

基于改进适应度函数组合法的机器人逆运动学求解

李光¹ 谭薪兴¹ 肖帆² 易静¹ 薛晨慷¹ 于权伟¹

(1. 湖南工业大学机械工程学院, 株洲 412007; 2. 武汉科技大学机械自动化学院, 武汉 430081)

摘要: 提出基于分离-重构方法获得智能算法的适应度函数, 并与解析法相结合求解一般结构多自由度机器人逆运动学, 一般结构满足至少一组相邻关节轴线交于一点。利用分离-重构的方法构建分离-重构适应度函数, 使用智能算法验证分离-重构适应度函数, 求解出部分关节角, 再结合解析法求出其余关节角。以一般结构的 FANUC CRX-10iA 型协作机器人为算例, 使用改进的 CMA-ES 算法验证分离-重构适应度函数, 仿真结果表明, 在相同条件下求解的点对点运动中, 单次平均求解时间为 0.0040 s, 适应度函数值稳定在 10^{-7} 数量级, 且迭代收敛次数稳定在 25 次左右; 在空间中对两种连续轨迹进行跟踪时, 单次平均耗时分别为 0.0068 s 和 0.0102 s, 位置误差均稳定在 10^{-7} m 数量级, 且各关节运动曲线平滑, 提升了多自由度机器人逆运动学分析的效率和精度。以 REBot-V-6R 型六自由度机器人为实验对象, 基于 VC++6.0 创建 MFC 实验平台, 进行连续的空间轨迹跟踪实验, 仿真与实验结果验证了该方法的有效性。

关键词: 一般结构机器人; 逆运动学; 适应度函数; 智能算法

中图分类号: TP242.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-1298(2022)10-0436-10

OSID:



Solution of Robot Inverse Kinematics with Combination Method of Improved Fitness Function

LI Guang¹ TAN Xinxing¹ XIAO Fan² YI Jing¹ XUE Chenkang¹ YU Quanwei¹

(1. College of Mechanical Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou 412007, China

2. College of Mechanical and Automation, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China)

Abstract: Robot inverse kinematics analysis is the basis of many researches, but the process of multi-degree-of-freedom robot with a general structure inverse kinematics is complicated, and the analytical method may have no solution. Combining the improved fitness function of intelligent algorithm with the analytical method, a method for solving the inverse kinematics of multi-degree-of-freedom robot with a general structure was proposed, which improved the efficiency and accuracy of multi-DOF inverse kinematics analysis. The general structure satisfied at least one set of adjacent joint axes intersect at one point. Using the method of disconnection and reconnection to construct the fitness function of disconnection and reconstruction, and intelligent algorithm was used to verify the fitness function of disconnection and reconstruction and solve some joint angles, and then the analytical method was combined to find the other joint angles. Compared with the fitness function constructed by other methods, this method simplified the process of establishing the fitness function and reduced the algebraic dimensionality of the fitness function. Taking the FANUC CRX-10iA collaborative robot as an example and using the improved CMA-ES algorithm to verify the fitness function of disconnection and reconstruction, the simulation results showed that in the solution of point-to-point inverse kinematics under the same conditions, the single average solution time was 0.0040 s, the fitness function value was stable at the order of 10^{-6} , and the iteration convergence times was stable at about 25 times. In order to verify the effectiveness of this method in environments with different levels of complexity, continuous trajectory tracking was performed in two-dimensional and three-dimensional spaces, the average time for a single time was 0.0068 s and 0.0102 s, respectively, the position error was stable at the level of 10^{-7} m, and the motion curve of each joint was smooth. Taking REBot-V-6R robot of six-DOF as the experimental

收稿日期: 2021-12-17 修回日期: 2022-02-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(11602082)和湖南省自然科学基金项目(2018JJ4079)

作者简介: 李光(1963—),男,教授,博士,主要从事机器人智能控制研究,E-mail: liguang@hut.edu.cn

object, the MFC experimental platform was created based on VC++ 6.0, and continuous space trajectory tracking experiments were carried out. Simulation and experimental results verified the effectiveness of the method.

Key words: general structure robot; inverse kinematics; fitness function; intelligent algorithm

0 引言

传统的逆向运动学的求解理论和方法有解析法^[1-3]、几何法^[4-5]、数值法^[6]等。解析法主要以消元的方式将高维方程组转换为低维方程组,PIEPER等^[7]提出了一类具有解析解的 6R 串联机械手,虽不满足 Pieper 准则的机器人逆向运动学问题,也获得了广泛的研究^[8-9],其给出的方法需要进行大量的三角代换,计算过程十分复杂耗时,很难在工业机械手中实现,且一般结构的机械臂无法得到解析解。几何法针对机器人的特殊结构进行简化再求解,一般无法单独使用甚至无法使用^[10]。数值法可以精确搜索到一组逆解,求解速度与初始值相关,甚至存在无解,且数值法需要的运算量大,不适合实时求解的场合^[11]。

近年来,利用智能算法求解机器人逆向运动学的方法取得一定的成果^[12-20]。神经网络算法的计算代价高,计算能力很大程度上取决于数据的量,同时也取决于网络的深度和复杂程度;遗传算法全局搜索能力强,局部搜索能力较弱,容易误入局部最优解;蚁群算法和鱼群算法参数设置复杂,如果设置不当,容易偏离最优解;粒子群算法和果蝇优化算法操作简单,收敛速度快,在机器人逆向运动学中也得到了应用,但存在提前收敛、维数灾难等问题。自适应协方差矩阵进化策略(Covariance matrix adaptation evolution strategy, CMA-ES)算法^[21-22]是在 ES 算法^[23]的基础上发展而来的无约束优化算法,在全局优化、多峰优化、多目标优化、大规模优化和结构性工程等领域得到了大量应用^[24-25],该算法搜索性能较高,并且能够达到比较高的搜索精度。

为克服单一的传统算法和单一的智能算法求解逆向运动学的不足,组合算法引起了许多学者的关注。赵瑜^[26]基于布谷鸟算法和牛顿法组合算法求解 6R 机器人运动学逆解,可以得到较高精度的逆运动学解,求解效率较低;陈禹含等^[27]结合旋量理论和代数法的求解逆运动学求解,求解过程较为复杂;裴九芳等^[28]采用解析解和数值解求解三指机器人逆向运动学,求解效率较高但通用性较差。

智能算法中适应度函数决定了机器人逆向运动学分析结果的性能,文献[29-31]阐述了建立适应度函数的常用方式,可以高精度地求出逆向

运动学解,但是该适应度函数较为复杂,增加了求解时间。

一般结构的机械臂没有解析解,用已有的代数法求封闭解的推导过程十分复杂,而单一的智能算法和组合算法求逆解均存在不足。一般结构机器人是指至少有一组相邻关节轴线相交于一点的机器人^[32]。本文提出一种基于分离-重构方法获得智能算法的适应度函数,与解析法相组合的方法求一般结构多自由度机械臂运动学逆解。利用分离-重构的方法^[33],构建分离-重构适应度函数,求解出部分关节角,最后利用解析法求解余下的关节角。选用改进的 CMA-ES 算法^[31]验证分离-重构适应度函数,以验证方法的有效性。在一般结构多自由度机器人上进行仿真,在相同条件下的点对点运动中,使用改进适应度函数的组合法和原方法求解,同时为模拟复杂程度不同的工作环境,对二维和三维空间中的连续轨迹进行跟踪,比较组合法和原方法的求解精度和关节角运动平稳性;在具有一般结构的 REBot-V-6R 机器人实验平台上进行三维空间连续轨迹的跟踪实验。

1 适应度函数与解析法

1.1 适应度函数

目前,DH 法是机器人运动学常用的建模方法,可以确定机器人的关节参数和关节变量,它与机器人结构顺序和复杂程度无关,通过齐次变换矩阵描述两个相邻坐标系间的空间位姿关系。

首先建立连杆坐标系,然后通过 4 次旋转平移变换,根据 DH 参数,定义第 i 连杆的参数 a_i 为连杆长度, α_i 为相邻两关节轴线的夹角, d_i 为第 i 根连杆和第 $i-1$ 连杆的偏置距离, θ_i 为第 i 连杆的旋转角。变换过程顺序如下:绕 z_{i-1} 轴旋转 θ_i ,沿 z_{i-1} 轴平移 d_i ,沿 x_i 轴平移 a_i ,绕 x_i 轴旋转 α_i ,可得到机器人连杆 i 坐标系相对于连杆 $i-1$ 坐标系的变换矩阵

$${}^{i-1}T_i = \mathbf{R}(\theta_i, z_{i-1})\mathbf{A}(d_i, z_{i-1})\mathbf{A}(a_i, x_i)\mathbf{R}(a_i, x_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 \mathbf{R} —— 4×4 的旋转矩阵 \mathbf{A} ——移动矩阵
式中 s 表示正弦函数, c 表示余弦函数。

根据式(1)得到一般结构多自由度机器人正向运动学数学模型,通过正向运动学控制机器人末端执行器到达指定位置,末端位姿齐次变换矩阵为

$${}^0_j\mathbf{T} = {}^0_1\mathbf{T}(\theta_1) {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) \cdots {}^{n-1}_n\mathbf{T}(\theta_n) = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

($j=1, 2, \dots, n$)

式中 \mathbf{p} —— 3×1 位置向量

\mathbf{a} —— 3×1 接近向量

为了建立分离-重构适应度函数,需要对具有一般结构的多自由度机械臂按一定方式进行分离-重构:在相邻轴线交点处进行分离-重构,相邻相交轴的坐标系如图1所示,子链 i 和 $i+1$ 交于点 O 。分离后为使两子链重构,需使得两子链的末端位姿一致。首先根据重构后两子链末端位置约束条件,建立约束等式

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i+1} \quad (3)$$

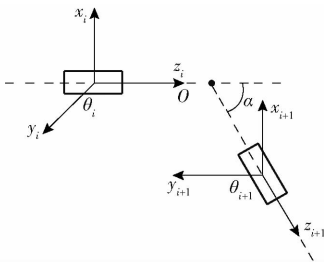


图1 相邻相交轴的坐标系

Fig.1 Coordinate system of adjacent intersecting axes

两子链 z 轴之间夹角为 α ,在实际应用中, α 一般不等于0,为使子链 i 绕 x_i 轴旋转 $-\alpha$,使子链 i 和 $i+1$ 的 z 轴重合,建立约束等式

$$\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_{i+1} = \cos \alpha \quad (4)$$

根据分离-重构点位置不同,一般结构自由度 n 机器人有 $n-1$ 种情况,以一般结构六自由度机器人为例,交点 O 有5种位置情况:关节轴1和轴2的交点、关节轴2和轴3的交点、关节轴3和轴4的交点、关节轴4和轴5的交点、关节轴5和轴6的交点,结合齐次变换矩阵式(2)可以得到以下5种情况

$$\begin{cases} \mathbf{T}_i = {}^4_5\mathbf{T}(\theta_5) {}^5_6\mathbf{T}(\theta_6) {}^0_6\mathbf{T}^{-1}(\theta_1) \mathbf{T}(\theta_1) \mathbf{R}(-a, x_1) \\ \mathbf{T}_{i+1} = {}^3_4\mathbf{T}^{-1}(\theta_4) {}^2_3\mathbf{T}^{-1}(\theta_3) {}^1_2\mathbf{T}^{-1}(\theta_2) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}_i = {}^5_6\mathbf{T}(\theta_6) {}^0_6\mathbf{T}^{-1}(\theta_1) \mathbf{T}(\theta_1) {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) \mathbf{R}(-a, x_2) \\ \mathbf{T}_{i+1} = {}^4_5\mathbf{T}^{-1}(\theta_5) {}^3_4\mathbf{T}^{-1}(\theta_4) {}^2_3\mathbf{T}^{-1}(\theta_3) \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}_i = {}^0_1\mathbf{T}(\theta_1) {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) \mathbf{R}(-a, x_3) \\ \mathbf{T}_{i+1} = {}^0_6\mathbf{T}(\theta_6) {}^5_6\mathbf{T}^{-1}(\theta_6) {}^4_5\mathbf{T}^{-1}(\theta_5) {}^3_4\mathbf{T}^{-1}(\theta_4) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}_i = {}^1_2\mathbf{T}(\theta_2) {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) {}^3_4\mathbf{T}(\theta_4) \mathbf{R}(-a, x_4) \\ \mathbf{T}_{i+1} = {}^0_1\mathbf{T}^{-1}(\theta_1) {}^0_6\mathbf{T}(\theta_6) {}^5_6\mathbf{T}^{-1}(\theta_6) {}^4_5\mathbf{T}^{-1}(\theta_5) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \mathbf{T}_i = {}^2_3\mathbf{T}(\theta_3) {}^3_4\mathbf{T}(\theta_4) {}^4_5\mathbf{T}(\theta_5) \mathbf{R}(-a, x_5) \\ \mathbf{T}_{i+1} = {}^1_2\mathbf{T}^{-1}(\theta_2) {}^0_1\mathbf{T}^{-1}(\theta_1) {}^0_6\mathbf{T}(\theta_6) {}^5_6\mathbf{T}^{-1}(\theta_6) \end{cases} \quad (9)$$

确定了分离-重构点位置,在式(5)~(9)选择一种合适的情况,将坐标变换矩阵式(1)代入,得到两子链的展开式 \mathbf{T}_i 和 \mathbf{T}_{i+1} ,对应式(2)中 \mathbf{p} 、 \mathbf{a} 矩阵的位置,根据位姿约束得到式(3)、(4),完成构建分离-重构适应度函数

$$J_{DR} = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\| + \|\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_{i+1} - \cos \alpha\| \quad (10)$$

$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i+1}\|$ 表示两子链末端的位置误差范数。 $\|\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_{i+1} - \cos \alpha\|$ 表示两子链末端的姿态约束范数,参照文献[32], J_{DR} 与相邻相交轴线的两个关节角度无关,只与其他关节角度和末端轴的位置相关,因此使用 J_{DR} 在智能算法解出的逆运动学结果只包含非相邻相交轴线的关节角,再利用解析法求解出 θ_{i+1} 和 θ_i ,改进适应度函数的组合法求解一般结构多自由度机器人逆运动学流程图如图2所示。

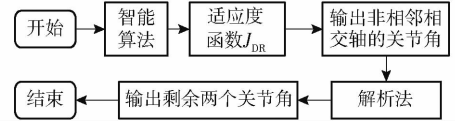


图2 组合法流程图

Fig.2 Flow diagram of combination method

在文献[29-31]提出的算法中,使用位姿误差建立适应度函数 J_{PP} 求解逆运动学, J_{PP} 表示两种误差范数之和,计算式为

$$J_{PP} = \|\mathbf{p}_{des} - \mathbf{p}_{cur}\| + b \|\mathbf{R}_{des} - \mathbf{R}_{cur}\| \quad (11)$$

式中 \mathbf{R} —— 3×3 的旋转矩阵^[34]

b ——罚函数

其中 $\|\mathbf{p}_{des} - \mathbf{p}_{cur}\|$ 表示位置误差范数, $\|\mathbf{R}_{des} - \mathbf{R}_{cur}\|$ 表示姿态误差范数,使用智能算法直接求出全部关节角,该方法的流程图如图3所示。

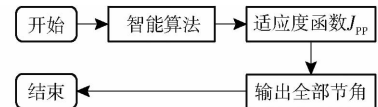


图3 原方法流程图

Fig.3 Flowchart of original method

J_{PP} 中包含全部关节变量,比 J_{DR} 多2个关节变量, J_{PP} 求解过程复杂, \mathbf{R} 是一个 3×3 的旋转矩阵,而 \mathbf{a} 是 3×1 的姿态矩阵, J_{PP} 的代数式维度更大,通过推导得到的代数式更复杂,在智能算法中求逆解时会明显增加耗时。

除此之外, J_{PP} 中还需设置位置误差函数的罚函数 b ,是为了保证姿态误差 $\|\mathbf{R}_{des} - \mathbf{R}_{cur}\|$ 和位置误差 $\|\mathbf{p}_{des} - \mathbf{p}_{cur}\|$ 在求解过程中处于同一数量级,防

止局部收敛和发散等情况^[35],但 J_{DR} 不存在这种情况。

1.2 解析法分析

通过求解 J_{DR} , 确定了多自由度机械臂非相邻相交轴线的关节角, 再通过解析法求解剩余的两个关节角, 避免了全部采用解析法求解的繁琐复杂, 解析法求解的两个关节角和智能算法求解出的其他关节角精度在同一数量级。机械臂已经确定了非相邻相交轴线的关节角, 则两子链末端的 α_i 和 α_{i+1} 将保持不变, 即 z_i 轴和 z_{i+1} 轴的位姿确定, 根据几何约束条件知 α_i 和 α_{i+1} 之间成 $\pi/2 - \alpha$, 故可以得到

$$\alpha_i^T \alpha_{i+1} = \cos(\pi/2 - \alpha) \quad (12)$$

式(12)展开后, 只有 θ_{i+1} 未知, 因此可以通过简单的数学计算解得, 且 θ_{i+1} 只有一个解。旋转坐标系关系图如图 4 所示。

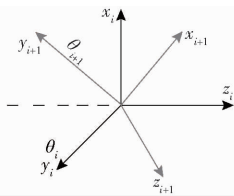


图 4 旋转坐标系关系图

Fig. 4 Relationship of rotating coordinate system

θ_{i+1} 在周期内绕 z_{i+1} 旋转, 只有当轴 y_{i+1} 位于 $z_i z_{i+1}$ 平面内才能满足约束条件, 因此在一个旋转周期内, θ_{i+1} 只有一个解。同理, α_i 和 α_{i+1} 之间呈 $\pi/2 + \alpha$, 故可以得到

$$\alpha_i^T \alpha_{i+1} = \cos(\pi/2 + \alpha) \quad (13)$$

式中只有 θ_i 未知, θ_i 也仅有一个解。使用解析法求剩下的 θ_{i+1} 和 θ_i , 只需求解两个一元一次方程, 求解过程简单方便, 解决了使用解析法求一般结构机器人逆运动学解计算繁琐复杂的问题。

2 改进的 CMA-ES 算法

2.1 算法原理

CMA-ES 算法是一种进化策略算法, 采用正态分布 $N(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ 生成一定数量的搜索种群, $N(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ 表示: 搜索分布均值为 \mathbf{m} , 以协方差矩阵为 \mathbf{C} 的多元正态分布, 且 $\mathbf{C} = \mathbf{BDB}^T$, 其中 $\mathbf{BB} = \mathbf{I}$, \mathbf{D} 为对角矩阵, 化简多元正态分布 $N(\mathbf{m}, \mathbf{C})$ 得

$$N(\mathbf{m}, \mathbf{C}) \sim \mathbf{m} + N(0, \mathbf{C}) \sim \mathbf{m} + \mathbf{BD}N(0, \mathbf{I}) \quad (14)$$

式(14)的“ \sim ”表示服从相同的分布, 由式(14)的逆序可知, \mathbf{I} 确定等概率密度圆球面, 通过 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 的变化可以确定 \mathbf{C} 的椭球面; 球面的分布尺度由 \mathbf{D} 中的对角元素决定, 主轴的方向由 \mathbf{B} 确定, 变化 \mathbf{B} 、 \mathbf{D} 实现球面的分布旋转。

2.2 算法步骤

步骤如下:

(1) 参数设置及初始化、静态参数^[36]。

(2) 突变, 突变的目的是使个体之间产生差异。CMA-ES 算法的突变过程是以当代的均值为中心, 产生下一代种群。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k^{(g+1)} &= \mathbf{m}^{(g)} + \sigma^{(g)} N_k(0, \mathbf{C}^{(g)}) \\ (k &= 1, 2, \dots, \lambda) \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $\mathbf{x}_k^{(g+1)}$ ——第 $g+1$ 代种群中生成的第 k 个个体, $\mathbf{x}_k^{(g+1)} \in \mathbf{R}^N$

$\mathbf{m}^{(g)}$ ——第 g 代种群中适应度排名前 μ 个个体的加权平均值

$\sigma^{(g)}$ ——第 g 代种群进化步长

$\mathbf{C}^{(g)}$ ——第 g 代种群进化协方差矩阵

μ ——父代数数量

(3) 选择和重组, CMA-ES 算法采用 (μ, λ) 策略, 父代不参与当前代的适应度排名竞争, 优秀个体只从当前子代中选择, 对 λ 个子代进行适应度评价, 根据适应能力由高到低排序, 选取适应能力强的前 μ 个个体, 作为下一代种群的父代, 更新策略参数 $\mathbf{m}^{(g)}$ 、 $\sigma^{(g)}$ 、 $\mathbf{C}^{(g)}$, 以此来传递优良的基因, 其过程如下:

① 均值移动: 下一代起始搜索点, 即新的均值 $\mathbf{m}^{(g+1)}$ 是从样本 $\mathbf{x}_1^{(g+1)}$, $\mathbf{x}_2^{(g+1)}$, \dots , $\mathbf{x}_\lambda^{(g+1)}$ 中选择出来的 μ 个最优子群的加权平均值。

② 协方差矩阵自适应调整。

③ 全局步长控制

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\sigma^{(g+1)} &= (1 - c_\sigma) \mathbf{q}_\sigma^{(g)} + \sqrt{c_\sigma(2 - c_\sigma)} \mu_{\text{eff}} \cdot \\ &\quad \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\sigma^{(g+1)} = \begin{cases} \varepsilon \sigma^{(g)} \rho & (\delta_b > 0) \\ \sigma^{(g)} \rho & (\delta_b \leq 0) \end{cases}$$

其中 $\rho = \exp\left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left(\frac{\|\mathbf{q}_\sigma^{(g+1)}\|}{E(\|N(0, \mathbf{I})\|)} - 1\right)\right)$ (17)

式中 μ_{eff} ——方差有效选择质量

ε ——缩放系数

ε 的主要作用是: 当代个体中存在越界行为时, 在下一代个体更新中, 及时阻止越界行为, 保证结果在要求范围内, 而 $\varepsilon < 0.56$ 容易导致出现“早熟”或者无法收敛; ρ 可看作步长变化的伸缩因子, δ_b 表示越界敏感因子, 个体每个维度在不可行域内出现次数的总和, 即不在关节范围内的次数总数, c_σ 为 \mathbf{q}_σ 更新学习率, d_σ 为接近于 1 的阻尼系数, $E\|N(0, \mathbf{I})\|$ 为归一化进化路径在随机选择下的期望长度。

(4) 判断是否达到最大迭代次数或精度, 若是,

则停止,输出最优解和最优决策向量,否则返回步骤(2),算法求解详细流程如图5所示。

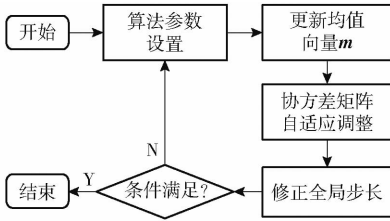


图5 改进的CAM-ES算法流程图

Fig.5 Flowchart of improved CAM-ES algorithm

3 仿真实验与结果分析

3.1 适应度函数求解

使用改进适应度函数的组合法和原方法对一般结构 FANUC CRX-10iA 型协作机器人进行逆向运动学计算。图6为 FANUC CRX-10iA 型机器人结构简图,可以看出是一般结构的机器人,且不满足 Pieper 准则,无法得到逆向运动学的完备解析式,表1为机器人连杆参数。

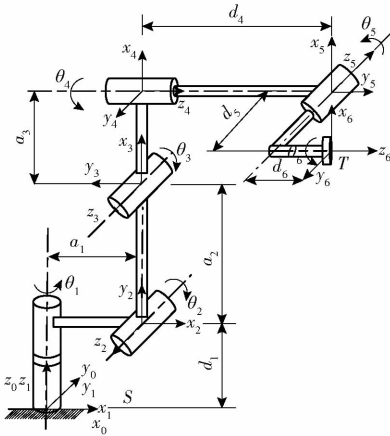


图6 FANUC CRX-10iA 型机器人结构简图

Fig.6 Structure diagram of FANUC CRX-10iA robot

表1 机器人连杆参数

Tab.1 Link parameters of robot

连杆 <i>i</i>	关节角 θ_i	扭角 α_i/rad	长度 a_i/m	偏置 d_i/m
1	θ_1	$\pi/2$	a_1	d_1
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	$\pi/2$	a_3	0
4	θ_4	$-\pi/2$	0	d_4
5	θ_5	$\pi/2$	0	d_5
6	θ_6	0	0	d_6

根据 1.1 节中对两种适应度函数的分析,由图6可得关节4和关节5相交于一点, J_{DR} 计算式为

$$J_{DR} = \sqrt{\sum_{r=1}^4 F_r^2} \quad (18)$$

经过计算,建立

$$J_{PP} = \sqrt{f_1 + f_2 + f_3 + bf_4} \quad (19)$$

其中 $a_1 = 0.1 \text{ m}$, $a_2 = 0.29 \text{ m}$, $a_3 = 0.121 \text{ m}$, $d_1 = 0.32 \text{ m}$, $d_4 = 0.31 \text{ m}$, $d_5 = 0.1 \text{ m}$, $d_6 = 0.1115 \text{ m}$, 使用适应度函数 J_{DR} 求解出 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 和 θ_6 , 通过解析式(12)、(13)求解相邻相交两轴的 θ_4 和 θ_5 , 可得计算式为

$$\theta_i = -\text{atan2}(E_i, D_i) + \text{atan2}(F_i, \pm \sqrt{D_i^2 + E_i^2 + F_i^2}) \quad (20)$$

$$\theta_{i+1} = -\text{atan2}(E_{i+1}, D_{i+1}) + \text{atan2}(F_{i+1}, \pm \sqrt{D_{i+1}^2 + E_{i+1}^2 + F_{i+1}^2}) \quad (21)$$

式(20)、(21)中, θ_{i+1} 和 θ_i 都只有单根, 1.2 节中已给出证明, 因此 $\sqrt{D_{i+1}^2 + E_{i+1}^2 + F_{i+1}^2} = 0$ 。

3.2 改进的CMA-ES算法参数设置

使用改进的CMA-ES算法验证分离-重构适应度函数, 设置算法的种群数量 $\lambda = 100$, 优秀个体 $\mu = 50$, 初始步长 $\sigma = 0.5$, 初始均值在 $0 \sim 1$ 内随机产生, 求解过程中, 前一个逆向运动学解作为当前初始点均值, 初始均值缩放系数 $\varepsilon = 0.65$, 算法停止条件为进化次数 $G = 100$ 或者适应度函数 $J \leq 10^{-6}$ 。

3.3 点到点运动仿真

在工作空间内, 机器人从指定初始位置 $\theta = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \text{ rad}$ 运动到指定目标关节位置: $\theta = [0.82 \ 0.93 \ 0.66 \ 0.73 \ 0.88 \ 0.99] \text{ rad}$, 分别使用组合法和原方法求解, 独立运行 50 次仿真结果如表2所示, 算法收敛情况如图7所示。结果表明, 同原方法比较, 组合法的求解速度更快更稳定。组合法迭代次数在 40 次以前就能完全满足精度要求, 且大部分迭代次数在 25 ~ 30 次之间收敛, 而原方法迭代 100 次仍然会出现不收敛的情况; 组合法的平均求解时间为 0.004 s, 原方法平均求解时间为 0.032 s, 速度提升了 7 倍, 从表2的标准差和图7可以看出, 组合法求解机器人运动学逆解更稳定。

表2 两种方法独立运行50次结果

Tab.2 Results of 50 independent runs of two methods

适应度函数	最小值	最大值	平均值	标准差	平均时间/s
J_{DR}	1.252×10^{-7}	9.952×10^{-7}	6.430×10^{-7}	1.995×10^{-7}	0.004
J_{PP}	1.003×10^{-6}	1.033×10^{-4}	3.610×10^{-6}	1.440×10^{-5}	0.032

3.4 连续轨迹跟踪仿真

为验证组合法在面对不同复杂程度的工作环境时轨迹跟踪的有效性, 在工作空间内分别使用二维空间的圆轨迹方程式和三维空间的圆锥螺旋轨迹方程式进行仿真, 公式为

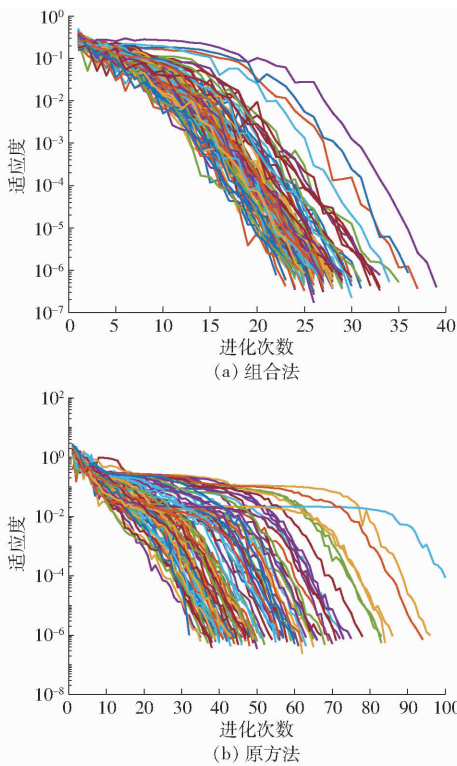


图 7 迭代收敛情况

Fig. 7 Situation of iterative convergence

$$\begin{cases}
 X_1 = o_1 + r(g_1 \cos\theta + h_1 \sin\theta) \\
 Y_1 = o_2 + r(g_2 \cos\theta + h_2 \sin\theta) \\
 Z_1 = o_3 + r(g_3 \cos\theta + h_3 \sin\theta) \\
 \mathbf{g} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2|} = [g_1 \quad g_2 \quad g_3] \\
 \mathbf{h} = \frac{\mathbf{n}_1 \times \mathbf{g}}{|\mathbf{n}_1 \times \mathbf{g}|} = [h_1 \quad h_2 \quad h_3] \\
 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
 \begin{cases}
 X_2 = 0.015\theta \sin\varphi \cos\phi + 0.41 \\
 Y_2 = 0.015\theta \sin\varphi \sin\phi \\
 Z_2 = 0.013\cos\varphi + 0.4
 \end{cases} \\
 0 \leq \theta \leq 6\pi
 \end{cases} \quad (22)$$

式(22)中,圆心坐标为 (o_1, o_2, o_3) , r 为圆半径, $\mathbf{n}_1 = [0 \ 0 \ 1] \text{ m}$ 为轨迹平面法向量,表示仿真轨迹平面垂直于向量 \mathbf{n}_1 , $\mathbf{n}_2 = [1 \ 0 \ 0] \text{ m}$;式(23)中, φ 和 ϕ 为常数,取 $\varphi = \pi/10, \phi = \pi/6$,两式步长均为 $\pi/60$ 。

采用两种方法对空间曲线进行跟踪,结果如表 3、4 所示,结果表明,在二维平面圆轨迹跟踪上,组合法单点的平均求解时间为 0.006 8 s,比使用原方法求解的速度提升 4 倍左右;在三维圆锥螺旋轨迹跟踪上,组合法速度提升 2 倍左右。

对轨迹上所有点进行了连续轨迹跟踪仿真,轨迹跟踪如图 8 所示,可以看到两种方法均能完全实现对给定曲线的跟踪。对空间中目标位置点 $\mathbf{P}(X,$

表 3 平面圆轨迹跟踪结果

Tab. 3 Tracking result of plane circular trajectory

适应度函数	最小值	最大值	平均值	标准差	平均求解时间/s
J_{DR}	1.366×10^{-7}	9.986×10^{-7}	6.453×10^{-7}	1.933×10^{-7}	0.006 8
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	
J_{PP}	3.541×10^{-7}	9.932×10^{-7}	7.659×10^{-7}	1.626×10^{-7}	0.033 3
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	

表 4 圆锥螺旋轨迹跟踪结果

Tab. 4 Tracking results of conical spiral trajectory

适应度函数	最小值	最大值	平均值	标准差	平均求解时间/s
J_{DR}	9.118×10^{-8}	1.000×10^{-7}	6.322×10^{-7}	2.090×10^{-7}	0.010 2
	10^{-8}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	
J_{PP}	2.489×10^{-7}	$9.999 5 \times 10^{-7}$	7.355×10^{-7}	1.736×10^{-7}	0.029 1
	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	

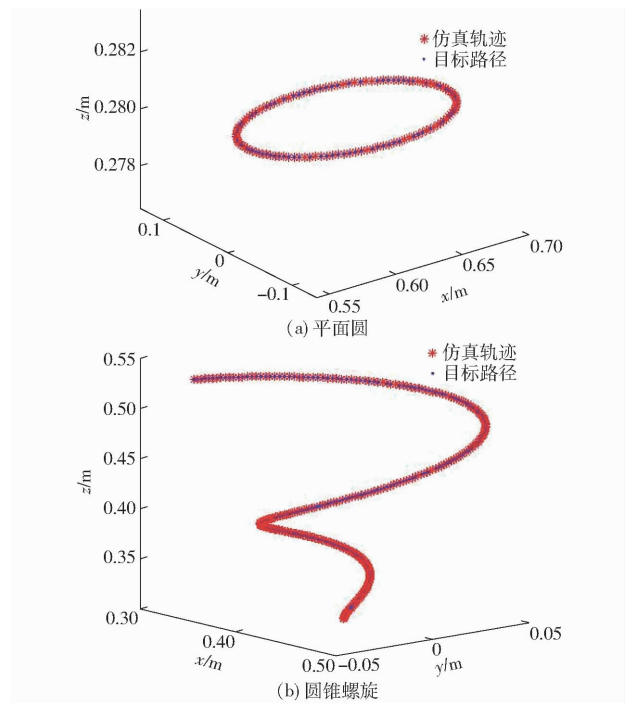


图 8 轨迹跟踪

Fig. 8 Trajectory tracking

$Y, Z)$ 和仿真位置点 $\mathbf{p}(x, y, z)$ 之间的欧氏距离 $\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$ 进行分析,其中 (X, Y, Z) 表示目标点的三维空间坐标, (x, y, z) 表示仿真结果的三维空间坐标,轨迹跟踪误差如图 9 所示,结果表明:组合法得出的位置误差值比原方法的位置误差低 3 个数量级,组合法的轨迹跟踪精度更高。

图 10、11 为组合法和原方法连续跟踪两种轨迹的关节角度变化曲线,从图 10b 和图 11b 可以看出,原方法在关节角度变化率较大的地方存在锯齿波动,而组合法跟踪过程中关节角曲线平稳光滑。

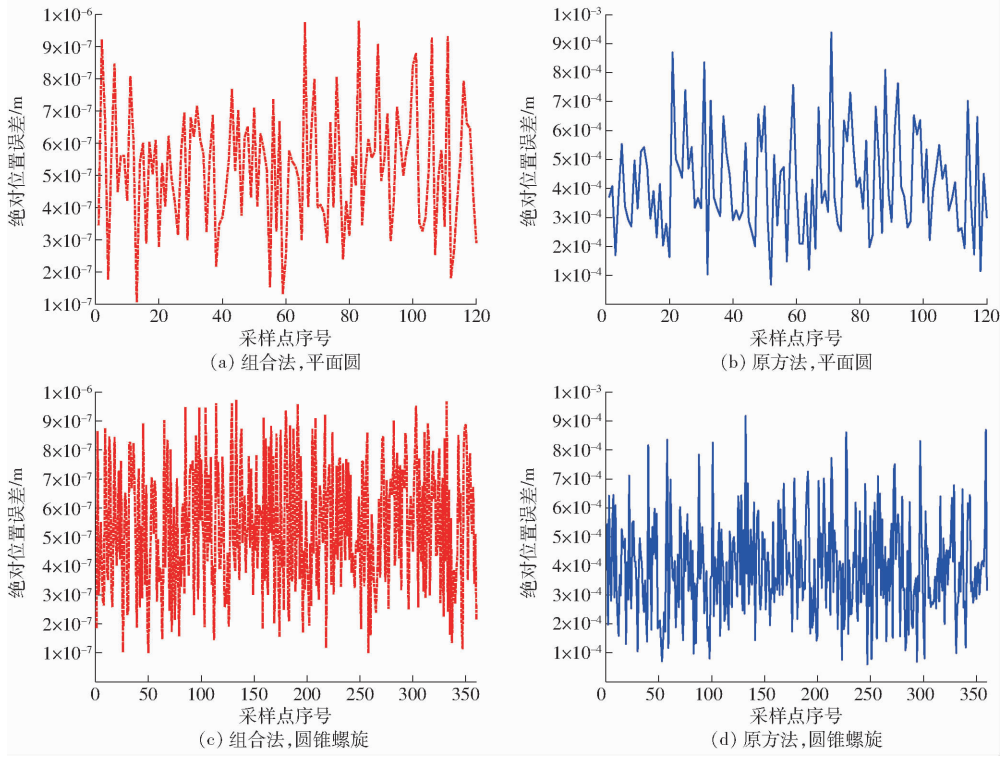


图9 轨迹跟踪误差曲线
 Fig.9 Error curves of trajectory tracking

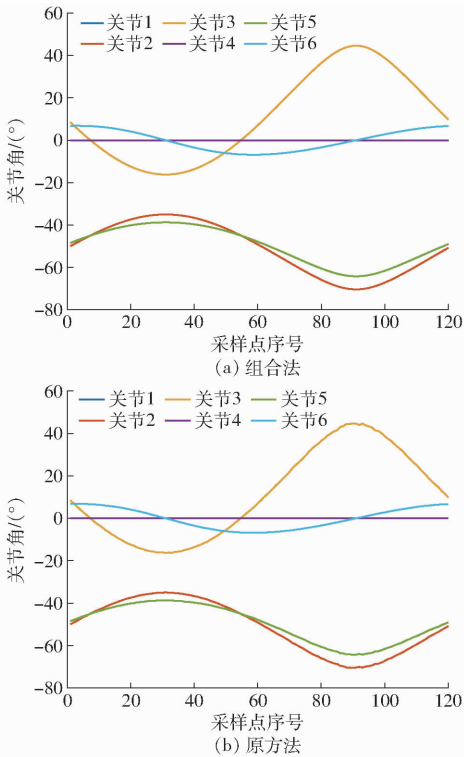


图10 平面圆轨迹关节角变化曲线

Fig.10 Changes of joint angle of plane circular trajectory

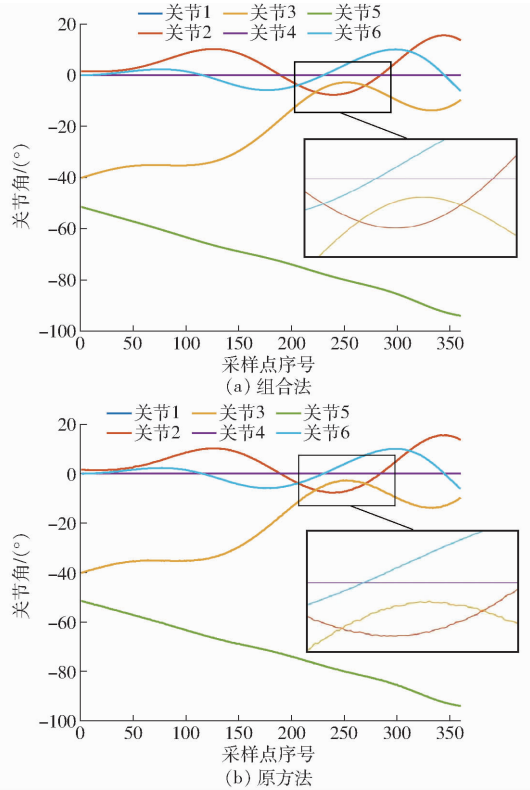


图11 圆锥螺旋轨迹关节角变化曲线

Fig.11 Changes of joint angle of conical spiral trajectory

4 实验

以 REBot-V-6R 型六自由度机器人作为实验平台,使用所提的组合法在三维空间中进行轨迹跟踪实验,实验装置见图 12,使用 VC++6.0 搭建的软

件环境。

使用三维空间的斜面圆轨迹进行轨迹仿真和实验,在 $\pi/4$ 斜面上用彩色笔跟踪轨迹,轨迹方程和式(22)一致,但参数不同,圆心坐标为 $(o_1, o_2, o_3) =$



图 12 实验装置

Fig. 12 Experimental device

$(0, -0.53, 0.385)$ m, $r=0.075$ m 为斜圆半径, $\mathbf{n}_1 = [0 \ 1 \ 1]$ m 为轨迹平面法向量, $\mathbf{n}_2 = [1 \ 0 \ 0]$ m, 步长为 $\pi/60$ 。

首先在 VC++6.0 平台上基于 MFC 框架编写的程序, 将求解的逆向运动学数据转换成各关节对应的脉冲数量, 写入软件程序中, 通过 GALIL 运动控制卡提供的函数接口, 建立上位机与机械臂之间的通信, 然后进行机械臂末端位置标定, 最后进行实验。实验过程中各关节运动平稳, 顺利地实现了对给定空间轨迹的跟踪, 通过计算得到, 跟踪误差变化曲线如图 13 所示, 误差结果控制在 10^{-7} m 数量级, 实验结果如图 14 所示, 机械臂末端完全跟踪上了斜圆轨迹, 结果表明了改进适应度函数组合法的有效性和准确性。

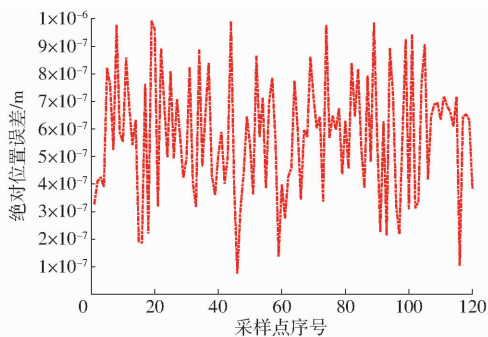
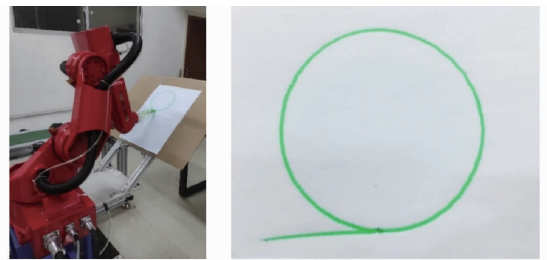


图 13 跟踪误差变化曲线

Fig. 13 Tracking error



(a) 实验过程

(b) 跟踪结果图

图 14 实验结果

Fig. 14 Experimental results

5 结论

(1) 提出了一种智能算法的适应度函数, 与解析法组合求解具有一般结构多自由度的机器人运动学逆解, 使用分离-重构法建立适应度函数 J_{DR} , J_{DR} 具有简单可靠的特点, 使用改进适应度函数的组合法求逆解, 求解速度更优越, 求解性能更稳定, 轨迹更平滑; 在点对点运动求得的逆解中, 组合法求解速度比原方法提升 7 倍左右; 为验证组合法在不同复杂环境中的有效性, 分别在二维平面圆轨迹和三维圆锥螺旋轨迹进行仿真实验, 在两种连续的三维轨迹跟踪中, 组合法求解速度比原方法分别提升 4 倍左右和 2 倍左右。

(2) 在相同条件下, 两种方法求解三维连续轨迹的适应度函数值均在 10^{-7} 数量级, 但组合法求解得到的位置精度比原方法高出 3 个数量级, 且组合法不需要设置罚函数; 通过在 REBot-V-6R 型六自由度机器人实验平台上进行三维轨迹跟踪实验, 验证了改进适应度函数的组合法在求解一般结构六自由度机器人逆运动学中的有效性和准确性。

参 考 文 献

- [1] JIANG Li, HUO Xijian, LIU Yiwei, et al. An analytical inverse kinematic solution with the reverse coordinates for 6-DOF manipulators[C]//2013 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA), 2013: 1552-1558.
- [2] VASILYEV I A, LYASHIN A M. Analytical solution to inverse kinematic problem for 6-DOF Robot-Manipulator[J]. Automation and Remote Control, 2010, 71(10): 2195-2199.
- [3] 刘华山, 朱世强, 吴剑波, 等. 基于向量内积的机器人实时逆解算法[J]. 农业机械学报, 2009, 40(6): 212-216, 207. LIU Huashan, ZHU Shiqiang, WU Jianbo, et al. Real time inverse kinematics algorithm based on vector dot product[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(6): 212-216, 207. (in Chinese)
- [4] 黄晨华. 工业机器人运动学逆解的几何求解方法[J]. 制造业自动化, 2014, 36(15): 109-112. HUANG Chenhua. A geometric approach for solving a industrial robot inverse kinematics[J]. Manufacturing Automation, 2014, 36(15): 109-112. (in Chinese)
- [5] 鄢波, 颜国正. 基于几何法的管道焊缝扫查七关节机器人逆运动学分析[J]. 中国机械工程, 2005, 16(1): 22-25. YAN Bo, YAN Guozheng. Inverse kinematics analysis of 7-DOF manipulator for pipe's weld inspection based on geometric method[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(1): 22-25. (in Chinese)
- [6] 罗小平, 韦巍. 一种基于生物免疫遗传学的冗余机械手轨迹规划新方法[J]. 模式识别与人工智能, 2002, 15(3): 299-304. LUO Xiaoping, WEI Wei. A new trajectory planning method for redundant manipulator based on immunogenetics[J]. Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 2002, 15(3): 299-304. (in Chinese)

- [7] PIEPER D, ROTH B. The kinematics of manipulators under computer control[C]//Proc. of the 2nd International Congress on Theory of Machines and Mechanisms, 1969: 159 – 169.
- [8] LIU Songguo, ZHU Shiqiang. An optimized real time algorithm for the inverse kinematics of general 6R robots [C] // International Conference on Control and Automation, 2007: 176 – 180.
- [9] FRIEDEMANN G, KONRAD G, ALEXANDER V. On the inverse kinematics of an a priori unknown general 6R – Robot[J]. Robotica, 2013, 31(3): 445 – 464.
- [10] 李光,肖帆,杨加超,等. 基于唯一域方法的机器人逆向运动学求解[J]. 农业机械学报,2019,50(10):386 – 394.
LI Guang, XIAO Fan, YANG Jiachao, et al. Solution of inverse kinematics of robots based on unique domain method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(10):386 – 394. (in Chinese)
- [11] 赵众集,高雪官,荣健,等. 八自由度焊缝检测机械臂逆运动学求解及仿真[J]. 机电一体化,2018,24(增刊):12 – 17.
ZHAO Zhongji, GAO Xueguan, RONG Jian, et al. The inverse kinematics solution of an 8 – DOF weld-inspection robot arm and its simulation[J]. Mechatronics,2018,24(Supp.):12 – 17. (in Chinese)
- [12] GAO Ruihua. Inverse kinematics solution of robotics based on neural network algorithms[J]. Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 2020, 11(12): 6199 – 6209.
- [13] 肖帆,李光,游雨龙. 基于唯一特征的 BP 神经网络求解平面 2R 机械手逆运动学[J]. 湖南工业大学学报,2019,33(5): 51 – 56.
XIAO Fan, LI Guang, YOU Yulong. Inverse kinematics solution of planar 2R manipulator based on BP neural network with unique feature[J]. Journal of Hunan University of Technology,2019,33(5):51 – 56. (in Chinese)
- [14] YANG Yugui, PENG Guangzheng, WANG Yifeng, et al. A new solution for inverse kinematics of 7 – DOF manipulator based on neural network[C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Automation and Logistics, ICAL 2007, 2007: 1958 – 1962.
- [15] 张立博,李宇鹏,朱德明,等. 基于遗传算法的护理机器人逆运动学求解方法研究[J/OL]. 北京航空航天大学学报, DOI:10.13700/j. bh. 1001-5965. 2001. 0042.
ZHANG Libo, LI Yupeng, ZHU Deming, et al. Research on solving method of inverse kinematics of nursing robot based on genetic algorithm[J/OL]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, DOI:10.13700/j. bh. 1001-5965. 2001. 0042. (in Chinese)
- [16] ZHEN Sui, LI Jiang, YAN-TAO Tian, et al. Genetic algorithm for solving the inverse kinematics problem for general 6R robots [J]. Lecture Notes in Electrical Engineering, 2015, 338: 154 – 164.
- [17] 刘雪梅,冯焱,杨振,等. 冗余机器人喷涂系统改进人工鱼群逆运动学求解算法[J]. 中国机械工程,2022,33(11):1317 – 1323.
LIU Xuemei, FENG Yan, YANG Zhen, et al. Improved artificial fish swarm algorithm for solving inverse kinematics of redundant robotic spraying system[J]. China Mechanical Engineering,2022,33(11):1317 – 1323. (in Chinese)
- [18] 顾嘉伟,吴功平,彭向阳,等. 云模型遗传蚁群算法的机器人逆运动学求解[J]. 机械设计与制造,2021(6):164 – 168.
GU Jiawei, WU Gongping, PENG Xiangyang, et al. Solution of inverse kinematics for robots rooted in cloud model genetic and ant colony algorithm[J]. Machinery Design & Manufacture,2021(6):164 – 168. (in Chinese)
- [19] 韩兴国,宋小辉,殷鸣,等. 6R 焊接机器人逆解算法与焊接轨迹误差分析[J]. 农业机械学报,2017,48(8):384 – 390,412.
HAN Xingguo, SONG Xiaohui, YIN Ming, et al. Solution of inverse kinematics and welding trajectory error analysis for 6R welding robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(8):384 – 390,412. (in Chinese)
- [20] 石建平,李培生,刘国平,等. 基于混合学习果蝇优化算法的冗余机械臂逆运动学求解[J]. 农业机械学报,2021,52(9): 410 – 416.
SHI Jianping, LI Peisheng, LIU Guoping, et al. Inverse kinematics solution of redundant manipulator based on hybrid learning fruit fly optimization algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021,52(9):410 – 416. (in Chinese)
- [21] AUGER A, HANSEN N. A restart CMA evolution strategy with increasing population size [J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2005, 2: 1769 – 1776.
- [22] NIKOLAUS H. The CMA evolution strategy: a tutorial[J]. CoRR, 2016.
- [23] ALRASHDI Z, SAYYAFZADEH M. Evolution strategy algorithm in well placement, trajectory, control and joint optimisation [J]. Journal of Petroleum Science and Engineering, 2019, 177: 1042 – 1058.
- [24] FABISCH A. Empirical evaluation of contextual policy search with a comparison-based surrogate model and active covariance matrix adaptation[C]//Proceedings of the 2019 Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion2019 (GECCO'19 Companion), 2019: 251 – 252.
- [25] 赵云涛,梅伟,李维刚,等. 基于改进 CMA – ES 算法的机器人轨迹规划[J]. 计算机仿真,2019,36(12):317 – 322.
ZHAO Yuntao, MEI Wei, LI Weigang, et al. Robot trajectory planning based on improved CMA – ES algorithm[J]. Computer Simulation,2019,36(12):317 – 322. (in Chinese)
- [26] 赵瑜. 基于布谷鸟算法和牛顿法组合算法的 6R 机器人运动学逆解[J]. 攀枝花学院学报,2021,38(5):69 – 75.
ZHAO Yu. Inverse kinematics algorithm for 6R Robot based on cuckoo-quasi-Newton hybrid algorithm [J]. Journal of Panzhihua University,2021,38(5):69 – 75. (in Chinese)

- [27] 陈禹含, 韩宝玲, 王善达, 等. 结合旋量理论和代数方法的六自由度机械臂逆运动学求解算法[J]. 科学技术与工程, 2021, 21(25): 10762 – 10767.
CHEN Yuhan, HAN Baoling, WANG Shanda, et al. Inverse kinematic solution algorithm of 6 – DOF robot arm with combination of screw theory and algebraic methods[J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(25): 10762 – 10767. (in Chinese)
- [28] 裴九芳, 许德章, 王海. 基于旋量理论的三指机器人灵巧手逆运动学分析[J]. 中国机械工程, 2017, 28(24): 2975 – 2980.
PEI Jiufang, XU Dezhang, WANG Hai. Inverse kinematics analysis of 3-finger robot dexterous hand based on the screw theory [J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(24): 2975 – 2980. (in Chinese)
- [29] 吉阳珍, 侯力, 罗岚, 等. 基于组合优化算法的 6R 机器人逆运动学求解[J]. 中国机械工程, 2021, 32(10): 1222 – 1232.
JI Yangzhen, HOU Li, LUO Lan, et al. Solution of 6R Robot inverse kinematics based on combinatorial optimization algorithm [J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(10): 1222 – 1232. (in Chinese)
- [30] 肖帆. 复杂多关节工业机器人逆解算法研究[D]. 株洲: 湖南工业大学, 2020.
XIAO Fan. Research on inverse kinematic algorithm of industrial robot with complex multiple joint[D]. Zhuzhou: Hunan University of Technology, 2020. (in Chinese)
- [31] 肖帆, 李光, 杨加超, 等. 改进 CMA – ES 算法及其在 7 自由度仿人臂逆运动学求解中的应用[J]. 机械科学与技术, 2020, 39(6): 844 – 851.
XIAO Fan, LI Guang, YANG Jiachao, et al. Improved CMA – ES algorithm and its application in solving inverse kinematics of 7 – DOF humanoid arm[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2020, 39(6): 844 – 851. (in Chinese)
- [32] XIAO Fan, LI Gongfa, JIANG Du, et al. An effective and unified method to derive the inverse kinematics formulas of general six – DOF manipulator with simple geometry[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 159: 104265.
- [33] 卜王辉, 刘振宇, 谭建荣. 基于切断点自由度解耦的手腕偏置型 6R 机器人位置反解[J]. 机械工程学报, 2010, 46(21): 1 – 5.
BU Wanghui, LIU Zhenyu, TAN Jianrong. Inverse displacement analysis of 6R robots with offset wrists based on decoupling degrees of freedom at the cutoff points[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(21): 1 – 5. (in Chinese)
- [34] EDWARD Y L. A journey from robot to digital human[M]. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [35] 林阳, 赵欢, 丁汉. 基于多种群遗传算法的一般机器人逆运动学求解[J]. 机械工程学报, 2017, 53(3): 1 – 8.
LIN Yang, ZHAO Huan, DING Han. Solution of inverse kinematics for general robot manipulators based on multiple population genetic algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(3): 1 – 8. (in Chinese)
- [36] 陈海兵. 基于 CMA – ES 算法的太赫兹人工电磁材料设计[D]. 南京: 东南大学, 2016.
CHEN Haibing. Design of terahertz artificial electromagnetic material based on CMA – ES algorithm[D]. Nanjing: Southeast University, 2016. (in Chinese)

(上接第 422 页)

- [27] 车林仙, 程志红, 何兵. 4 – PRUR 并联机构及其位置分析的差分进化算法[J]. 机械工程学报, 2010, 46(23): 36 – 44.
CHE Linxian, CHENG Zhihong, HE Bing. 4 – PRUR parallel mechanism and its displacement analysis based on differential evolution algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(23): 36 – 44. (in Chinese)
- [28] ASADA H. Dynamic analysis and design of robot manipulators using inertia ellipsoids [C] // Robotics and Automation. Proceedings, Atlanta, 1984: 94 – 102.
- [29] 赵一楠. 基于拓扑特征的三平移并联机构的拓扑设计、运动学与刚度分析[D]. 常州: 常州大学, 2020.
ZHAO Yinan. Topological design, kinematics and stiffness analysis of three-translational parallel mechanism based on topological characteristics[D]. Changzhou: Changzhou University, 2020. (in Chinese)
- [30] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [31] 杜力, 彭斯洋, 车林仙, 等. 工作空间最大化的 4 – RUPaR 并联机构尺度优化设计[J]. 机械科学与技术, 2018, 37(11): 51 – 58.
DU Li, PENG Siyang, CHE Linxian, et al. Optimal design of dimensions of 4 – RUPaR parallel mechanism through maximizing workspace[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2018, 37(11): 51 – 58. (in Chinese)
- [32] 秦全德. 粒子群算法研究及应用[D]. 广州: 华南理工大学, 2011.
QIN Quande. Research on particle swarm optimization algorithm and applications[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2011. (in Chinese)
- [33] 张彬彬. 一种并联机构的动力学性能评价及控制研究[D]. 成都: 电子科技大学, 2016.
ZHANG Binbin. Dynamic evaluation and control of a parallel manipulator[D]. Chengdu: Wniversity of Electronic Science and Technology of China, 2016. (in Chinese)