_j}$ ——转动杆 B_jC_j 惯性矩阵

3.3.1.2 并联机构 B

(1)SKC₂ 内各构件受力分析

取动平台质点为点 P ,则有

$$\mathbf{Q}_p = \begin{bmatrix} F_p \\ M_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_p + m_p g - m_p a_1 \\ \tau_p - I_p \varepsilon_1 - \omega_1 \times (I_p \omega_1) \end{bmatrix} \quad (24)$$

由驱动副 A_3B_3 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{A_3} = \begin{bmatrix} F_{A_3} \\ M_{A_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_3 + m_{A_3} g - m_{A_3} a_{A_3} \\ K \end{bmatrix} \quad (25)$$

由转动杆 DB_3 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{DB_3} = \begin{bmatrix} F_{DB_3} \\ M_{DB_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{DB_3} g - m_{DB_3} a_{DB_3} \\ -I_{DB_3} \varepsilon_{DB_3} - \omega_{DB_3} \times (I_{DB_3} \omega_{DB_3}) \end{bmatrix} \quad (26)$$

(2)SKC₁ 内各构件受力分析

由驱动副 A_iB_i 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{A_iB_i} = \begin{bmatrix} F_{A_iB_i} \\ M_{A_iB_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i + m_{A_iB_i} g - m_{A_iB_i} a_{A_iB_i} \\ K \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (27)$$

由转动杆 B_jC_j 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{B_jC_j} = \begin{bmatrix} F_{B_jC_j} \\ M_{B_jC_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{B_jC_j} g - m_{B_jC_j} a_{B_jC_j} \\ -I_{B_jC_j} \varepsilon_{B_jC_j} - \omega_{B_jC_j} \times (I_{B_jC_j} \omega_{B_jC_j}) \end{bmatrix} \quad (j = 1, 2) \quad (28)$$

由转动杆 C_3D 受力分析可得

$$\mathbf{Q}_{C_3D} = \begin{bmatrix} F_{C_3D} \\ M_{C_3D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{C_3D} g - m_{C_3D} a_{C_3D} \\ -I_{C_3D} \varepsilon_{C_3D} - \omega_{C_3D} \times (I_{C_3D} \omega_{C_3D}) \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中 m_{C_3D} ——转动杆 C_3D 质量
 I_{C_3D} ——转动杆 C_3D 惯性矩阵

3.3.2 动力学方程建立

3.3.2.1 并联机构 A

解除两个 SKC 在点 C_3 的运动副约束之后,支反力 F_{C_3} 转化为未知外力,根据基于虚功原理的力分析序单开链法分别建立 SKC₁、SKC₂ 动力学方程为

$$\begin{aligned} & [\delta x_{A_1B_1} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_1B_1} + [\delta x_{A_2B_2} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_2B_2} + \\ & [\delta x_{B_1C_1} \quad \delta \theta_{B_1C_1}] \boldsymbol{Q}_{B_1C_1} + [\delta x_{B_2C_2} \quad \delta \theta_{B_2C_2}] \boldsymbol{Q}_{B_2C_2} - \\ & [\delta x_{DB_3} \quad \delta \theta_{DB_3}] [F_{C_3} \quad 0]^T = 0 \quad (30) \\ & [\delta x_{A_3B_3} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_3B_3} + [\delta x_{DB_3} \quad \delta \theta_{DB_3}] \boldsymbol{Q}_{DB_3} + \\ & [\delta x_p \quad \delta \theta_p] \boldsymbol{Q}_p + [\delta x_{DC_3} \quad \delta \theta_{DC_3}] [F_{C_3} \quad 0]^T = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \delta x_{A_iB_i} &= \boldsymbol{J}_{vA_iB_i} \delta q \quad (i = 1, 2, 3) \\ \delta x_{B_jC_j} &= \boldsymbol{J}_{vB_jC_j} \delta q \quad (j = 1, 2) \\ \delta x_{DB_3} &= \boldsymbol{J}_{vDB_3} \delta q \quad \delta x_p = \boldsymbol{J}_{vp} \delta q \quad \delta x_{DC_3} = \boldsymbol{J}_{vDC_3} \delta q \\ \delta \theta_{B_1C_1} &= \boldsymbol{J}_{\omega B_1C_1} \delta q \quad \delta \theta_{B_2C_2} = \boldsymbol{J}_{\omega B_2C_2} \delta q \\ \delta \theta_p &= \boldsymbol{J}_{\omega p} \delta q \quad \delta \theta_{DB_3} = \boldsymbol{J}_{\omega DB_3} \delta q \end{aligned}$$

将式(19)~(23)代入式(30)、(31)即可求出两个 SKC 连接处点 C_3 处的支反力。

3.3.2.2 并联机构 B

解除两个 SKC 在点 E 的运动副约束之后,支反力 F_{C_3} 转化为未知外力,同样可建立 SKC₁、SKC₂ 动力学方程为

$$\begin{aligned} & [\delta x_{A_1B_1} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_1B_1} + [\delta x_{A_2B_2} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_2B_2} + \\ & [\delta x_{B_1C_1} \quad \delta \theta_{B_1C_1}] \boldsymbol{Q}_{B_1C_1} + [\delta x_{B_2C_2} \quad \delta \theta_{B_2C_2}] \boldsymbol{Q}_{B_2C_2} - \\ & [\delta x_{DB_3} \quad \delta \theta_{DB_3}] [F_{C_3} \quad 0]^T = 0 \quad (32) \\ & [\delta x_{A_3B_3} \quad 0] \boldsymbol{Q}_{A_3B_3} + [\delta x_{EB_3} \quad \delta \theta_{EB_3}] \boldsymbol{Q}_{EB_3} + \\ & [\delta x_{DC_3} \quad \delta \theta_{DC_3}] \boldsymbol{Q}_{DC_3} + [\delta x_p \quad \delta \theta_p] \boldsymbol{Q}_p + \\ & [\delta x_{DC_3} \quad \delta \theta_{DC_3}] [F_{C_3} \quad 0]^T = 0 \quad (33) \end{aligned}$$

将式(24)~(29)代入式(32)、(33)即可求出两个 SKC 连接处点 C_3 处的支反力。

3.4 机构动力学的验证与仿真

3.4.1 并联机构 A

设机构 A 中各杆件的质量分别为: $m_{A_1B_1} = 0.056\ 93\ \text{kg}$; $m_{A_2B_2} = 0.056\ 93\ \text{kg}$; $m_{A_3B_3} = 0.067\ 27\ \text{kg}$; $m_{B_1C_1} = 0.072\ 01\ \text{kg}$; $m_{B_2C_2} = 0.070\ 42\ \text{kg}$; $m_{C_3D} = 0.494\ 4\ \text{kg}$; $m_{DB_3} = 0.105\ 86\ \text{kg}$; $m_{RaRb} = 0.071\ 83\ \text{kg}$; $m_{ReRd} = 0.062\ 41\ \text{kg}$ 。各杆件转动惯量如表 3 所示。

表 3 机构 A 各杆件转动惯量

Tab.3 Rotational inertia parameters of each rod

杆件	kg·mm ²		
	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
动平台 1	7161.965 91	1 188.415 07	7 105.550 01
杆件 B_1C_1	117.189 14	290.869 53	180.809 33
杆件 B_2C_2	113.152 85	276.086 63	173.435 02
杆件 DB_3	912.563 72	705.851 53	358.033 39

将上述参数代入动力学方程式(19)~(23),取

3.1 节(忽略摩擦时)该机构在负载 $5\ \text{kg}$ ($f_p = 50\ \text{N}$, $\tau_p = 0$) 状态下的驱动力,如图 21 所示。

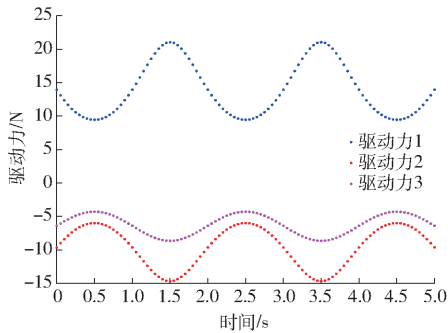


图 21 并联机构 A 驱动力理论曲线

Fig.21 Theoretical curves of driving force

将虚拟样机导入 ADAMS 中,选取运动仿真时间为 $5\ \text{s}$,得到的驱动力仿真曲线如图 22 所示。

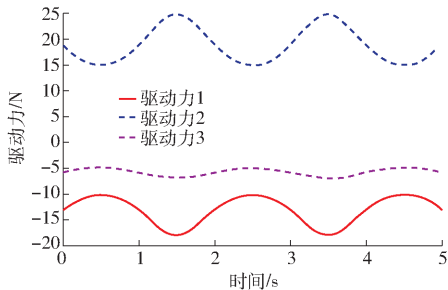


图 22 并联机构 A 驱动力仿真曲线

Fig.22 Simulation curves of driving force

3.4.2 并联机构 B

设机构 B 中各杆件的质量分别为: $m_{A_1B_1} = 0.056\ 93\ \text{kg}$; $m_{A_2B_2} = 0.056\ 93\ \text{kg}$; $m_{A_3B_3} = 0.124\ 90\ \text{kg}$; $m_{B_1C_1} = 0.072\ 01\ \text{kg}$; $m_{B_2C_2} = 0.070\ 42\ \text{kg}$; $m_{C_3D} = 0.494\ 4\ \text{kg}$; $m_{DE} = 0.494\ 4\ \text{kg}$; $m_{RaRb} = 0.105\ 67\ \text{kg}$; $m_{ReRd} = 0.063\ 78\ \text{kg}$ 。各杆件转动惯量如表 4 所示。

表 4 机构 B 各杆件转动惯量

Tab.4 Rotational inertia parameters of each rod

杆件	kg·mm ²		
	I_{xx}	I_{yy}	I_{zz}
动平台 1	7 161.965 91	628.670 41	7 665.294 66
杆件 B_1C_1	175.208 82	290.869 53	122.789 65
杆件 B_2C_2	168.189 58	276.086 63	118.398 30
杆件 DB_3	172.025 25	52.982 66	124.434 35

将上述参数代入动力学方程式(24)~(29),取 3.2 节的输入函数作为驱动副的输入函数,运用 Matlab 计算(忽略摩擦时)该机构在负载 $5\ \text{kg}$ ($f_p = 50\ \text{N}$, $\tau_p = 0$) 状态下运动副处的驱动力,如图 23 所示。

同时,将虚拟样机导入 ADAMS 中,选取运动仿真时间为 $5\ \text{s}$,得到的驱动力仿真曲线如图 24 所示。

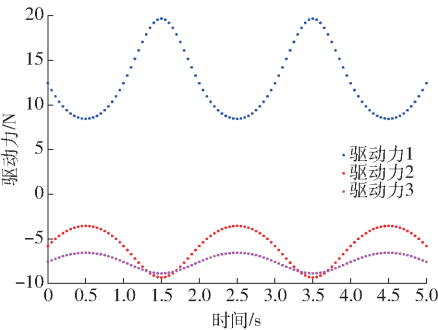


图 23 并联机构 B 驱动力理论曲线

Fig. 23 Theoretical curves of driving force

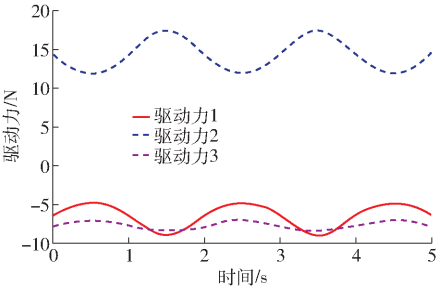


图 24 并联机构 B 驱动力仿真曲线

Fig. 24 Simulation curves of driving force

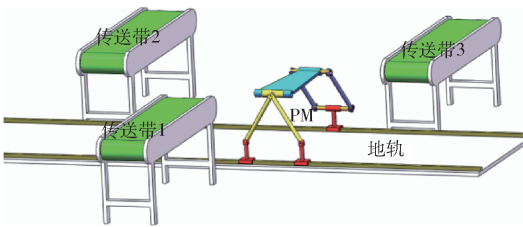
对比图 21、22 以及图 23、24 易知，驱动力理论计算曲线与 ADAMS 仿真曲线基本一致，即两种机构动力学模型是正确的，仅存在微小差距，其主要原因在于：各运动副连接处存在间隙，理论计算的参数值与实际模型的参数值有差距；以及 ADAMS 软件仿真是基于 Lagrange 方程建立的动力学仿真模型，而本文主要采用基于虚功原理的序单开链法，在计算时存在舍入误差和累计误差。

4 应用场景概念设计

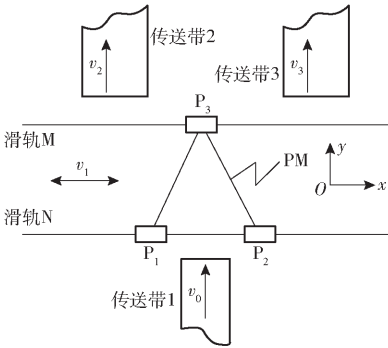
将设计的 2T1R 机构 A 应用于水果深加工的智能分拣、传送工艺中，其应用场景概念设计三维图如图 25a 所示，工作平面示意图如图 25b 所示，空间结构布置简图如图 25c 所示。其工作原理是：

(1) 传送带 1 以速度 v_0 将等待分拣加工的装筐苹果送至指定位置，2T1R 并联机构在传送带 1 的末端等待承接苹果，通过扫描识别装筐苹果的品质标签，以速度 v_1 进行运输，待运输到相对应品质的生产线时，并联机构通过动平台的斜坡将装筐苹果滑动到下一环节的传送带上。①品质略有瑕疵的装筐苹果通过动平台转运到传动带 2 上，以速度 v_2 进入苹果深加工车间。②品质较好的装筐苹果通过动平台转运到传送带 3 上，以速度 v_3 进入封装出货车间。

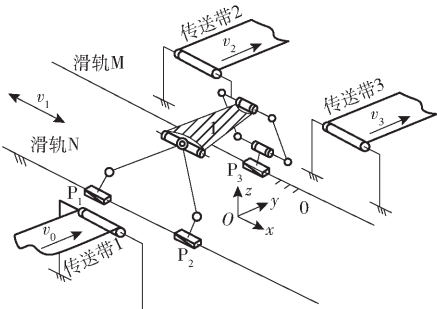
(2) 当导轨上的驱动移动副 P_1 、 P_2 、 P_3 取相同速度大小和方向时，可实现长距离的移动，以使传送带 1 上的装筐苹果通过传送带 2 将瑕疵苹果或通过传送



(a) 场景概念设计三维图



(b) 移动工作平面图



(c) 空间布置结构简图

图 25 应用场景的概念设计

Fig. 25 Conceptual design of application scenario

带 3 将高品质苹果送至相应的库存或相应环节进一步的加工。

(3) 当导轨上的驱动移动副 P_1 、 P_2 、 P_3 取不同速度大小和方向时，动平台可实现 xOz 平面内的二维移动和绕转动副 R_4 的一维转动，其中， x 轴方向和 z 轴方向的移动由 P_1 、 P_2 决定（可以调节动平台 x 、 z 位置），而转动角的转动由 P_1 、 P_2 、 P_3 共同决定（可以使动平台与传送带 2、3 之间位置对应一致，并在 y 轴方向上靠近传送带 1、2、3）。

5 结论

(1) 根据基于方位特征 (POC) 方程的并联机构拓扑结构设计理论与方法，设计两种零耦合度且部分运动解耦的 (2T1R) 并联机构，它们具有相同运动副类型和数目，但在支链中的分布顺序不同；分别对两种机构的自由度、耦合度等主要拓扑特性进行分析，结果表明这两种机构耦合度为零。

(2) 根据拓扑特征运动学分析方法对两个机构进行了运动学建模，验证了机构具有符号式位置正

解;且均具有部分运动解耦性,但机构 A 部分运动解耦程度更好;分析了这两种机构的工作空间及其奇异位置,表明机构 A 在相同的杆长和工作范围条件下,工作空间更大。

(3)求解了两种并联机构动平台中心点的速度与加速度曲线,表明这两种机构动平台质心的速度与加速度曲线变化平缓,没有陡增陡减的突变现象发生,具有良好的机构运动性能;同时根据

基于序单开链虚功原理对该机构进行逆向动力学建模,并求得其驱动力变化幅度相似且平缓,表明这两种机构在实际应用中电机选型的多样性。

(4)不同运动副分布顺序对并联机构运动学与动力学性能有较大影响;机构 A 的运动解耦性更好、工作空间更大,因此,选取机构 A 为优选机构;同时,对机构 A 用作水果深加工中智能分拣、传递的应用场景进行了概念设计。

参 考 文 献

[1] 李健,黄秀琴,沈惠平. 两平移—转动并联机构位置分析及运动学仿真[J]. 机械传动,2007(4):24-27.
LI Jian, HUANG Xiuqin, SHEN Huiping. Position analysis and kinematics simulation of two-translational one rotation parallel mechanis[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2007(4):24-27. (in Chinese)

[2] HUNT K H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983,105(4):705-712.

[3] ZHANG D, ZHENG Y, WEI L, et al. Type synthesis of 2T1R planar parallel mechanisms and their moduling development applications[J]. IEEE Access, 2021,99:1.

[4] 刘艳敏,李仕华,丁文华,等. 三自由度 3-RPUR 并联机构性能指标分析及优化设计[J]. 机械设计,2014,31(9):71-74,81.

[5] 余顺年,马履中,陈扼西,等. 新型串并联中医推拿机器人研究[J]. 中国机械工程,2005,16(19):84-89.
YU Shunnian, MA Lüzhong, CHEN Jiexi, et al. Research on a new series-parallel Chinese massage robot[J]. China Mechanical Engineering, 2005,16(19):84-89. (in Chinese)

[6] WANG Jinsong, LIU Xinjun. Analysis of a novel cylindrical 3-DOF parallel robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2001, 42(1):31-46.

[7] 杨宁,马履中,艾永强,等. 两平移—转动并联机构型综合研究[J]. 机械设计与研究,2005(5):29-32.
YANG Ning, MA Lüzhong, AI Yongqiang, et al. Comprehensive research on two parallel translational-rotational mechanisms[J]. Mechanical Design and Research, 2005(5):29-32. (in Chinese)

[8] REFAAT S, HERVE J M, NAHAVANDI S, et al. Asymmetrical three-DOFs rotational-translational parallel-kinematics mechanisms based on Lie group theory[J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2006, 25(3):550-558.

[9] 张彦斌,吴鑫,刘宏昭,等. 无奇异完全各向同性 2T1R 型并联机构的结构综合[J]. 中国机械工程,2008,19(3):277-281.
ZHANG Yanbin, WU Xin, LIU Hongzhao, et al. Structural synthesis of non-singular fully isotropic 2T1R parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2008,19(3):277-281. (in Chinese)

[10] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社,2004.

[11] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.

[12] SHEN Huiping, TANG Yao, WU Guanglei, et al. Design and analysis of a class of two-limb non-parasitic 2T1R parallel mechanism with decoupled motion and symbolic forward position solution-influence of optimal arrangement of limbs onto the kinematics, dynamics and stiffness[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022,172:104815.

[13] TETIK H. Modelling and control of a 3-RRS parallel manipulator, M. Sc Thesis[M]. İzmir Institute of Technology, 2016.

[14] SUN T, SONG Y M, LI Y G, et al. Dimensional synthesis of a 3-DOF parallel manipulator based on dimensionally homogeneous Jacobian matrix[J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2010, 53(1):168-174.

[15] LI Y, XU Q. Kinematic analysis of a 3-PRS parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2007, 23(4):395-408.

[16] 沈惠平,熊坤,孟庆梅,等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J]. 农业机械学报,2016,47(6):348-356.
SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Research on design method and application of motion decoupling of parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6):348-356. (in Chinese)

[17] 沈惠平,李菊,王振,等. 基于结构降耦和运动解耦的并联机构拓扑结构优化及其性能改善[J]. 机械工程学报,2017, 53(19):176-186.
SHEN Huiping, LI Ju, WANG Zhen, et al. Topological structure optimization and performance improvement of parallel mechanism based on structural decoupling and motion decoupling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017,53(19):176-186. (in Chinese)

[18] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京:高等教育出版社,2021.

[19] 黄凯伟,沈惠平,李菊,等. 一种具有符号式位置正解的部分运动解耦空间 2T1R 并联机构拓扑设计与动力学建模[J].

中国机械工程,2022,33(2):160 – 169.

HUANG Kaiwei, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Topological design and dynamics modeling of a spatial 2T1R parallel mechanism with partially motion decoupling and symbolic forward kinematics[J]. China Mechanical Engineering, 2022, 33(2): 160 – 169. (in Chinese)

[20] 梅莱 J P. 并联机器人[M]. 北京:机械工业出版社, 2014.

[21] DO THANH T, KOTLARSKI J, HEIMANN B, et al. Dynamics identification of kinematically redundant parallel robots using the direct search method[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 52: 277 – 295.

[22] 赵俊伟,李雪锋,陈国强. 基于 Lagrange 方法的 3 – PRS 并联机构动力学分析[J]. 机械设计与研究, 2015, 31(2): 1 – 5. ZHAO Junwei, LI Xuefeng, CHEN Guoqiang. Dynamic analysis of 3 – PRS parallel mechanism based on Lagrange method[J]. Mechanical Design and Research, 2015, 31(2): 1 – 5. (in Chinese)

[23] 沈惠平,肖思进,尤晶晶,等. 一平移两转动并联运动振动筛动力学建模与精度分析[J]. 农业机械学报, 2021, 52(2): 394 – 400. SHEN Huiping, XIAO Sijin, YOU Jingjing, et al. Dynamic modeling and precision analysis of parallel vibrating screen with one-translation and two-rotation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(2): 394 – 400. (in Chinese)

[24] 王向阳,郭盛,曲海波,等. 并联机构驱动力优化配置方法及应用研究[J]. 机械工程学报, 2019, 55(1): 32 – 41. WANG Xiangyang, GUO Sheng, QU Haibo, et al. Optimal allocation method of parallel mechanism and its application[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(1): 32 – 41. (in Chinese)

[25] 刘晓飞,唐艳华,刘鑫,等. 含约束支链的冗余驱动并联机构动力学性能优化[J]. 农业机械学报, 2021, 52(5): 378 – 385, 403. LIU Xiaofei, TANG Yanhua, LIU Xin, et al. Dynamics performance optimization for redundantly actuated parallel manipulator with constraint branch[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5): 378 – 385, 403. (in Chinese)

[26] 杨廷力. 机械系统基本理论—结构学、运动学、动力学[M]. 北京:机械工业出版社, 1996.

[27] HAN Xuzhao, JIN Pengbin, LI Suolao, et al. Workspace and singularity analysis of a 2P3RR planar parallel mechanism[C] // Proceedings of 2021 2nd International Conference on Control, Robotics and Intelligent System, 2021: 39 – 43.