

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2022.07.047

主被动闭环融合调姿隔振平台动力学建模与模态分析

耿明超¹ 赵铁石² 李二伟² 陈宇航³ 马 宏¹ 王占英¹

(1. 河北建筑工程学院机械工程学院, 张家口 075000;
2. 燕山大学河北省并联机器人与机电系统实验室, 秦皇岛 066004;
3. 北华航天工业学院机电工程学院, 廊坊 065000)

摘要:以载体设备对稳定工作环境的需求为背景,提出一种多维调姿隔振平台新构型,以实现大幅度位姿扰动的补偿和中高频振动的隔离。机构由3个分支组成,每个分支包含1个由主动调姿、被动隔振单元组成的闭环子链。借助于旋量代数及影响系数理论建立机构的运动学模型,得到动平台、开链分支、电动缸分支对广义坐标的一、二阶影响系数。建立机构主被动分离形式的动力学模型,并以此为基础对其进行模态分析。通过脉冲激励对原理样机进行模态实验,实验结果表明,固有频率的实验测定值与理论计算值接近,验证了理论模型的正确性。响应特性的实验结果表明原理样机能够对低频段的位姿扰动进行补偿,结合中高频的被动隔振,原理样机具备了较宽频带的调姿隔振能力。

关键词: 并联机构; 动力学; 调姿隔振; 主被动闭环融合; 模态分析

中图分类号: TP242 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2022)07-0435-12 OSID: 

Dynamic Modeling and Modal Analysis of Orientation Adjustment and Vibration Isolation Platform with Active – Passive Closed-loop Fusion

GENG Mingchao¹ ZHAO Tieshi² LI Erwei² CHEN Yuhang³ MA Hong¹ WANG Zhanying¹

(1. School of Mechanical Engineering, Hebei University of Architecture, Zhangjiakou 075000, China
2. Hebei Provincial Key Laboratory of Parallel Robot and Mechatronic System, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China
3. School of Mechanical and Electrical Engineering, North China Institute of Aerospace Engineering, Langfang 065000, China)

Abstract: In order to realize the compensation of large-scale pose disturbance and the isolation of medium high frequency vibration, a configuration of multi-dimensional orientation adjustment and vibration isolation platform was proposed. The mechanism consisted of three branches, each of which contained a closed-loop chain composed of active orientation adjustment and passive vibration isolation unit. Referring to the screw algebra and the influence coefficient theory, the kinematics model of the mechanism was established, and the first and second order influence coefficient of the mobile platform, the open-chain branch and the electric cylinder branch on the generalized coordinates were obtained. A dynamic model of active – passive separation form of the mechanism was established. On this basis, the modal of the mechanism was analyzed. The modal experiment of the principle prototype was carried out by pulse excitation. The experimental results showed that the measured natural frequency was close to the theoretical calculation value, which verified the correctness of the theoretical model. The experimental results of response characteristics showed that the principle prototype can compensate the pose disturbance in the low frequency. Combined with the passive vibration isolation in the medium high frequency, the principle prototype had the ability to adjust the orientation and isolate the vibration in a wide frequency band.

Key words: parallel mechanism; dynamics; orientation adjustment and vibration isolation; active – passive close-loop fusion; modal analysis

收稿日期: 2022-03-16 修回日期: 2022-04-24
基金项目: 国家自然科学基金项目(51875496)、河北省自然科学基金项目(E2018404044、E2021203103)和河北省高等学校科学技术研究重点项目(ZD2019012、ZD2021315)
作者简介: 耿明超(1984—),男,副教授,博士,主要从事并联机器人技术研究,E-mail: gmingchao@163.com
通信作者: 赵铁石(1963—),男,教授,博士生导师,主要从事并联机器人和多维力传感器研究,E-mail: tszhao@ysu.edu.cn

0 引言

载体的扰动频率跨越了高、中、低多个频段,而单一类型作动器只能解决特定频段和幅值范围内的问题,即现有的机构一般只能实现单一的调姿或者隔振功能。大幅度位姿补偿一般是通过稳定平台实现。KOLECKI 等^[1]基于 Stewart 机构研制了一种轻型稳定平台用于稳定激光扫描仪,电动缸驱动。刘晓等^[2]研制了 6-PUS 的舰载稳定平台,通过伺服电机和丝杠驱动滑块运动。ZHANG 等^[3]研制了具有 3 个转动自由度的稳定平台。于荣荣等^[4]基于 3-RPS 机构,通过电机驱动液压缸伸缩实现目标调姿。稳定平台的作动器多为行程大但频率响应较低的电动缸、液压缸等。

隔振技术根据对振动的补偿原理可分为被动式、主动式和主被动混合式^[5]。于大国等^[6]将并联机构的驱动替换为弹性阻尼装置,实现了多维减振。牛军川等^[7]在选定的主动副处安装相应的弹簧阻尼装置建立了多维隔振平台。对于中高频振动而言,被动性隔振方式具有良好的隔振效果,但对于低频振动往往难以有效地控制,负刚度的引入虽然能够降低系统的固有频率,但高效紧凑的负刚度结构实现难度较大,制约了其应用^[8-10]。LIU 等^[11]以音圈电机为作动器,构建了八分支的并联机构来隔离空间站的振动。王兵^[12]通过控制音圈电机实现并联平台的调姿与隔振。李耀等^[13]搭建了基于压电陶瓷的主动隔振系统。由于作动器带宽限制,主动隔振的性能主要集中在低频,主被动隔振技术则能够充分利用两者的优点,提供较宽频带的隔振^[14-16]。LIN 等^[17]研制的隔振平台通过音圈电机来隔离低频振动,通过分支中的弹簧对中高频振动进行被动隔离。JANG 等^[18]研制了基于空气弹簧和压电堆作动器的主被动隔振平台。张洋^[19]研制了基于压电陶瓷和粘弹性材料的六自由度主被动隔振平台。LI 等^[20]构建了五自由度混联式主被动隔振平台。主动、主被动隔振平台中,其作动器响应快,但行程小,如音圈电机为毫米级输出,而压电作动器、超磁致伸缩作动器仅为微米级输出,难以对大幅度位姿扰动进行补偿。

在真实工况下,位姿扰动与中高频振动一般是同时存在的,将稳定平台与隔振平台串联构成双层结构,能够同时实现多维的调姿与隔振,但会引发体积庞大、结构复杂、动态特性差等问题。张英等^[21]构造了能够补偿大幅度位姿扰动的隔振平台,但电动缸串联弹性阻尼单元的形式增加了传动支链的长度。

针对补偿大幅度位姿扰动和隔离中高频振动一体化的需求,本文将驱动分支中的电动缸、液压缸等大行程作动器和弹性阻尼装置组成闭环子链,构成主被动闭环融合的并联调姿隔振平台。基于旋量代数建立这类包含闭环子链并联机构的运动学、动力学模型,并对其模态进行理论和实验研究。

1 调姿隔振平台构型描述

如图 1 所示,调姿隔振平台由动平台、定平台和 3 个相同的 (P_1RRP_2R) RS 分支组成,3 个分支对称分布。 R 、 P_i 、 S 分别表示转动副、移动副和球副,下角标 i 表示移动副的顺序。

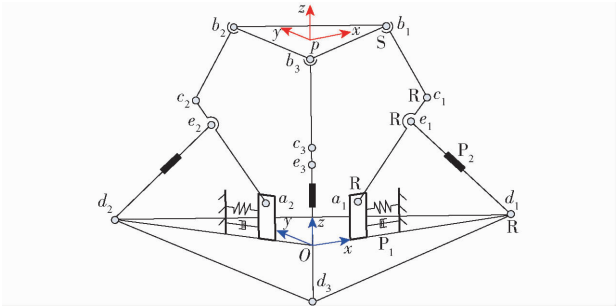


图 1 调姿隔振平台机构简图
Fig. 1 Schematic of orientation adjustment and vibration isolation platform

闭环子链 (P_1RRP_2R) 为平面五杆机构。移动副 P_1 上设置有弹簧阻尼装置,用以对外部的高频振动进行被动隔离。移动副 P_2 以电动缸的形式实现,对外部的低频位姿扰动进行补偿。主动调姿、被动隔振单元分别位于五杆机构输出杆件 a_ie_i 的两侧,以闭环子链的形式融合,能够有效减小传动支链的长度,降低机构的整体高度,改善机构动态特性。

在机构的定、动平台上各建立一个坐标系,定坐标系 $Oxyz$ 原点 O 位于定平台的中心, x 轴和 Od_1 重合, y 轴在定平台平面内与 x 轴垂直, z 轴垂直定平台向上。动坐标系 $pxyz$ 固连于动平台,其原点位于动平台的中心,在初始位置时方位与定系重合。并联调姿隔振平台的分支是以 RRS 分支为基础的,因此其自由度特性和 3-RRS 并联机构相同,具有两个转动和一个移动,但在每个自由度上有两个可动度。

2 调姿隔振平台运动学建模

2.1 分支描述

图 2 为调姿隔振平台分支的机构简图。每个分支包含两个输入副,分别为被动隔振输入副 P_1 和主动调姿输入副 P_2 。被动隔振输入副 P_1 的驱动力始终为零。令 $l_1^{(i)}$ 、 $l_2^{(i)}$ 分别为第 i 分支输入副 P_1 、 P_2 的

位移。如图 2 所示,机构的开链分支为 P_1RRS ,有 6 个运动副,但其自由度小于 6,对动平台有约束作用。为了方便采用虚设机构法求解,在铰链点 c_i 处虚设转动副,其轴线位于分支平面内且平行于移动副 P_1 ,虚设运动副运动旋量表示为 $S_3^{(i)}$ 。虚设之后,开链分支表示为 P_1RRRS ,有 7 个运动副,6 个自由度,对动平台没有约束作用。

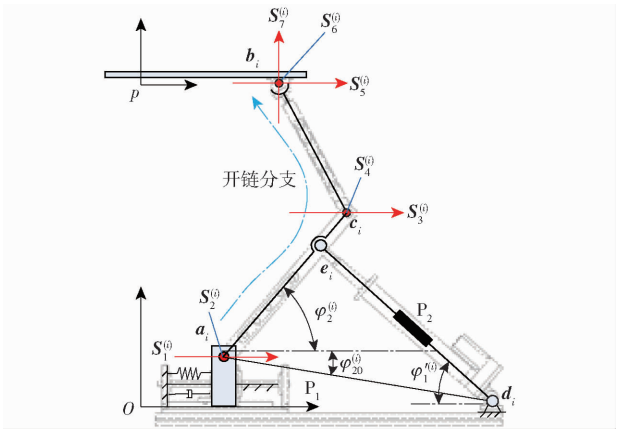


图 2 调姿隔振平台分支机构简图

Fig. 2 Schematic of limb of orientation adjustment and vibration isolation platform

令 $\varphi^{(i)}$ 、 $\dot{\varphi}^{(i)}$ 、 $\ddot{\varphi}^{(i)}$ 分别表示第 i 个开链分支 P_1RRRS 的关节位移、速度、加速度。其中, $\varphi^{(i)} = (l_1^{(i)}, \varphi_2^{(i)}, \dots, \varphi_7^{(i)})$ 。后续基于虚设机构法建立机构的运动学、动力学模型^[22]。令 q 、 $\dot{q}$ 、 $\ddot{q}$ 分别表示闭环状态下机构的广义位移、速度、加速度。其中, $q = (q_u, q_v, q_a)$, $q_u = (l_1^{(1)}, l_1^{(2)}, l_1^{(3)})$, $q_v = (\varphi_3^{(1)}, \varphi_3^{(2)}, \varphi_3^{(3)})$, $q_a = (l_2^{(1)}, l_2^{(2)}, l_2^{(3)})$ 。令 ψ 、 $\dot{\psi}$ 、 $\ddot{\psi}$ 分别表示开链状态下机构的广义位移、速度、加速度。其中, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, $\psi_1 = (q_u, q_v)$, $\psi_2 = (\varphi_2^{(1)}, \varphi_2^{(2)}, \varphi_2^{(3)})$ 。

开链分支的运动旋量在定系中表示为

$$\begin{cases} S_1^{(i)} = ((0, 0, 0), s_1^{(i)}) \\ S_2^{(i)} = (s_2^{(i)}, a_i \times s_2^{(i)}) \\ S_3^{(i)} = (s_1^{(i)}, c_i \times s_1^{(i)}) \\ S_4^{(i)} = (s_2^{(i)}, c_i \times s_2^{(i)}) \\ S_5^{(i)} = (e_1, b_i \times e_1) \\ S_6^{(i)} = (e_2, b_i \times e_2) \\ S_7^{(i)} = (e_3, b_i \times e_3) \end{cases}$$

其中 $e_1 = (1, 0, 0)$ $e_2 = (0, 1, 0)$ $e_3 = (0, 0, 1)$

$$s_1^{(i)} = (a_{ix}, a_{iy}, 0) / |(a_{ix}, a_{iy}, 0)|$$

式中 a_{ix} 、 a_{iy} ——铰链点 a_i 在定系 x 、 y 轴坐标分量

$s_2^{(i)}$ ——分支所在平面的单位法向量

2.2 闭环子链运动特性分析

根据图 2,由余弦定理可以得到 $\varphi_2^{(i)}$ 与 $l_1^{(i)}$ 、 $l_2^{(i)}$ 的关系为

$$\varphi_2^{(i)} = \arccos \frac{(l_{ad}^{(i)})^2 + (l_{ae}^{(i)})^2 - (l_2^{(i)})^2}{2l_{ad}^{(i)}l_{ae}^{(i)}} - \varphi_{20}^{(i)}$$

式中 $\varphi_2^{(i)}$ ——关节变量, $a_i e_i$ 与水平线的夹角

$\varphi_{20}^{(i)}$ —— $a_i d_i$ 与水平线的夹角

$l_{ad}^{(i)}$ ——铰链点 a_i 、 d_i 之间的距离

$l_{ae}^{(i)}$ ——铰链点 a_i 、 e_i 之间的距离

从图 2 可以看出, $l_{ad}^{(i)}$ 、 $\varphi_{20}^{(i)}$ 仅是变量 $l_1^{(i)}$ 的函数, $l_{ae}^{(i)}$ 为结构参数,是常量。根据偏微分可以得到速度、加速度的关系为

$$\dot{\varphi}_2^{(i)} = f_1^{(i)} \dot{l}_1^{(i)} + f_2^{(i)} \dot{l}_2^{(i)} \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi}_2^{(i)} = f_1^{(i)} \ddot{l}_1^{(i)} + f_2^{(i)} \ddot{l}_2^{(i)} + f_{11}^{(i)} (\dot{l}_1^{(i)})^2 + f_{12}^{(i)} \dot{l}_1^{(i)} \dot{l}_2^{(i)} + f_{21}^{(i)} \dot{l}_2^{(i)} \dot{l}_1^{(i)} + f_{22}^{(i)} (\dot{l}_2^{(i)})^2 \quad (2)$$

其中 $f_1^{(i)} = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial l_1^{(i)}} \quad f_2^{(i)} = \frac{\partial f^{(i)}}{\partial l_2^{(i)}} \quad f_{11}^{(i)} = \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial l_1^{(i)2}}$

$$f_{12}^{(i)} = \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial l_1^{(i)} \partial l_2^{(i)}} \quad f_{21}^{(i)} = \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial l_2^{(i)} \partial l_1^{(i)}} \quad f_{22}^{(i)} = \frac{\partial^2 f^{(i)}}{\partial l_2^{(i)2}}$$

则机构广义速度 $\dot{\psi}$ 与 $\dot{q}$ 的映射关系表示为

$$\dot{\psi} = g_q^\psi \dot{q} \quad (3)$$

其中

$$g_q^\psi =$$

$$\begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ \text{diag}(f_1^{(1)}, f_1^{(2)}, f_1^{(3)}) & O_{3 \times 3} & \text{diag}(f_2^{(1)}, f_2^{(2)}, f_2^{(3)}) \end{bmatrix}$$

式中 $I_{3 \times 3}$ —— 3×3 的单位矩阵

$O_{3 \times 3}$ —— 3×3 的零矩阵

对式(3)求导,可以得到广义加速度 $\ddot{\psi}$ 与 $\ddot{q}$ 的映射关系为

$$\ddot{\psi} = g_q^\psi \ddot{q} + \dot{q}^T h_q^\psi \dot{q} \quad (4)$$

其中, h_q^ψ 是一个 $9 \times 9 \times 9$ 的立方阵,其 1~6 层为零矩阵。根据式(2), h_q^ψ 矩阵第 $i+6$ 层为 $h_{q(i,i+6)}^\psi = f_{11}^{(i)}$, $h_{q(i,i+6,i+6)}^\psi = f_{12}^{(i)}$, $h_{q(i+6,i,i+6)}^\psi = f_{21}^{(i)}$, $h_{q(i+6,i+6,i+6)}^\psi = f_{22}^{(i)}$,其余元素为零, $i = 1, 2, 3$ 。

2.3 动平台一阶影响系数

动平台旋量速度可以表示为

$$V_p = G_\varphi^p \dot{\varphi}^{(i)} \quad (5)$$

其中 $G_\varphi^p = [S_1^{(i)} \quad S_2^{(i)} \quad \dots \quad S_7^{(i)}]$

式中 G_φ^p ——开链分支的一阶影响系数

矩阵 G_φ^p 是 6×7 的长方阵,不能直接求逆。此外, G_φ^p 又不具备列满秩的条件,其广义逆矩阵并不是分支运动关系的真解。对于 7 个运动副的串联分支,其运动学反解一般是多解。对于主被动闭环融合调姿隔振平台这类弹性欠驱动机构而言,给定主动输入副 P_2 的运动,被动输入副 P_1 的运动受到系统的动力学约束,解是确定的、唯一的。

假定输入副 P_2 的运动确定,即分支中的 $\varphi_2^{(i)}$ 已知。式(5)可以表示为

$$\boldsymbol{V}_p - \dot{\varphi}_2^{(i)} \boldsymbol{S}_2^{(i)} = \boldsymbol{G}_{\varphi}^p \dot{\varphi}^{(i)} \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{\varphi}^{p(i)} = [\boldsymbol{S}_1^{(i)} \quad \boldsymbol{S}_3^{(i)} \quad \boldsymbol{S}_4^{(i)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{S}_7^{(i)}]$

$$\dot{\varphi}^{(i)} = [\dot{l}_1^{(i)} \quad \dot{\varphi}_3^{(i)} \quad \dot{\varphi}_4^{(i)} \quad \cdots \quad \dot{\varphi}_7^{(i)}]$$

如果 $\boldsymbol{G}_{\varphi}^{p(i)}$ 可逆,式(6)两端乘以 $(\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)}$ 得

$$\dot{\varphi}^{(i)} = (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)} (\boldsymbol{V}_p - \dot{\varphi}_2^{(i)} \boldsymbol{S}_2^{(i)}) \tag{7}$$

应用虚设机构法,得到机构的广义速度为

$$\dot{\psi}_1 = \boldsymbol{G}_p^{\psi_1} \boldsymbol{V}_p - \boldsymbol{G}_{\psi_2}^p \dot{\psi}_2 \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{\psi_2}^p =$

$$\begin{bmatrix} (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{S}_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(2)} \boldsymbol{S}_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(3)} \boldsymbol{S}_2^{(3)} \\ (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{S}_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(2)} \boldsymbol{S}_2^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(3)} \boldsymbol{S}_2^{(3)} \end{bmatrix}$$

根据式(8)机构动平台旋量速度表示为

$$\boldsymbol{V}_p = (\boldsymbol{G}_p^{\psi_1})^{-1} \dot{\psi}_1 + (\boldsymbol{G}_p^{\psi_1})^{-1} \boldsymbol{G}_{\psi_2}^p \dot{\psi}_2 \tag{9}$$

式(9)可以进一步整理为

$$\boldsymbol{V}_p = \boldsymbol{G}_{\psi}^p \dot{\psi} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{G}_{\psi}^p = [\boldsymbol{G}_{\psi_1}^p \quad \boldsymbol{G}_{\psi_1}^p \boldsymbol{G}_{\psi_2}^p]$ $\boldsymbol{G}_{\psi_1}^p = (\boldsymbol{G}_p^{\psi_1})^{-1}$

式中 $\boldsymbol{G}_{\psi}^p$ ——动平台对广义坐标 ψ 的一阶影响系数

将式(3)代入式(10)中可得

$$\boldsymbol{V}_p = \boldsymbol{G}_q^p \dot{\boldsymbol{q}} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{G}_q^p = \boldsymbol{G}_{\psi}^p \boldsymbol{g}_q^{\psi}$

式中 $\boldsymbol{G}_q^p$ ——动平台对广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 一阶影响系数

将式(10)代入式(7)可得到第 i 个开链分支的关节速度为

$$\dot{\varphi}^{(i)} = (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)} \boldsymbol{G}_{\psi}^p \dot{\psi} - (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)} \boldsymbol{S}_2^{(i)} \dot{\varphi}_2^{(i)} \tag{12}$$

式(12)右边第2项是 6×1 的列向量,可将其表示为 6×9 的矩阵形式。对第1开链分支而言,式(12)可以表示为

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \boldsymbol{g}_{\varphi}^{\varphi(1)} \dot{\psi} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{g}_{\varphi}^{\varphi(1)} =$

$$(\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{G}_{\psi}^p - [\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O} \quad (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{S}_2^{(1)} \quad \boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{O}]$$

式中 $\boldsymbol{O}$ —— 6×1 的零向量

由于 $\dot{\varphi}^{(i)} = [\dot{l}_1^{(i)} \quad \dot{\varphi}_3^{(i)} \quad \dot{\varphi}_4^{(i)} \quad \cdots \quad \dot{\varphi}_7^{(i)}]$ 不包含 $\dot{\varphi}_2^{(i)}$,因此在 $\boldsymbol{g}_{\varphi}^{\varphi(i)}$ 中需要增加一个行向量反映 $\dot{\varphi}_2^{(i)}$ 的映射关系。将 $\boldsymbol{g}_{\varphi}^{\varphi(i)}$ 扩展为 7×9 的矩阵,并用 $\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(i)}$ 表示。对第1分支而言, $\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(i)}$ 的形式为

$$\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(1)} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{g}_{\varphi}^{\varphi})_{1;}^{(1)} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ (\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi})_{2;}^{(1)} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi})_{6;}^{(1)} \end{bmatrix}$$

因此,第1开链分支关节速度可以表示为

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(1)} \dot{\psi} \tag{14}$$

将式(3)代入式(14)可得

$$\dot{\varphi}^{(1)} = \boldsymbol{g}_q^{\varphi(1)} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{15}$$

其中, $\boldsymbol{g}_q^{\varphi(1)} = \boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(1)} \boldsymbol{g}_q^{\psi}$ 。同理,可得到机构第2、3个开链分支的关节速度映射关系。对第2、3分支而言,在 $\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(2)}$ 、 $\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(3)}$ 的构造过程中, $(\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)} \boldsymbol{S}_2^{(i)}$ 及单位1,分别位于第8、9列。

2.4 动平台二阶影响系数

对式(5)求导可以得到动平台旋量加速度与分支关节速度、加速度之间的关系

$$\boldsymbol{A}_p - \ddot{\varphi}_2^{(i)} \boldsymbol{S}_2^{(i)} = \boldsymbol{G}_{\varphi}^p \ddot{\varphi}^{(i)} + \dot{\varphi}^T \boldsymbol{H}_{\varphi}^{p(i)} \dot{\varphi} \tag{16}$$

式(16)可进一步表示为

$$\ddot{\varphi}^{(i)} = (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)} (\boldsymbol{A}_p - \ddot{\varphi}_2^{(i)} \boldsymbol{S}_2^{(i)} - \dot{\varphi}^T \boldsymbol{H}_{\varphi}^{p(i)} \dot{\varphi}) \tag{17}$$

这里 $(\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)}$ 为非奇异矩阵,分支驱动副的加速度可以表示为

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1^{(1)} = (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{A}_p - (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{S}_2^{(1)} \ddot{\varphi}_2^{(1)} - (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \dot{\varphi}^T \boldsymbol{H}_{\varphi}^{p(1)} \dot{\varphi} \\ \vdots \\ \ddot{\varphi}_3^{(1)} = (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{A}_p - (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \boldsymbol{S}_2^{(1)} \ddot{\varphi}_2^{(1)} - (\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(1)} \dot{\varphi}^T \boldsymbol{H}_{\varphi}^{p(1)} \dot{\varphi} \\ \vdots \end{cases} \tag{18}$$

根据式(18),由虚设机构法构造广义加速度

$$\ddot{\psi}_1 = \boldsymbol{G}_p^{\psi_1} \boldsymbol{A}_p - \boldsymbol{G}_{\psi_2}^p \ddot{\psi}_2 - \begin{bmatrix} \dot{\psi}^T \boldsymbol{L}_r^{(1)} \dot{\psi} \\ \dot{\psi}^T \boldsymbol{L}_r^{(2)} \dot{\psi} \\ \vdots \\ \dot{\psi}^T \boldsymbol{L}_r^{(6)} \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{19}$$

其中 $\boldsymbol{L}_r^{(i)} = (\boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(i)})^T [(\boldsymbol{G}_{\varphi}^p)^{-1(i)} * \boldsymbol{H}_{\varphi}^{p(i)}] \boldsymbol{g}_{\psi}^{\varphi(i)}$ “*”表示矩阵的广义标量积。式(19)可以进一步整理为

$$\ddot{\psi}_1 = \boldsymbol{G}_p^{\psi_1} \boldsymbol{A}_p - \boldsymbol{G}_{\psi_2}^p \ddot{\psi}_2 - \dot{\psi}^T \boldsymbol{H}_{\psi}^p \dot{\psi} \tag{20}$$

其中, $\boldsymbol{H}_{\psi}^p$ 是一个 9×9 的立方阵,每一个元素为分支中对应矩阵 $\boldsymbol{L}_r^{(i)}$ 的相应元素组合, $\boldsymbol{H}_{\psi_2(i,j)}^p = [\boldsymbol{L}_{r(i,j)}^{(1)} \quad \boldsymbol{L}_{r(i,j)}^{(2)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{L}_{r(i,j)}^{(6)}]$ 。

动平台旋量加速度可表示为

$$\boldsymbol{A}_p = \boldsymbol{G}_{\psi_1}^p (\ddot{\psi}_1 + \boldsymbol{G}_{\psi_2}^p \ddot{\psi}_2 + \dot{\psi}^T \boldsymbol{H}_{\psi_2}^p \dot{\psi}) = \boldsymbol{G}_{\psi}^p \ddot{\psi} + \dot{\psi}^T \boldsymbol{H}_{\psi}^p \dot{\psi} \tag{21}$$

其中

$$\mathbf{H}_{\psi}^p = \mathbf{G}_{\psi_1}^p * \mathbf{H}_{\psi_2}^p$$

将式(3)、(4)代入式(21)可得

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{G}_q^p \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_q^p \dot{\mathbf{q}} \quad (22)$$

其中

$$\mathbf{H}_q^p = \mathbf{G}_{\psi}^p * \mathbf{h}_q^{\psi} + \mathbf{g}_q^{\psi T} \mathbf{H}_{\psi}^p \mathbf{g}_q^{\psi}$$

式中 $\mathbf{H}_q^p$ ——动平台对广义坐标 q 二阶影响系数

2.5 开链分支 $\mathbf{P}_1\mathbf{RRRS}$ 的一、二阶影响系数

将式(21)代入式(17)可得开链分支的关节加速度为

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{\varphi}}^{(i)} &= (\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p)^{-1(i)} \mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p \ddot{\psi} - (\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p)^{-1(i)} \ddot{\varphi}_2^{(i)} \mathbf{S}_2^{(i)} + \\ &(\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p)^{-1(i)} \dot{\psi}^T \mathbf{H}_{\bar{\varphi}}^p \dot{\psi} - (\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p)^{-1(i)} \dot{\varphi}^T \mathbf{H}_{\varphi}^{p(i)} \dot{\varphi} = \\ &\mathbf{g}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)} \ddot{\psi} + \dot{\psi}^T \mathbf{h}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)} \dot{\psi} \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $\mathbf{h}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)} = (\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p)^{-1(i)} * \mathbf{H}_{\bar{\varphi}}^p - (\mathbf{g}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)})^T [(\mathbf{G}_{\bar{\varphi}}^p)^{-1(i)} * \mathbf{H}_{\varphi}^{p(i)}] \mathbf{g}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)}$, 是一个 $9 \times 9 \times 6$ 的立方阵。同理, 由于式(23)的左侧 $\ddot{\bar{\varphi}}^{(i)}$ 没有包含 $\ddot{\varphi}_2^{(i)}$, 需要将映射矩阵 $\mathbf{h}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)}$ 扩维。由于 $\mathbf{g}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)}$ 中增加一个行向量已经能够反映 $\ddot{\varphi}_2^{(i)}$ 的映射关系, 因此只需要在 $\mathbf{h}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)}$ 的第 2 层矩阵增加一个 9×9 的零矩阵, 将 $\mathbf{h}_{\bar{\varphi}}^{\bar{\varphi}(i)}$ 扩展为 $9 \times 9 \times 7$ 的矩阵, 并用 $\mathbf{h}_{\psi}^{\varphi(i)}$ 表示。式(23)进一步表示为

$$\ddot{\bar{\varphi}}^{(i)} = \mathbf{g}_{\psi}^{\varphi(i)} \ddot{\psi} + \dot{\psi}^T \mathbf{h}_{\psi}^{\varphi(i)} \dot{\psi} \quad (24)$$

将式(3)、(4)代入式(24)可得

$$\ddot{\bar{\varphi}}^{(i)} = \mathbf{g}_q^{\varphi(i)} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h}_q^{\varphi(i)} \dot{\mathbf{q}} \quad (25)$$

其中

$$\mathbf{h}_q^{\varphi(i)} = \mathbf{g}_{\psi}^{\varphi(i)} * \mathbf{h}_{\psi}^{\psi} + \mathbf{g}_q^{\psi T} \mathbf{h}_{\psi}^{\varphi(i)} \mathbf{g}_q^{\psi}$$

则第 i 个开链分支第 k 个杆件的旋量速度、加速度可以表示为^[23]

$$\begin{cases} \mathbf{V}_k^{(i)} = \mathbf{G}_q^{k(i)} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}_k^{(i)} = \mathbf{G}_q^{k(i)} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_q^{k(i)} \dot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (26)$$

式中 $\mathbf{G}_q^{k(i)}$ 、 $\mathbf{H}_q^{k(i)}$ ——第 i 个开链分支第 k 个杆件的一、二阶影响系数

2.6 电动缸分支的一、二阶影响系数

在整个机构中, 由于电动缸的质量及惯量较大, 在机构的动力学建模及固有频率分析中不能忽略。如图 2 所示, 用 $\varphi_1^{(i)}$ 表示电动缸与水平面的夹角。电动缸分支的关节变量表示为 $\varphi_1^{(i)} = (\varphi_1^{(i)}, l_2^{(i)})$, $\varphi_1^{(i)}$ 是 $l_1^{(i)}$ 、 $l_2^{(i)}$ 的函数, 表示为 $\varphi_1^{(i)} = f^{(i)}(l_1^{(i)}, l_2^{(i)})$ 。根据偏微分可得速度、加速度的关系为

$$\dot{\varphi}_1^{(i)} = f_1^{(i)} \dot{l}_1^{(i)} + f_2^{(i)} \dot{l}_2^{(i)} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1^{(i)} &= f_1^{(i)} \ddot{l}_1^{(i)} + f_2^{(i)} \ddot{l}_2^{(i)} + f_{11}^{(i)} (\dot{l}_1^{(i)})^2 + \\ &f_{12}^{(i)} \dot{l}_1^{(i)} \dot{l}_2^{(i)} + f_{21}^{(i)} \dot{l}_2^{(i)} \dot{l}_1^{(i)} + f_{22}^{(i)} (\dot{l}_2^{(i)})^2 \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $f_1^{(i)}$ 、 $f_2^{(i)}$ 、 $f_{11}^{(i)}$ 、 $f_{12}^{(i)}$ 、 $f_{21}^{(i)}$ 、 $f_{22}^{(i)}$ 为函数 $f^{(i)}$ 对两个变量的一阶、二阶偏微分, 和式(1)、(2)中的符号物理意义一致。

电动缸分支关节速度与广义速度的映射可以表

示为

$$\dot{\varphi}^{\prime(i)} = \mathbf{g}_q^{\varphi'(i)} \dot{\mathbf{q}} \quad (29)$$

其中, $\mathbf{g}_q^{\varphi'(i)}$ 是 2×9 的矩阵, $(\mathbf{g}_q^{\varphi'})_{(1,i)}^{(i)} = f_1^{(i)}$, $(\mathbf{g}_q^{\varphi'})_{(1,i+6)}^{(i)} = f_2^{(i)}$, $(\mathbf{g}_q^{\varphi'})_{(2,i+6)}^{(i)} = 1$, 其余元素为零, $i = 1, 2, 3$ 。

对式(29)求导可得

$$\ddot{\varphi}^{\prime(i)} = \mathbf{g}_q^{\varphi'(i)} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{h}_q^{\varphi'} \dot{\mathbf{q}} \quad (30)$$

其中, $\mathbf{h}_q^{\varphi'(i)}$ 是一个 $9 \times 9 \times 2$ 的立方阵, 矩阵的第一层元素 $(\mathbf{h}_q^{\varphi'})_{(i,i,1)}^{(i)} = f_{11}^{(i)}$, $(\mathbf{h}_q^{\varphi'})_{(i,i+6,1)}^{(i)} = f_{12}^{(i)}$, $(\mathbf{h}_q^{\varphi'})_{(i+6,i,1)}^{(i)} = f_{21}^{(i)}$, $(\mathbf{h}_q^{\varphi'})_{(i+6,i+6,1)}^{(i)} = f_{22}^{(i)}$, 其余元素为零, $i = 1, 2, 3$ 。 $\mathbf{h}_q^{\varphi'(i)}$ 矩阵的第 2 层为 9×9 的零矩阵。

则电动缸分支第 k 个杆件的旋量速度、加速度表示为^[23]

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{gk}^{(i)} = \mathbf{G}_q^{gk(i)} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{A}_{gk}^{(i)} = \mathbf{G}_q^{gk(i)} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_q^{gk(i)} \dot{\mathbf{q}} \end{cases} \quad (31)$$

式中 $\mathbf{G}_q^{gk(i)}$ 、 $\mathbf{H}_q^{gk(i)}$ ——第 i 个电动缸分支第 k 个杆件的一、二阶影响系数

3 调姿隔振平台动力学建模

3.1 惯性力映射

并联机构动平台惯性力引起的关节驱动力 τ_p^I 可表示为

$$\tau_p^I = (\mathbf{G}_p^p)^T \mathbf{W}_p^I \quad (32)$$

式中 $\mathbf{W}_p^I$ ——动平台的惯性力旋量

结合刚体旋量形式的牛顿-欧拉公式^[23], 式(32)可表示为

$$\tau_p^I = -(\mathbf{G}_q^p)^T (\mathbf{N}_p \mathbf{A}_p - \widehat{\mathbf{V}}_p^T \mathbf{N}_p \mathbf{V}_p) \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_o & m_p \hat{\mathbf{p}}_{op} \\ m_p \hat{\mathbf{p}}_{op}^T & m_p \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_o = \mathbf{R}_{op} \mathbf{I}_p \mathbf{R}_{op}^T - m_p \hat{\mathbf{p}}_{op}^2$$

式中 $\mathbf{N}_p$ ——动平台的六维惯性矩阵

$\mathbf{I}_o$ ——动平台 3×3 的转动惯量在定系 O 中的表示

$\mathbf{I}_p$ ——动平台转动惯量在质心坐标系的表示

$\mathbf{p}_{op}$ ——动系 p 相对定系 O 的位置矢量

m_p ——动平台质量

$\widehat{\mathbf{V}}_p$ ——动平台旋量速度的伴随矩阵

由文献[23]可知, 式(33)可以表示为

$$\tau_p^I = -\mathbf{M}_p^T \ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H}_p^T \dot{\mathbf{q}} \quad (34)$$

其中

$$\mathbf{M}_p^T = (\mathbf{G}_q^p)^T \mathbf{N}_p \mathbf{G}_q^p$$

$$\mathbf{H}_p^T = ((\mathbf{G}_q^p)^T \mathbf{N}_p) * \mathbf{H}_q^p + \mathbf{H}_{Rp}$$

式中 $\mathbf{H}_{Rp}$ —— $9 \times 9 \times 9$ 的立方阵

立方阵 $\mathbf{H}_{Rp}$ 的第 j 层元素可以表示为

$$\boldsymbol{H}_{\text{Rp}(:, :, j)} = (\boldsymbol{G}_q^p)^T \boldsymbol{N}_p ([\boldsymbol{G}_{q(:, j)}^p, \boldsymbol{G}_{q(:, 1)}^p], \cdots, [\boldsymbol{G}_{q(:, j)}^p, \boldsymbol{G}_{q(:, 9)}^p])$$

同理,机构中第*i*个分支,第*k*个杆件的惯性力产生的主动关节驱动力为

$$\boldsymbol{\tau}_k^{l(i)} = (\boldsymbol{G}_q^{k(i)})^T \boldsymbol{W}_k^{l(i)} = -\boldsymbol{M}_k^{\tau(i)} \ddot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_k^{\tau(i)} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{35}$$

因此,并联机构动平台和所有分支杆件惯性力产生的主动关节驱动力为

$$\boldsymbol{\tau}_l = -\boldsymbol{M}_q^{\tau} \ddot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_q^{\tau} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{36}$$

其中 $\boldsymbol{M}_q^{\tau} = \boldsymbol{M}_p^{\tau} + \sum \boldsymbol{M}_k^{\tau(i)} \quad \boldsymbol{H}_q^{\tau} = \boldsymbol{H}_p^{\tau} + \sum \boldsymbol{H}_k^{\tau(i)}$

3.2 动力学模型

忽略摩擦,根据虚功原理,机构所有的外力处于平衡状态,则并联机构的动力学平衡方程为

$$\boldsymbol{\tau}_l + \boldsymbol{\tau}_G + \boldsymbol{\tau}_E + \boldsymbol{\tau}_F + \boldsymbol{\tau}_A = \boldsymbol{O} \tag{37}$$

- 式中 $\boldsymbol{\tau}_G$ ——机构的重力产生的广义驱动力
 $\boldsymbol{\tau}_E$ ——作用在移动副 P₁上的弹性力
 $\boldsymbol{\tau}_F$ ——作用在动平台外力产生的广义驱动力
 $\boldsymbol{\tau}_A$ ——机构的广义驱动力

并联机构动平台及所有杆件的重力产生的广义驱动力为

$$\boldsymbol{\tau}_G = (\boldsymbol{G}_q^p)^T \boldsymbol{W}_p^G + \sum (\boldsymbol{G}_q^{k(i)})^T \boldsymbol{W}_k^{G(i)} \tag{38}$$

作用在移动副 P₁上的弹性力为

$$\boldsymbol{\tau}_E = (\boldsymbol{\tau}_e, \boldsymbol{O}_{6 \times 1}) \tag{39}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_e = (F_1 - k_1 l_1^{(i)}, F_2 - k_2 l_1^{(2)}, F_3 - k_3 l_1^{(3)})$

式中 k_i ——第*i*个分支中弹簧刚度

F_i ——第*i*个分支中弹簧预紧力

并联机构动平台所受外力产生的广义驱动力可表示为

$$\boldsymbol{\tau}_F = (\boldsymbol{G}_q^p)^T \boldsymbol{W}_p^F \tag{40}$$

将式(36)、(38)~(40)代入式(37)可得机构在关节空间表示中的动力学模型为

$$\boldsymbol{\tau}_A = \boldsymbol{M}_q^{\tau} \ddot{\boldsymbol{q}} + \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_q^{\tau} \dot{\boldsymbol{q}} - (\boldsymbol{G}_q^p)^T (\boldsymbol{W}_p^G + \boldsymbol{W}_p^F) - \sum (\boldsymbol{G}_q^{k(i)})^T \boldsymbol{W}_k^{G(i)} - \boldsymbol{\tau}_E \tag{41}$$

关节变量 *q* 前 3 个元素表示被动隔振输入副 P₁,中间 3 个元素表示虚设运动副,后 3 个元素表示主动输入副 P₂,式(41)按照主、被动关节分解为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_u \\ \boldsymbol{\tau}_v \\ \boldsymbol{\tau}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{uu} & \boldsymbol{M}_{uv} & \boldsymbol{M}_{ua} \\ \boldsymbol{M}_{vu} & \boldsymbol{M}_{vv} & \boldsymbol{M}_{va} \\ \boldsymbol{M}_{au} & \boldsymbol{M}_{av} & \boldsymbol{M}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}}_u \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_v \\ \ddot{\boldsymbol{q}}_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_u \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_v \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_a \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_u^F \\ \boldsymbol{W}_v^F \\ \boldsymbol{W}_a^F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_u^G \\ \boldsymbol{W}_v^G \\ \boldsymbol{W}_a^G \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_e \\ \boldsymbol{O}_{3 \times 1} \\ \boldsymbol{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}_u$ ——被动隔振输入副 P₁的驱动力

$\boldsymbol{\tau}_v$ ——虚设运动副受到的力矩

$\boldsymbol{\tau}_a$ ——输入副 P₂的驱动力

由于是被动隔振,驱动力 $\boldsymbol{\tau}_u$ 始终为零。虚设运动副受到的力矩 $\boldsymbol{\tau}_v$ 由结构承担。驱动力 $\boldsymbol{\tau}_a$ 为电动缸的主动输入。

由于虚设运动副的位移、速度、加速度始终为零,式(42)的第 1 行可表示为

$$\boldsymbol{M}_{uu} \ddot{\boldsymbol{q}}_u + \boldsymbol{M}_{ua} \ddot{\boldsymbol{q}}_a + \dot{\boldsymbol{q}}^T \boldsymbol{H}_u \dot{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{W}_u^F - \boldsymbol{W}_u^G - \boldsymbol{\tau}_e = \boldsymbol{O} \tag{43}$$

式(43)为机构的动力学约束方程。当给定主动输入副 P₂的运动后,可以通过动力学约束方程求解得到被动副 P₁的加速度,一次积分得到速度,再次积分得到其位移。

3.3 动力学数值算例

为了验证上述运动学及动力学建模的正确性,对调姿隔振平台进行数值算例验证。调姿隔振平台的运动学、动力学参数如表 1、2 所示。

表 1 运动学相关结构参数

Tab.1 Structural parameters related to kinematics		m
参数	数值	
初始位置铰链点 <i>a_i</i> 外接圆直径	0.24	
铰链点 <i>b_i</i> 外接圆直径	0.43	
铰链点 <i>d_i</i> 外接圆直径	1.09	
上连杆长度 <i>l_{bc}</i>	0.44	
下连杆长度 <i>l_{ac}</i>	0.60	
机构初始工作高度 <i>h₀</i>	1.02	

表 2 动力学相关结构参数

Tab.2 Structural parameters related to dynamics		
部件	参数	数值
动平台	质量/kg	16.07
	主轴惯量/(kg·m ²)	diag(0.93, 0.93, 1.76)
上连杆	质量/kg	0.77
	主轴惯量/(kg·m ²)	diag(0.02, 0.02, 0)
	质心到 <i>c_i</i> 距离/m	0.19
下连杆	质量/kg	2.63
	主轴惯量/(kg·m ²)	diag(0.09, 0.09, 0)
	质心到 <i>a_i</i> 距离/m	0.28
电动缸摇摆杆	质量/kg	17.00
	主轴惯量/(kg·m ²)	diag(0.39, 0.39, 0.02)
	质心到 <i>d_i</i> 距离/m	0.23
电动缸伸缩杆	质量/kg	2.81
	主轴惯量/(kg·m ²)	diag(0.04, 0.04, 0)
	质心到 <i>e_i</i> 距离/m	0.21
滑块	质量/kg	3.60

调姿隔振平台动力学求解 Simulink 模型如图 3 所示。当两次积分得到的被动副位移 *q_u* 和主动输入位移 *q_a* 进入程序后,采用拟牛顿法求解机构的正解模型,具体过程参照文献[24]。动力学约束方程为式(43)。给定 3 个主动输入副 P₂的运动规律分

别为 $l_2^{(1)} = 0.05\sin t$, $l_2^{(2)} = 0.02\sin t$, $l_2^{(3)} = -0.04\sin t$, 单位为 m。

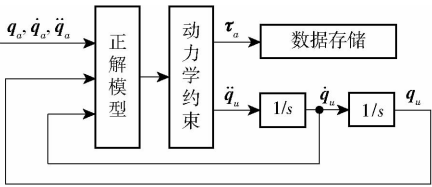


图 3 动力学求解的 Simulink 模型

Fig. 3 Simulink model for solving dynamics

通过 Simulink 模型求解得到的关节驱动力曲线如图 4 所示。图 5 为 ADAMS 软件的仿真结果。图 6 为理论计算值和软件仿真值的偏差曲线, e_r 表示关节驱动力 τ_a 理论计算值和软件仿真值的偏差。图 5 中软件仿真曲线在初始阶段存在一个微小波动, 这是由于弹簧的预紧力不能和机构重力完全抵消造成的, 但曲线整体趋势和图 4 的理论计算曲线一致。从图 6 可以看出, 当系统稳定后, 偏差范围在 10^{-2} 量级, 说明了上述运动学、动力学模型的正确性, 也为后续的模式分析提供了理论基础。

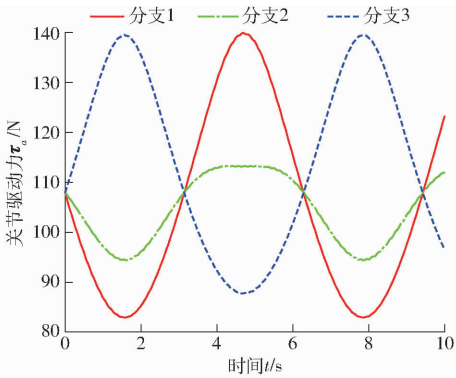


图 4 关节驱动力理论计算值

Fig. 4 Theoretical calculation value of joint driving force

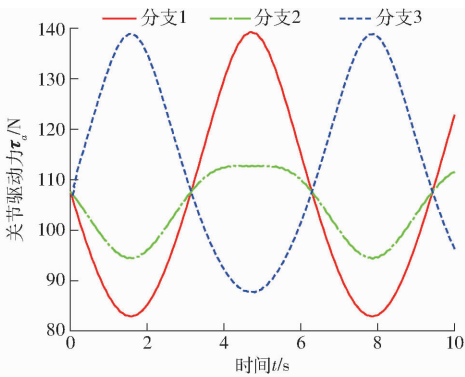


图 5 关节驱动力软件仿真值

Fig. 5 Software simulation value of joint driving force

4 调姿隔振平台模态分析

4.1 固有频率和振型

调姿隔振平台的动力学方程是一个强耦合的非线性微分方程, 其求解十分困难, 因此在进行模态分

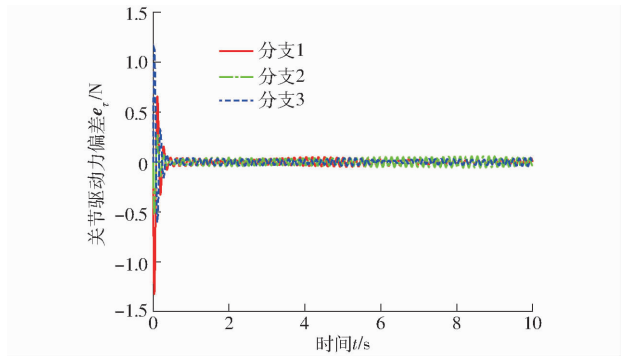


图 6 关节驱动力偏差曲线

Fig. 6 Deviation curves of joint driving force

析时, 通常需要对其进行简化处理。方程中的重力项及弹簧预紧力是常数项, 对系统的固有频率没有影响, 可以忽略。同时, 动力学模型中的科氏力项对固有频率的影响较小, 计算时同样可以忽略^[25]。上、下连杆的弹性刚度、电动缸的伺服刚度都远远大于弹簧刚度, 可以视为无穷大。

被动隔振时, 可以假定主动调姿运动瞬时锁死, 即 $q_a = \dot{q}_a = \ddot{q}_a = 0$ 。由于是自由模态分析, 因此认为没有外力作用在动平台上。结合式 (39), 动力学模型 (43) 可以简化为

$$M_{uu} \ddot{q}_u + K_u q_u = 0 \quad (44)$$

其中 $K_u = \text{diag}(k_1, k_2, k_3)$

式中 K_u ——刚度矩阵

无阻尼系统振动固有频率与刚度矩阵和质量矩阵存在关系^[26]

$$|K_u - \lambda M_{uu}| = 0 \quad (45)$$

其中 $\lambda = \omega_n^2$

式中 λ ——特征值

ω_n ——系统固有圆频率

求解特征方程 (45) 可以得到系统的特征值 λ_i 和固有圆频率 $\omega_{ni} (i = 1, 2, 3)$, 进而可求得各特征值对应的主振型 $u^{(i)}$ 。

系统的主振型关于质量矩阵和刚度矩阵都是正交的。正则主振型 $u_N^{(i)}$ 存在关系

$$\begin{cases} u_N^{(i)T} M_{uu} u_N^{(i)} = 1 \\ u_N^{(i)T} K_u u_N^{(i)} = \omega_{ni}^2 \end{cases} \quad (46)$$

根据式 (46), 正则主振型可以表示为

$$u_N^{(i)} = \frac{u^{(i)}}{u^{(i)T} M_{uu} u^{(i)}}$$

进一步, 可得到正则振型矩阵为

$$U_N = [u_N^{(1)} \quad u_N^{(2)} \quad u_N^{(3)}]$$

通过正则化的处理, 可以将振动微分方程由物理坐标转换到模态坐标下, 从而使方程解耦, 方便求解。值得注意的是, 此时计算得到的振型 $u_N^{(i)}$ 是关节空间的振型向量, 为了便于分析, 需要将其映射到

操作空间。一般振动幅值较小,关节空间正则振型 $\boldsymbol{u}_N^{(i)}$ 到操作空间正则振型 $\boldsymbol{u}_{N_p}^{(i)}$ 的映射关系可近似表示为

$$\boldsymbol{u}_{N_p}^{(i)} = \boldsymbol{G}_q^p(\boldsymbol{u}_N^{(i)}, \boldsymbol{O}_{6 \times 1}) \tag{47}$$

给定弹簧刚度 $k_1 = k_2 = k_3 = 14.00 \text{ N/mm}$, 得到机构在初始位姿下的固有频率和正则振型如表 3 所示。操作空间的正则振型为 6×1 的列向量, 前 3 个量表示转动, 后 3 个量表示移动。从表 3 可以看出, 一阶振型中前 5 个元素为零, 表示机构只有沿 z 轴移动的自由度。从二阶振型可以看出, 机构只具有绕水平面上某一轴线转动的自由度, 其 x 、 y 轴的移动分量是转动耦合产生的。机构的二、三阶固有频率相同, 但其对应的正则振型并不相同。从表 3 中可以看出, 二、三阶振型是正交的, 其转动轴线在水平面上相互垂直, 轴线分布如图 7 所示。

表 3 机构初始位姿固有频率及正则振型

Tab.3 Natural frequency and normal modes at initial pose of mechanism

模态	固有频率/Hz	关节空间正则振型	操作空间正则振型
1	6.48	$(-0.07, -0.07, -0.07)$	$(0, 0, 0, 0, 0, -0.03)$
2	6.68	$(0.10, -0.03, -0.07)$	$(0.03, -0.12, 0, 0.12, 0.03, 0)$
3	6.68	$(-0.03, 0.10, -0.07)$	$(0.12, 0.03, 0, -0.03, 0.12, 0)$

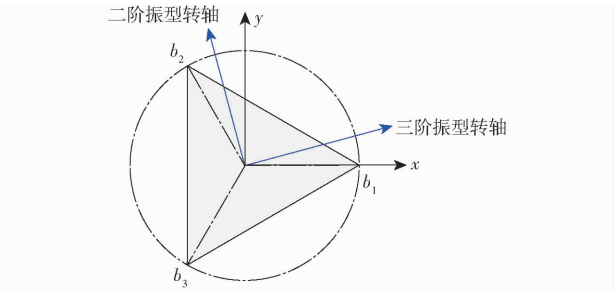


图 7 二、三阶振型轴线分布

Fig.7 Distribution of axis of the second-order and third-order vibration modes

使用 ADAMS Vibration 的自由振动分析计算系统固有频率。模型中所有零部件均为刚体, 振动为无阻尼振动。分析得到的各阶模态对应的无阻尼固有频率结果见表 4。由表 4 可知, 当动力学模型忽略滑块质量时, 机构固有频率理论计算值与软件仿真值的误差超过 30%。当动力学模型包含滑块、上下连杆及电动缸时, 机构固有频率理论计算值和软件仿真值的误差在 1% 以内, 说明所建立的完整动力学模型足够精确, 可以作为进一步计算的理论依据。

表 4 机构固有频率对比

Tab.4 Comparison of natural frequency Hz

模态	理论计算值 (忽略滑块)	理论计算值 (包含滑块)	软件仿真值
1	8.48	6.48	6.45
2	8.95	6.68	6.65
3	8.95	6.68	6.65

4.2 固有频率影响因素分析

为了保证调姿隔振平台的对称性, 3 个弹簧刚度始终取相同的刚度。图 8 为系统一阶固有频率与弹簧刚度、动平台质量的关系曲面。从图中可以看出, 随着弹簧刚度变大, 系统固有频率相应变大, 且变化幅度较大, 说明了弹簧刚度是系统固有频率的关键影响因素。假定弹簧刚度不变, 系统一阶固有频率随着动平台质量的增加而逐渐减小, 但变化的幅度较小。二、三阶固有频率的变化规律类似, 只是转动振型主要受到转动惯量的影响, 而不是质量。

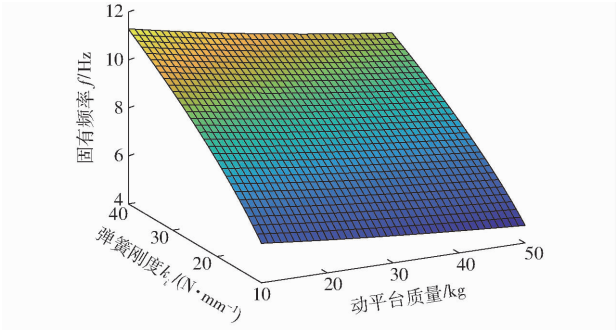


图 8 一阶固有频率与弹簧刚度、动平台质量关系曲面

Fig.8 Relationship among the first-order natural frequency, spring stiffness and mass of mobile platform

给定弹簧刚度 $k_1 = k_2 = k_3 = 14.00 \text{ N/mm}$, 机构各阶固有频率与机构位姿的关系如图 9 所示, 每个图中 3 个曲面分别对应机构工作高度为 $h_0 - 0.08 \text{ m}$ 、 h 、 $h_0 + 0.08 \text{ m}$ 。

从图 9 可以看出, 随着机构工作高度的增加, 机构各阶固有频率均相应增加。以一阶固有频率为例, 工作高度为 $h_0 - 0.08 \text{ m}$ 、 h 、 $h_0 + 0.08 \text{ m}$ 时, 对应的最大固有频率分别为 6.19、6.48、6.85 Hz, 变化幅度较小。结合转动自由度, 从图 9 中可以看出, 在机构的各个极限位姿, 固有频率的变化最大不超过 2 Hz, 对被动隔振的频率范围影响很小。

5 实验

5.1 实验系统

调姿隔振平台实验系统如图 10 所示, 主要包括计算机、控制柜、调姿隔振平台原理样机、航姿传感器、振动传感器、振动信号采集器等。原理样机主要包括动平台、定平台、上连杆、下连杆、电动缸、被动

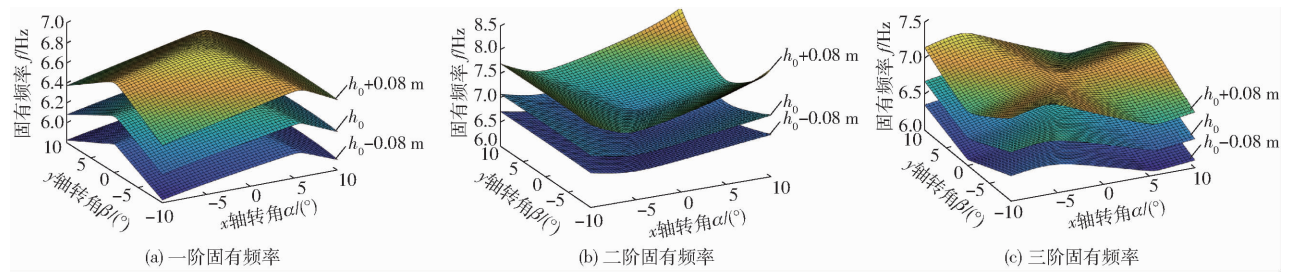


图 9 固有频率与机构位姿的关系曲面

Fig. 9 Relationship between natural frequency and pose of mechanism

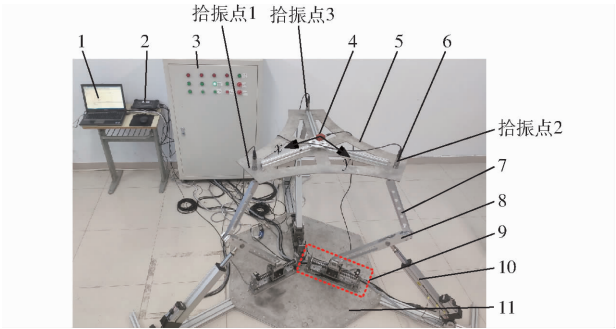


图 10 调姿隔振平台实验系统

Fig. 10 Experimental system of orientation adjustment and vibration isolation platform

1. 计算机 2. 振动信号采集器 3. 控制柜 4. 航姿传感器
5. 动平台 6. 振动传感器 7. 上连杆 8. 下连杆 9. 被动隔振单元 10. 电动缸 11. 定平台
隔振单元等。

被动隔振单元结构如图 11 所示。下连杆通过支座连接在直线导轨的滑块上。直线导轨夹具通过螺栓固定在转接板上,可以将直线导轨滑块固定在任意位置,方便后续工作模式的切换。弹簧导向轴通过自润滑轴承与支座连接,形成移动副,增加直线轨道的抗倾覆约束力。立板上均布有 3 个螺纹孔,通过螺栓的松紧来调整垫片与立板之间的距离,进而调整弹簧预紧力及滑块初始位置。拉线编码器实时测量滑块位移。

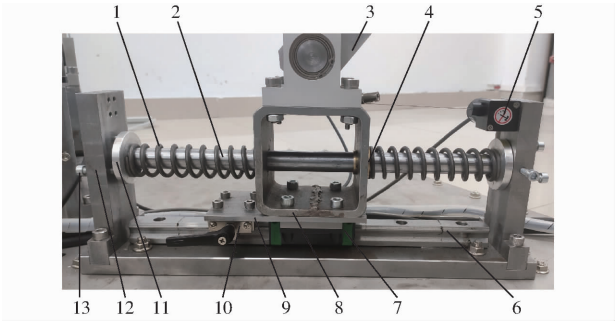


图 11 被动隔振单元结构图

Fig. 11 Structure diagram of passive vibration isolation unit

1. 弹簧 2. 导向轴 3. 下连杆 4. 自润滑轴承 5. 拉线编码器
6. 导轨 7. 滑块 8. 支座 9. 转接板 10. 导轨夹具 11. 垫片
12. 立板 13. 调整螺栓

从式(44)中可以看出,弹簧刚度是调姿隔振平

台振动方程的重要参数。实验用弹簧为圆柱螺旋压缩弹簧,端部线圈折弯靠紧,端面磨平。弹簧刚度理论计算公式为

$$k = \frac{G\phi^4}{8nD^3} \tag{48}$$

式中 G ——剪切弹性模量
 ϕ ——弹簧钢丝直径
 n ——弹簧有效圈数
 D ——弹簧中径

实验用弹簧参数为:线径 4 mm,中径 28 mm,总圈数 11 圈,有效圈数 9 圈,材质 65Mn,采用式(48)计算得弹簧刚度为 12.96 N/mm。式(48)是根据材料力学推导出来的,很难精确计算弹簧刚度,因此采用弹簧拉压试验机对其进行刚度测量,刚度实际测量值为 14.00 N/mm。将虚拟样机弹簧刚度设定为同等参数,使虚拟样机与原理样机的关键物理参数接近。

5.2 模态实验

如图 12 所示,将 3 个滑块预紧,并用自锁式尼龙扎带将 3 个滑块扎紧,采用突然剪断扎带的方法将脉冲信号施加给机构,实现对机构的脉冲激励,从而激发出机构的各阶模态。

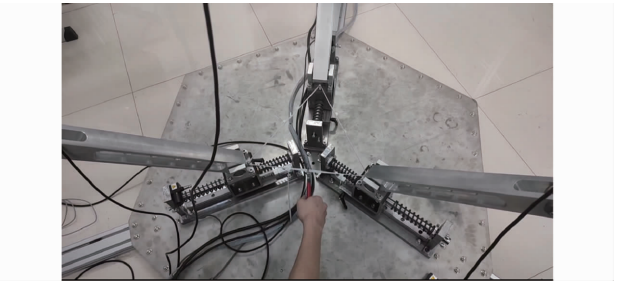


图 12 原理样机的脉冲激励方式

Fig. 12 Pulse excitation of prototype

如图 10 所示,在拾振点 1、2 处布置 IEPE 加速度传感器、在拾振点 3 处布置 IEPE 速度传感器。突然剪断扎带后,机构受到脉冲激励,动平台响应的时域图信号如图 13 所示。对时域信号进行离散傅里叶变换,得到系统的输出响应的频谱图,如图 14 所示。在图 13、14 中, v_{pi} 、 a_{pi} 分别表示第 i 个拾振点的线速度、线加速度。

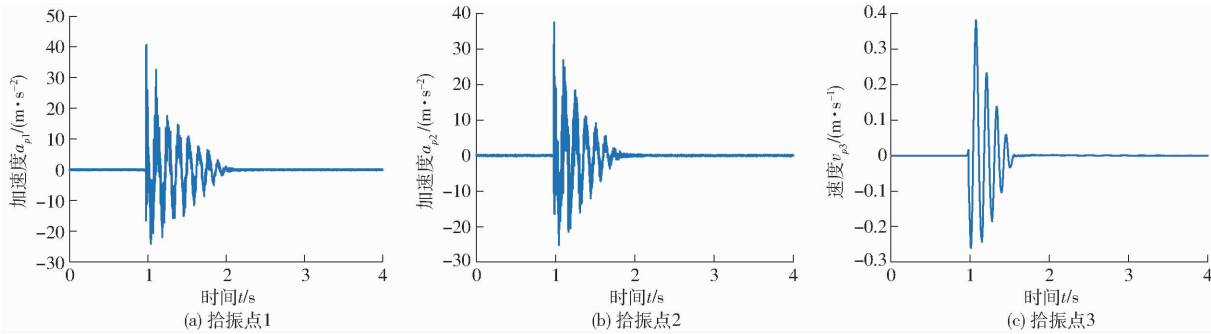


图 13 动平台输出响应时域波形

Fig. 13 Time domain waveform of output response of mobile platform

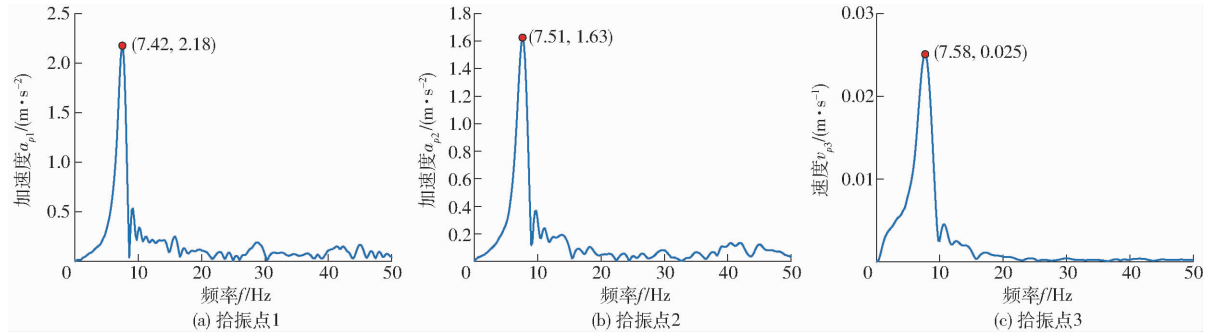


图 14 动平台输出响应频域波形

Fig. 14 Frequency domain waveform of output response of mobile platform

相比于电动缸、动平台、上下连杆等零部件,弹簧的刚度要小很多,因此测试得到的低阶固有频率就是系统的刚体模态。由于 3 个滑块是同步突然释放,上述脉冲激励起的模态以一阶模态为主。从图 14 可以看出,3 个拾振点的频域波形基本一致,原理样机的一阶振型固有频率约为 7.50 Hz。实验测定值 7.50 Hz 与理论计算值 6.48 Hz 接近,但仍存在一定偏差,主要是激励过程中机构的位姿变化、弹簧多次大行程压缩后的刚度变化、3 个滑块释放的不一致性、理论模型的偏差等因素造成的。

5.3 响应特性实验

经过理论计算可知,系统各阶固有频率比较接近,因此可以认为系统的二阶、三阶固有频率也接近 7.50 Hz。根据主被动隔振理论,大于 $\sqrt{2} \times 7.50$ Hz 的中高频振动主要依靠被动隔振单元隔离,低频位姿扰动则依靠电动缸的运动进行补偿。为了防止系统共振,设计时机构的固有频率要远离外部扰动频率,同样机构主动调姿的工作频率也要避开其固有频率。

主动调姿运动的响应特性直接决定了调姿隔振平台低频段位姿扰动的补偿能力。本实验主要验证原理样机在 7 Hz 的响应特性。分别给定原理样机绕 y 轴运动的正弦信号为 $\beta = 1.5^\circ \sin(2\pi \times 2t)$ 、 $\beta = 1.5^\circ \sin(2\pi \times 7t)$,即正弦信号幅值为 1.5°,频率分别为 2、7 Hz。Mti-300 型航姿传感器实际测量的 y

轴输出曲线如图 15 所示。

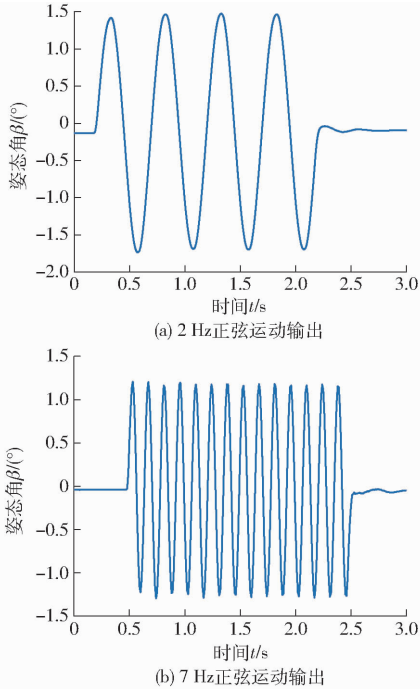


图 15 不同工作频率下原理样机的 y 轴输出曲线

Fig. 15 The y-axis output of prototype at different operating frequencies

从图 15 可看出,由于安装偏差及零漂,传感器的输出零线存在偏差。原理样机的运动频率为 2 Hz 时,频率较低,y 轴实测输出幅值 100% 复现了命令振幅。原理样机的运动频率为 7 Hz 时,y 轴实测输出幅值至少 80% 复现了命令振幅,超过了伺服系统

频率响应带宽定义中的 70.7%。

给定样机绕 x 轴相同的 7 Hz 正弦信号, 图 16 为 Mti-300 型航姿传感器实际测量的样机 x 轴输出曲线。同样, 原理样机频率 7 Hz 的 x 轴输出幅值至少相当于命令振幅的 80%, 较好地复现了命令信号。上述实验结果说明, 对于 7 Hz 以下的输入指令, 原理样机具有较强的跟随能力, 能够实现对低频位姿扰动的补偿。

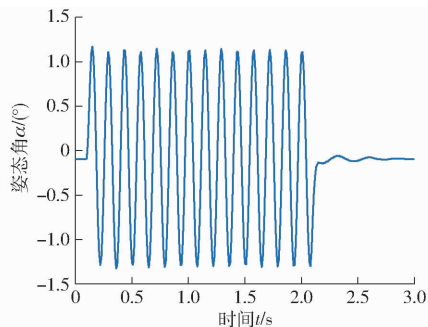


图 16 频率 7 Hz 下原理样机的 x 轴输出曲线

Fig. 16 The x -axis output of prototype at 7 Hz

6 结论

(1) 针对大幅度位姿扰动补偿和中高频振动隔离的需求, 提出了一种主被动闭环融合的并联调姿隔振平台新构型。

(2) 借助于旋量代数及影响系数理论, 建立了包含闭环子链并联机构的运动学模型, 得到了动平台、开链分支、电动缸分支对广义坐标的一、二阶影响系数。

(3) 基于旋量形式牛顿-欧拉公式及虚功原理, 建立了包含闭环子链并联机构主被动分离形式的动力学模型, 并以此为基础求解了调姿隔振平台的固有频率及振型, 分析了弹簧刚度、平台质量、机构位姿对系统固有频率的影响。

(4) 模态实验得到的原理样机固有频率与理论计算值接近, 验证了理论模型的正确性, 响应特性的实验结果验证了原理样机大幅度位姿补偿的可行性。

参 考 文 献

- [1] KOLECKI J, PROCHASKA M, KURCZYŃSKI Z, et al. Developing the stabilized mapping system for the gyrocopter-report from the first tests[J]. International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing & Spatial Information Sciences, 2016, 41: 31–36.
- [2] 刘晓, 赵铁石, 边辉, 等. 大型舰载稳定平台机构及优化设计[J]. 机器人, 2013, 35(3): 339–345.
LIU Xiao, ZHAO Tieshi, BIAN Hui, et al. Optimization design of a large-scale mechanism for ship-based stabilizing platform[J]. Robot, 2013, 35(3): 339–345. (in Chinese)
- [3] ZHANG Lijie, GUO Fei, LI Yongquan, et al. Global dynamic modeling of electro-hydraulic 3-UPS/S parallel stabilized platform by bond graph[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(6): 1176–1185.
- [4] 于荣荣, 李永亮, 董礼港, 等. 移动并联式六自由度转运调姿方法研究[J]. 农业机械学报, 2021, 52(7): 421–426.
YU Rongrong, LI Yongliang, DONG Ligang, et al. Six degrees of freedom transfer and attitude adjustment method of mobile parallel[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(7): 421–426. (in Chinese)
- [5] LIU Chunchuan, JING Xingjian, DALEY S, et al. Recent advances in micro-vibration isolation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 56: 55–80.
- [6] 于大国, 马履中, 杨启志. 车辆多维隔振装置设计与仿真[J]. 农业机械学报, 2009, 40(5): 29–33.
YU Daguo, MA Lüzhong, YANG Qizhi. Multidimensional vibration isolation device of vehicles and its simulation[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(5): 29–33. (in Chinese)
- [7] 牛军川, 杨峰, 李勇. 基于变胞并联机构的多维隔振研究[J]. 振动与冲击, 2014, 33(7): 206–209.
NIU Junchuan, YANG Feng, LI Yong. Multi-dimensional vibration isolation based on metamorphic parallel mechanism[J]. Journal of Vibration and Shock, 2014, 33(7): 206–209. (in Chinese)
- [8] 董光旭, 罗亚军, 严博, 等. 基于正负刚度并联的低频隔振器研究[J]. 航空学报, 2016, 37(7): 2189–2199.
DONG Guangxu, LUO Yajun, YAN Bo, et al. Study on a low frequency vibration isolator based on combined positive and negative stiffness[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2016, 37(7): 2189–2199. (in Chinese)
- [9] KIM K R, YOU Y H, AHN H J. Optimal design of a QZS isolator using flexures for a wide range of payload[J]. Int. J. Precis. Eng. Manuf, 2013, 14(6): 911–917.
- [10] 陆泽琦, 陈立群. 非线性被动隔振的若干进展[J]. 力学学报, 2017, 49(3): 550–564.
LU Zeqi, CHEN Liqun. Some recent progress in nonlinear passive isolations[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2017, 49(3): 550–564. (in Chinese)
- [11] LIU J, LI Y, ZHANG Y, et al. Dynamics and control of a parallel mechanism for active vibration isolation in space station[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 76(3): 1737–1751.
- [12] 王兵. 指向、隔振一体化并联平台设计与优化[D]. 北京: 中国科学院大学, 2016: 21–36.
WANG Bing. Optimization and design of a parallel platform combined vibration-isolation with pointing[D]. Beijing: University of Chinese Academy of Sciences, 2016: 21–36. (in Chinese)
- [13] 李耀, 吴洪涛, 杨小龙, 等. 航天器微振动主动控制研究[J]. 农业机械学报, 2018, 49(11): 379–385.

- LI Yao, WU Hongtao, YANG Xiaolong, et al. Investigation on active control of spacecraft micro-vibration[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(11): 379–385. (in Chinese)
- [14] 王超新, 刘兴天, 张志谊. 基于立方体 STEWART 的微振动主动控制分析与实验[J]. 振动与冲击, 2017, 36(5): 208–213.
WANG Chaoxin, LIU Xingtian, ZHANG Zhiyi. Micro-vibration active control for a STEWART platform with a cubic configuration[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(5): 208–213. (in Chinese)
- [15] 张兵, 黄华, 蔡佳敏, 等. 冗余六自由度并联隔振平台多维隔振性能研究[J]. 振动与冲击, 2022, 41(2): 26–32.
ZHANG Bing, HUANG Hua, CAI Jiamin, et al. Multi-dimensional isolation performances of a redundant 6DOF parallel vibration isolation platform[J]. Journal of Vibration and Shock, 2022, 41(2): 26–32. (in Chinese)
- [16] 任明可, 谢溪凌, 黄志伟, 等. 新型橡胶-电磁复合主被动隔振器研究[J]. 振动与冲击, 2021, 40(23): 32–37.
REN Mingke, XIE Xiling, HUANG Zhiwei, et al. Novel rubber-electromagnetic composite active/passive vibration isolator[J]. Journal of Vibration and Shock, 2021, 40(23): 32–37. (in Chinese)
- [17] LIN H, MCINROY J E. Disturbance attenuation in precise hexapod pointing using positive force feedback[J]. Control Engineering Practice, 2006, 14(11): 1377–1386.
- [18] JANG D D, JUNG H J, SHIN Y H, et al. Feasibility study on a hybrid mount system with air springs and piezo-stack actuators for micro vibration control[J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2012, 23(5): 515–526.
- [19] 张洋. 基于压电陶瓷的主被动一体化作动器及多维隔振系统研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017: 95–99.
ZHANG Yang. Research on a active-passive integrated actuator based on piezoelectric ceramic and multi-dimensions vibration isolation system[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017: 95–99. (in Chinese)
- [20] LI Bing, ZHAO Wei, DENG Zongquan. Modeling and analysis of a multi-dimensional vibration isolator based on the parallel mechanism[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2012, 31(1): 50–58.
- [21] 张英, 孙豪, 马帅帅. 基于 4-UPS/CPC 并联机构的多维调姿隔振平台设计[J]. 中国机械工程, 2021, 32(13): 1513–1522, 1529.
ZHANG Ying, SUN Hao, MA Shuaishuai. Design of a multi-dimensional attitude adjustment and vibration isolation platform based on 4-UPS/CPC parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(13): 1513–1522, 1529. (in Chinese)
- [22] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 201–210.
- [23] ZHAO Tieshi, GENG Mingchao, CHEN Yuhang, et al. Kinematics and dynamics hessian matrices of manipulators based on screw theory[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2015, 28(2): 226–235.
- [24] 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报, 2015, 51(9): 28–36.
GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Position positive solution of parallel mechanism based on quasi Newton method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(9): 28–36. (in Chinese)
- [25] 赵星宇, 赵铁石, 徐雪寒, 等. 3-P(4S)并联平台振动特性分析与实验验证[J]. 农业机械学报, 2018, 49(7): 419–426.
ZHAO Xingyu, ZHAO Tieshi, XU Xuehan, et al. Vibration characteristics analysis and experimental validation of 3-P(4S) parallel platform[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(7): 419–426. (in Chinese)
- [26] 张青云, 赵新华, 刘凉, 等. 空间柔性闭链机器人动力学建模与振动仿真[J]. 农业机械学报, 2021, 52(1): 401–409.
ZHANG Qingyun, ZHAO Xinhua, LIU Liang, et al. Dynamic modeling and vibration simulation of spatial flexible closed-chain robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1): 401–409. (in Chinese)