

基于虚关节法的3T1R混联机构静刚度特性分析

朱小蓉 吴 昊 沈惠平
(常州大学机械工程学院, 常州 213164)

摘要: 基于虚关节法和构件有限元分析建立了考虑驱动副、滚珠丝杆副、线性导轨和运动杆件弹性变形的3T1R混联机构静刚度矩阵模型。通过在构件末端添加多自由度虚拟关节的方式来等效构件的弹性,将支链等效为一系列刚性构件,通过主动副、被动副以及虚拟关节连接的形式,给出了运动关节和虚拟关节变量对机构末端位姿的映射,应用虚功原理得到机构静平衡方程,推导了机构在一定外载下的刚度矩阵模型,采用无量纲变换法定义了局部线刚度和角刚度评价指标与全局线刚度和角刚度评价指标,据此分析了混联机构在典型位姿和工作空间域内的静刚度性能,并利用有限元仿真验证了刚度模型的准确性。结果表明,所建半解析刚度模型具有较高的精度;机构 z 向线刚度在工作空间内关于 $x=y$ 轴线对称分布;机构 x 向、 y 向的线刚度沿 x 轴、 y 轴方向不变,具有解耦性;机构线刚度远大于角刚度。

关键词: 混联机构; 静刚度; 虚关节法; 有限元分析

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2021)09-0400-10 OSID: 

Static Stiffness Analysis of 3T1R Hybrid Manipulator Based on Virtual Joint Method

ZHU Xiaorong WU Yu SHEN Huiping
(School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

Abstract: Based on the virtual joint method, the static stiffness matrix model of a 3T1R hybrid manipulator was established considering the elastic deformation of driving joints, ball screw pair, linear guide rail and moving bar. The elasticity deformation of the component was described as one multi-degree of freedom virtual joint at the end of the component, and the branch was then equivalent to a series of rigid components connected by active joint, passive joints and virtual joints. The mapping of kinematic joint and virtual joint variables to the end platform of the mechanism was given. The static equilibrium equation of the manipulator was obtained by using the virtual work principle, and the stiffness matrix model of the manipulator under external load was derived. The evaluation indices of local linear/angular stiffness and global linear/angular stiffness were defined by the dimensionless transformation method, and the static stiffness performance of the hybrid manipulator at the typical configurations as well as throughout the workspace was analyzed accordingly, and the accuracy of the stiffness model was verified by finite element simulation. The results showed that the semi-analytical stiffness model had good accuracy. The z direction linear stiffness of the mechanism was symmetrically distributed in the workspace. The linear stiffness of the mechanism in the $x(y)$ direction was decoupled. Linear stiffness of mechanism was much larger than angular stiffness. The research results can provide a theoretical basis for the engineering design and application of the institute.

Key words: hybrid manipulator; static stiffness; virtual joint method; finite element analysis

0 引言

三平移一转动并联机构具有速度快、精度高、操

作性能好等优点,在装配、包装及码垛等高速重复性工程领域应用较为广泛^[1-8]。机构刚度反映机构在外载作用下因弹性构件变形引起的末端执行器位姿

变化,决定了机构在负载下的定位精度。因此,三平移—转动并联机构的刚度模型已成为评估机构工作性能的重要指标之一^[9-12]。

现有的刚度分析方法包括有限元分析法、矩阵结构分析法和虚关节法。其中,虚关节法由GOSSELIN等^[13]提出,最初仅考虑驱动关节的柔性,将每一个驱动关节的变形等效为一个单自由度的虚拟关节,经过不断发展,又考虑被动关节、连杆、平台的变形以及一些特定的几何约束和内、外部载荷,因此,虚关节法刚度建模的关键在于如何定义虚拟关节。GOSSELIN等^[13]将连杆柔度用刚性连杆和单自由度的虚拟关节串联来代替,并提出分别适用于刚性机构和柔性机构的两种刚度建模方法;PASHKEVICH等^[14]考虑连杆和驱动关节的柔性,用6自由度虚拟关节来代替柔性连杆,对几种过约束并联机构进行了刚度建模;PASHKEVICH等^[15]考虑被动关节内预加载荷条件,基于虚关节法建立了机构刚度模型,同时考虑外部载荷对机构刚度的影响,提出动态静力控制算法,以补偿外部/内部载荷引起的误差;AMIR等^[16]考虑动平台的刚度,分别用集总模型和分布式模型建立3-PSP并联机构的刚度矩阵,并用有限元法评估了模型的精确性;WU等^[17]采用实验方法获得直线电机驱动系统的非线性柔度特性,并考虑驱动系统和连杆变形建立了3-PPR并联机构的刚度模型;吕帮俊等^[18]将虚关节法与有限元法相结合,采用有限元分析法对驱动杆和万向铰链进行刚度分析,建立了有预载和无预载情况下的机构刚度半解析模型;ALEXANDR等^[19]基于虚关节法提出一种并联机构在内、外载荷作用下的刚度建模方法;张俊等^[20]利用有限元法得到虎克铰、球铰、转动副部件的刚度矩阵,用虚关节法建立了较高精度的机构刚度模型,有限元验证结果表明,其误差可控制在5%以内;GORGULU等^[21]采用虚关节法对一种并联触觉装置进行刚度建模,并就计算精度和计算成本与有限元分析方法进行了比较,从而验证了虚关节法的有效性,可用于触觉装置控制回路的实时控制。

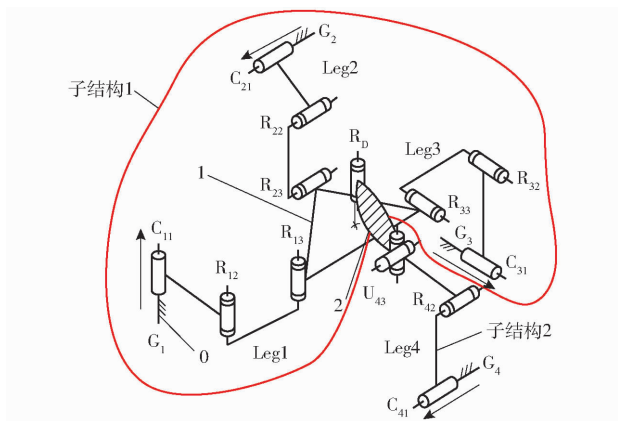
虚关节法将构件分布式变形以虚拟关节模型集中表示,不仅简化了模型,而且物理意义明确、计算量适中,已成为机器人技术领域常用的刚度分析方法。然而,采用虚关节法对混联机构,特别是对含闭合回路或子并联机构的复杂机构进行刚度建模的研究并不多见。

本文采用虚关节法,考虑驱动电机、丝杆螺母副、导轨和运动连杆的变形,建立(3CRR/R)&CRU混联机构的静刚度半解析矩阵,提出线性刚度和角

刚度的无量纲化评价指标,分析机构规则工作空间内的静刚度分布。

1 机构描述

本文所研究的(3CRR/R)&CRU混联机构,是由Quadrupteron机构进行结构降耦所得^[22],结构如图1所示。该机构具有耦合度低、运动解耦、工作空间大等特点。



④考虑驱动系统的变形,设为单自由度的虚拟扭转关节。⑤导轨变形简化为5自由度的虚拟关节,忽略其轴向线性变形。

基于以上假设,机构所包含的平台、连杆、主动

关节和被动关节等构件及其对应的局部柔度虚拟模型如表1所示,对应的该混联机构的柔度组成单元如图2b所示。对该混联机构进行刚度分析,首先应对其2个组成子结构进行刚度建模。

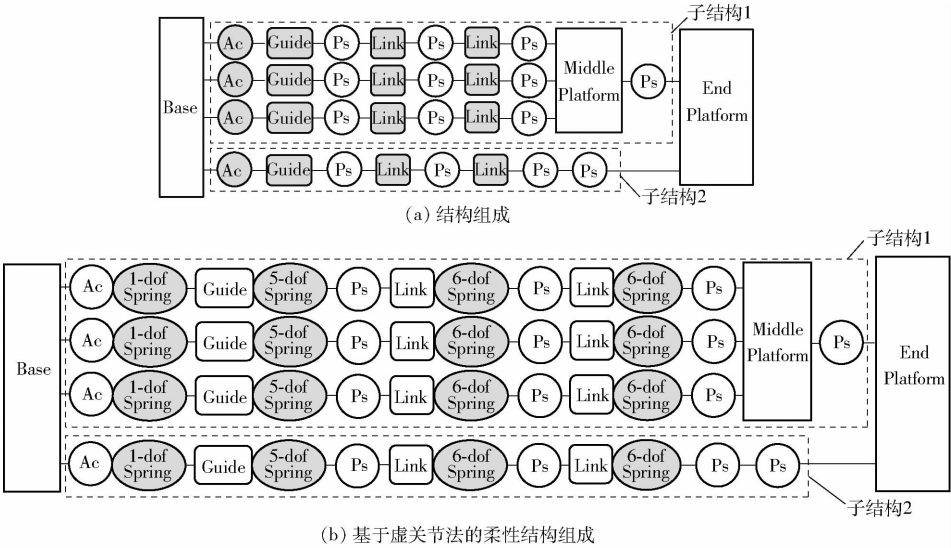


图2 3T1R混联机构组成
Fig. 2 Composition of hybrid manipulator

表1 基于虚关节法的构件模型

Tab. 1 VJM-based modeling of components

机构组件		基于虚关节法的机构组件	
组件	示意图	组成	示意图
刚性静平台0	Base	刚性静平台0	Base
弹性驱动关节	Ac	驱动关节+1-dof虚拟弹簧	Ac 1-dof Spring
弹性导轨	Guide	刚性导轨+5-dof虚拟弹簧	Guide 5-dof Spring
刚性被动副	Ps	刚性被动副	Ps
弹性连杆	Link	刚性连杆+6-dof虚拟弹簧	Link 6-dof Spring
刚性中间平台1	Middle Platform	刚性中间平台1	Middle Platform
刚性末端平台2	End Platform	刚性末端平台2	End Platform

2.1 子结构1刚度建模

子结构1由3-CRR子并联机构的末端输出(中间平台1)串联转动副 R_0 而成,因此,应首先建立CRR串联支链的刚度矩阵。

2.1.1 CRR支链刚度模型

沿CRR支链的各主、被动关节依次建立局部参考系。为节省篇幅,选取 $C_{31}R_{32}R_{33}$ 支链为例进行说明,局部坐标系如图3所示。设 a, b, c, n 为点 A_i, B_i, C_i, N 在定坐标系 xOy 下的位置矢量;转动副 R_{32} 和 R_{33} 轴线矢量为 r_1, r_2 ;定坐标系下 x, y, z 轴矢量分别记为 e_1, e_2, e_3 。

考虑弹性变形时,中间平台1产生的微小变形,由其组成支链的构件变形和主、被动关节变形引起。

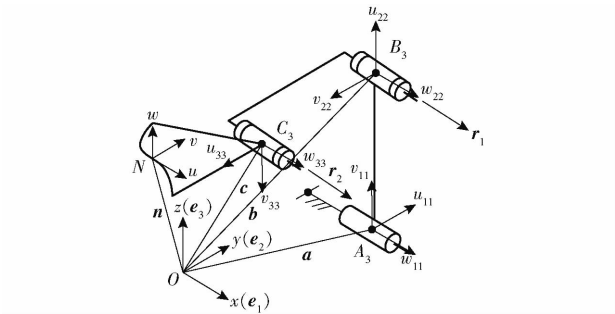


图3 CRR支链坐标系
Fig. 3 Coordinates of CRR limb

对第*i*条CRR支链,有

$$\delta t_i = J_{\theta_i} \delta \theta_i + J_{\psi_i} \delta \psi_i \tag{1}$$

其中

$$\delta \theta_i = (\delta \theta_0^i, \delta \theta_1^i, \dots, \delta \theta_{17}^i)$$

$$\delta \psi_i = (\delta \psi_1^i, \delta \psi_2^i, \delta \psi_3^i)$$

式中 δt_i ——支链*i*末端的微分运动,包含三维移动和三维转动

$\delta \theta_i$ ——支链*i*所有虚关节微分运动构成的矢量

$\delta \psi_i$ ——支链*i*所有被动关节微分运动构成的矢量

J_{θ_i} ——虚关节*i*变量对末端微分运动的映射,为 6×18 的矩阵,包括1个1-dof驱动关节、1个5-dof的导轨虚关节、2个连杆的6-dof虚关节

J_{ψ_i} ——被动关节*i*微分运动对末端微分运动的映射,为 6×3 的矩阵(3个被动转动副)

根据图 5 所建立局部坐标,可分别表示为

$$\begin{aligned} J_{\theta a4} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix}_{6 \times 1} \\ J_{\theta g4} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{w}_4 \times \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{w}_4 \times \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{w}_4 \times \boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}_{6 \times 5} \\ J_{\theta l41} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{lm} \times \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{w}_{lm} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{w}_5 \times \boldsymbol{w}_{lm} \times \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{w}_5 \times \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{w}_5 \times \boldsymbol{w}_{lm} & \boldsymbol{w}_{lm} \times \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{w}_{lm} \end{bmatrix}_{6 \times 6} \\ J_{\theta l42} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_{sl} & \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{w}_{sl} \times \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{w}_6 \times \boldsymbol{w}_{sl} & \boldsymbol{w}_6 \times \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{w}_6 \times \boldsymbol{w}_{sl} \times \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{w}_{sl} & \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{w}_{sl} \times \boldsymbol{r}_b \end{bmatrix}_{6 \times 6} \\ J_{\psi 4} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{r}_c \\ \boldsymbol{w}_4 \times \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{w}_5 \times \boldsymbol{r}_a & \boldsymbol{w}_6 \times \boldsymbol{r}_b & \boldsymbol{w}_6 \times \boldsymbol{r}_c \end{bmatrix}_{6 \times 4} \\ K_{\theta 4} &= \begin{bmatrix} K_{\theta a4} & & & & \\ & K_{\theta g4} & & & \\ & & & & \\ & & & K_{\theta l41} & \\ & & & & K_{\theta l42} \end{bmatrix}_{18 \times 18} \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{w}_4 = \boldsymbol{m} - \boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{w}_5 = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{p} \quad \boldsymbol{w}_6 = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{p}$
 $\boldsymbol{w}_{lm} = \boldsymbol{l} - \boldsymbol{m} \quad \boldsymbol{w}_{sl} = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{l}$

2.3 混联机构刚度建模

由于末端平台 2 为刚体,则(3CRR/R)&CRU 混联机构的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 \tag{9}$$

2.4 刚度性能评价指标

混联机构刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 是 6×6 的矩阵,可写成

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

该矩阵可划分为 4 个子矩阵,用 $\boldsymbol{K}_{rr}$ 、 $\boldsymbol{K}_{ur}$ 、 $\boldsymbol{K}_n$ 、 $\boldsymbol{K}_{nn}^T$ 表示,分别表示角刚度、线刚度及其耦合关系,量纲分别为 $\text{N} \cdot \text{m}/\text{rad}$ 、 N/m 、 N/rad 及 $\text{N} \cdot \text{m}/\text{m}$ 。由于矩阵元素量纲不一致,常用的性能指标,如矩阵特征值、条件数等不能用于评价该机构的刚度特性,需要进行无量纲处理。

采用文献[23]提出的矩阵无量纲化处理方法,首先建立机构的静力平衡模型为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \\ \boldsymbol{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{rr} & \boldsymbol{K}_{ur} \\ \boldsymbol{K}_{ur}^T & \boldsymbol{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varphi} \\ \Delta \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ ——机构所受力矩

$\boldsymbol{F}$ ——机构所受力

$\Delta \boldsymbol{\varphi}$ 、 $\Delta \boldsymbol{p}$ ——机构在该力矩与力作用下产生的微小角变形和线变形

则空间力/力矩又可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M} = \boldsymbol{K}_{rr} \Delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{K}_{ur} \Delta \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}_{ur}^T \Delta \boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{K}_{nn} \Delta \boldsymbol{p} \end{cases} \tag{11}$$

将角变形 $\Delta \boldsymbol{\varphi}$ 与线变形 $\Delta \boldsymbol{p}$ 通过线性变换,转换为空间力与力矩的无量纲化参数

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varphi} \\ \Delta \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_\phi & \boldsymbol{O}_3 \\ \boldsymbol{O}_3 & \boldsymbol{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_\varphi \\ \boldsymbol{\lambda}_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\varphi} \\ \Delta \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_\phi & \boldsymbol{O}_3 \\ \boldsymbol{O}_3 & \boldsymbol{\Omega}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_\varphi \\ \boldsymbol{\omega}_p \end{bmatrix} \end{cases} \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{A}_\varphi$ 、 $\boldsymbol{A}_p$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_\varphi$ 、 $\boldsymbol{\Omega}_p$ ——二次型矩阵 $\boldsymbol{K}_{rr} \boldsymbol{K}_{rr}^T$ 、 $\boldsymbol{K}_{ur} \boldsymbol{K}_{ur}^T$ 和 $\boldsymbol{K}_{nn} \boldsymbol{K}_{nn}^T$ 的特征向量 $\boldsymbol{\lambda}_\varphi$ 、 $\boldsymbol{\lambda}_p$ ($\boldsymbol{\omega}_\varphi$ 、 $\boldsymbol{\omega}_p$)——力(力矩)作用下无量纲化的线变形与角变形

$\boldsymbol{O}_3$ ——零矩阵

将式(12)代入式(11)有

$$\begin{cases} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{G}_f \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}_m \boldsymbol{\omega} \end{cases} \tag{13}$$

其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{G}_f = [\boldsymbol{K}_{rr}^T \boldsymbol{A}_\varphi & \boldsymbol{K}_{ur} \boldsymbol{A}_p] \\ \boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_\varphi^T & \boldsymbol{\lambda}_p^T]^T \\ \boldsymbol{G}_m = [\boldsymbol{K}_{ur} \boldsymbol{\Omega}_\varphi & \boldsymbol{K}_{nn} \boldsymbol{\Omega}_p] \\ \boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}_\varphi^T & \boldsymbol{\omega}_p^T]^T \end{cases} \tag{14}$$

式中 $\boldsymbol{G}_f$ 、 $\boldsymbol{G}_m$ —— 3×3 的系数矩阵

设二次型矩阵 $\boldsymbol{G}_f^T \boldsymbol{G}_f$ 和 $\boldsymbol{G}_m^T \boldsymbol{G}_m$ 的 3 个特征值分别为 λ_i 和 σ_i ($i = 1, 2, 3$),则机构线刚度性能指标 k_l 和角刚度性能指标 k_r 可用其最小值表示,定义为

$$\begin{cases} k_l = \min \sqrt{\lambda_i} \\ k_r = \min \sqrt{\sigma_i} \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{15}$$

显然, k_l 与 k_r 越大,则机构的线刚度和角刚度性能越好。

k_l 和 k_r 是机构的位型函数,为评估机构在整个工作空间 Ω 中的刚度性能,定义全局线刚度和角刚度性能指标 G_l 和 G_r 为

$$\begin{cases} G_l = \frac{\int_{\Omega} k_l d\Omega}{\Omega} \\ G_r = \frac{\int_{\Omega} k_r d\Omega}{\Omega} \end{cases} \tag{16}$$

3 混联机构刚度分析

基于上述所建刚度模型,对该机构的虚拟样机进行刚度分析。几何参数如表 2 所示,为研究结构参数对机构刚度性能的影响,选择合理的杆长,杆件材料采用碳纤维,弹性模量为 $2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$,泊松比为 0.3;中间平台半径 $r = 40 \text{ mm}$,末端平台 2 与中

间平台垂直距离 $h = 10\text{ mm}$ ；驱动系统采用 1FL6024 - 2AF 型直流伺服电机和 1605 型滚珠丝杆。

表 2 连杆的几何参数
Tab. 2 Geometric parameters of links

连杆	基本尺寸/mm	横截面尺寸/(mm×mm)	杆长/mm
l_{11}	170	20×20(正方形)	[150,250]
l_{21}	237	20×20(正方形)	[200,300]
l_{31}	223	20×20(正方形)	[200,300]
l_{41}	166	20×20(正方形)	[150,250]
l_{12}	225	25×20(矩形)	[200,300]
l_{22}	208	25×20(矩形)	[150,250]
l_{32}	179	25×20(矩形)	[150,250]
l_{42}	223	25×20(矩形)	[200,300]

根据式(7)~(9),计算机构末端平台 2 中心点 P 的刚度矩阵。其中,支链组成细长杆件的刚度计算可看成悬臂梁,刚度系数计算式为^[24]

$$K = \begin{bmatrix} \frac{GI_x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{EA_t}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

式中 A ——连杆截面积 l ——连杆长度
 $I_x、I_y、I_z$ ——连杆横截面的惯性矩
 E ——材料杨氏模量
 G ——材料剪切模量

驱动副的扭转刚度系数计算公式为^[25]

$$K_{act} = \left(\frac{Sd \tan(\psi + \phi_v)}{2k_\alpha} + \frac{L}{EA} \right)^{-1} \quad (18)$$

式中 K_{act} ——电机驱动器的控制环路刚度系数
 k_α ——电机扭转刚度
 d ——丝杆螺纹中径
 S ——丝杆导程 ψ ——螺纹升角
 ϕ_v ——螺纹当量摩擦角
 L ——丝杠长度

丝杆采用双支承安装方式,滑块座沿导轨直线移动,结构示意图如图 6 所示,具体参数见表 3。

线性导轨刚度 K_{θ_g} 采用有限元模型进行分析。利用 SolidWorks 对滑块和导轨进行实体建模,并在

ANSYS 中进行有限元分析,得到导轨的 3 个角刚度 $k_{\phi_x}、k_{\phi_y}、k_{\phi_z}$ 以及 $y、z$ 向的线刚度 $k_{yy}、k_{zz}$ 如表 4 所示。

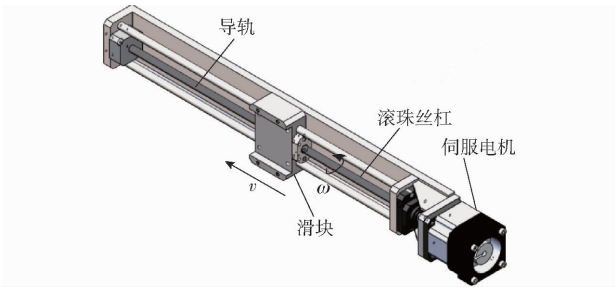


图 6 驱动系统示意图
Fig. 6 Driving system schematic

表 3 丝杠传动系统参数

Tab. 3 Parameters of lead screw system				
参数	$k_\alpha/(N \cdot m \cdot rad^{-1})$	d/mm	S/mm	$\psi/(^\circ)$
数值	2.0529×10^6	13.5	5	0.1174
参数	$\phi_v/(^\circ)$	L/mm	E/GPa	A/m^2
数值	0.1974	400	210	2.0106×10^{-4}

表 4 导轨刚度

Tab. 4 Stiffness of linear guideway				
参数	$k_{\phi_x}/(N \cdot m \cdot rad^{-1})$	$k_{\phi_y}/(N \cdot m \cdot rad^{-1})$	$k_{\phi_z}/(N \cdot m \cdot rad^{-1})$	$k_{yy}、k_{zz}/(N \cdot m^{-1})$
数值	1.70×10^7	4.53×10^7	1.19×10^7	7.44×10^5

3.1 结构参数对机构刚度的影响

采用单因素控制法,分析支链长度对机构刚度的影响。需要补充说明的是,当单因素变化时,其余参数保持不变。根据式(16)计算不同结构参数下所对应无量纲的全局线刚度 G_l 和全局角刚度 G_r ,结果如图 7 所示。

由图 7 可得,随着支链 1 中杆 l_{11} 与杆 l_{12} 长度的增加,机构全局线刚度和角刚度会降低。对支链 2,杆 l_{21} 和杆 l_{22} 的增加会减小全局角刚度,但对全局线刚度的影响很小。支链 3 中杆 l_{31} 与杆 l_{32} 的增加会降低机构的刚度,特别对线刚度的影响较大。支链 4 的杆长 l_{41} 与 l_{42} 对机构线刚度影响很小,但随着支链长度增加会使角刚度减小。

3.2 机构典型位姿下的刚度矩阵

根据表 2 中杆件基本尺寸,文献[22]进行了虚拟样机设计,得到机构规则工作空间为 $180\text{ mm} \times 220\text{ mm} \times 170\text{ mm}$,转角 $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$,基坐标下工作空间取值范围为 $X \in [80, 260]\text{ mm}$, $Y \in [90, 310]\text{ mm}$, $Z \in [100, 270]\text{ mm}$ ^[22]。

取末端平台中心 P 点的位置为 $(170, 200, 200)\text{ mm}$,平台姿态角 $\varphi = 0^\circ$,由式(7)~(9)计算出中心点 P 在静坐标系下的刚度矩阵为

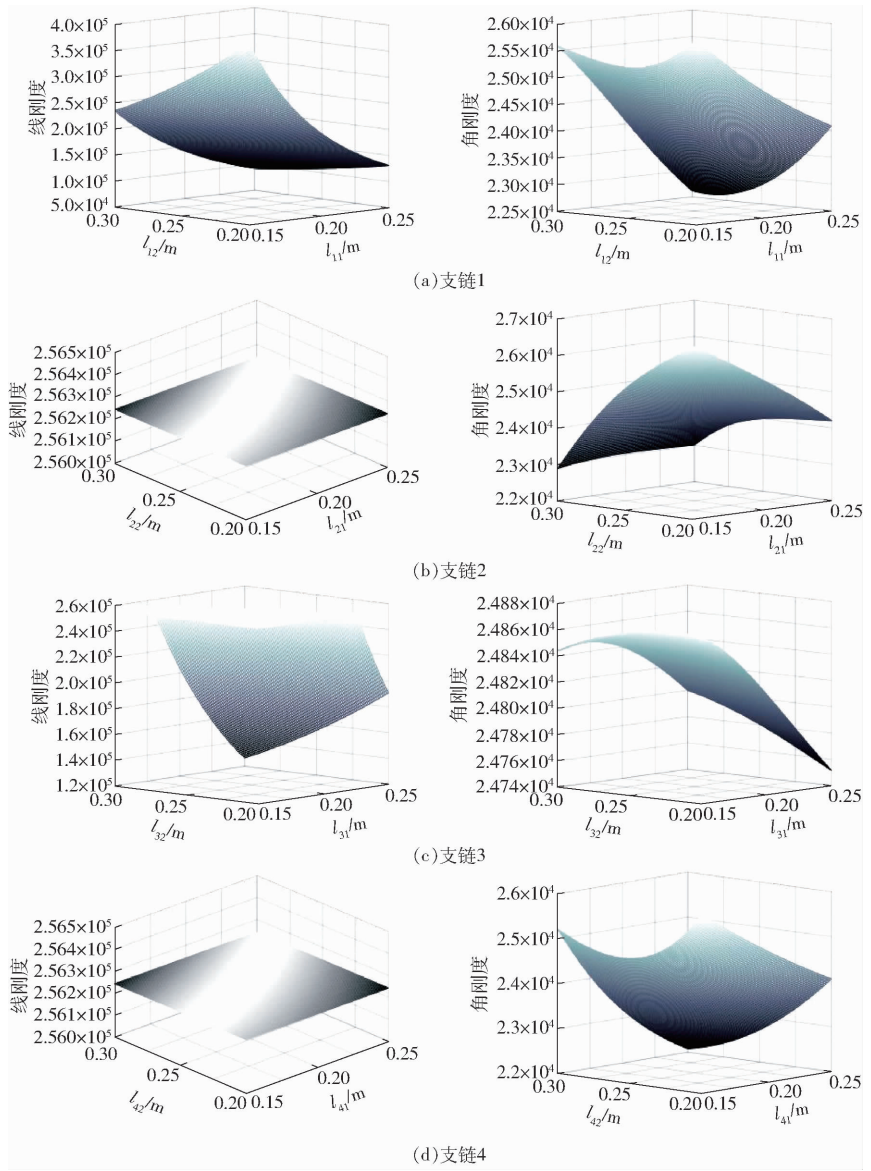


图7 机构结构参数对全局刚度的影响

Fig.7 Influence of structural parameters on stiffness

$$\mathbf{K}=10^5\times$$

0.248 8	0.004 2	-0.006 1	0	0.046 3	0.015 2
0.004 2	0.219 0	-0.018 1	0.354 1	0	0.252 3
-0.006 1	-0.018 1	0.227 4	-0.255 8	-0.242 3	0
0	0.354 1	-0.255 8	4.297 0	0	0
0.046 3	0	-0.242 3	0	4.112 4	0
0.015 2	0.252 3	0	0	0	2.550 1

对该刚度矩阵求逆,可得其柔度矩阵 $\mathbf{C}$ 为

$$\mathbf{C}=10^{-5}\times$$

4.030	-0.068	0.069	0.010	-0.041	-0.017
-0.068	6.069	-0.093	-0.506	-0.005	-0.600
0.069	-0.093	5.054	0.309	0.297	0.009
0.010	-0.506	0.309	0.293	0.018	0.050
-0.041	-0.005	0.297	0.018	0.261	0.001
-0.017	-0.600	0.009	0.050	0.001	0.452

为验证上述静刚度模型的精度,在 ANSYS Workbench 中建立该混联机构有限元模型,并沿 x 、 y 、 z 方向在动平台中心点 P 处分别施加单位力矩/力,经静力分析得到相应方向的变形,结果如图 8 所示,得到点 P 的位置 (170, 200, 200) mm,姿态角 $\varphi=0$ 时的角变形量为 $[3.90\times10^{-5}, 5.75\times10^{-5}, 4.78\times10^{-5}]$ rad,线性变形量为 $[3.19\times10^{-6}, 2.95\times10^{-6}, 4.2\times10^{-6}]$ m。

将 ANSYS Workbench 仿真得到的结果与理论建模结果进行对比,结果如表 5 所示。

由表 5 可知,ANSYS 仿真得到的变形量与理论计算之间存在一定的差距,这是由于安装需要,实际杆件模型与理论建模有区别,但最大误差保持在 15% 以内,可认为满足精度要求。

3.3 工作空间内的刚度分布

采用分层法将工作空间离散成若干个工作平

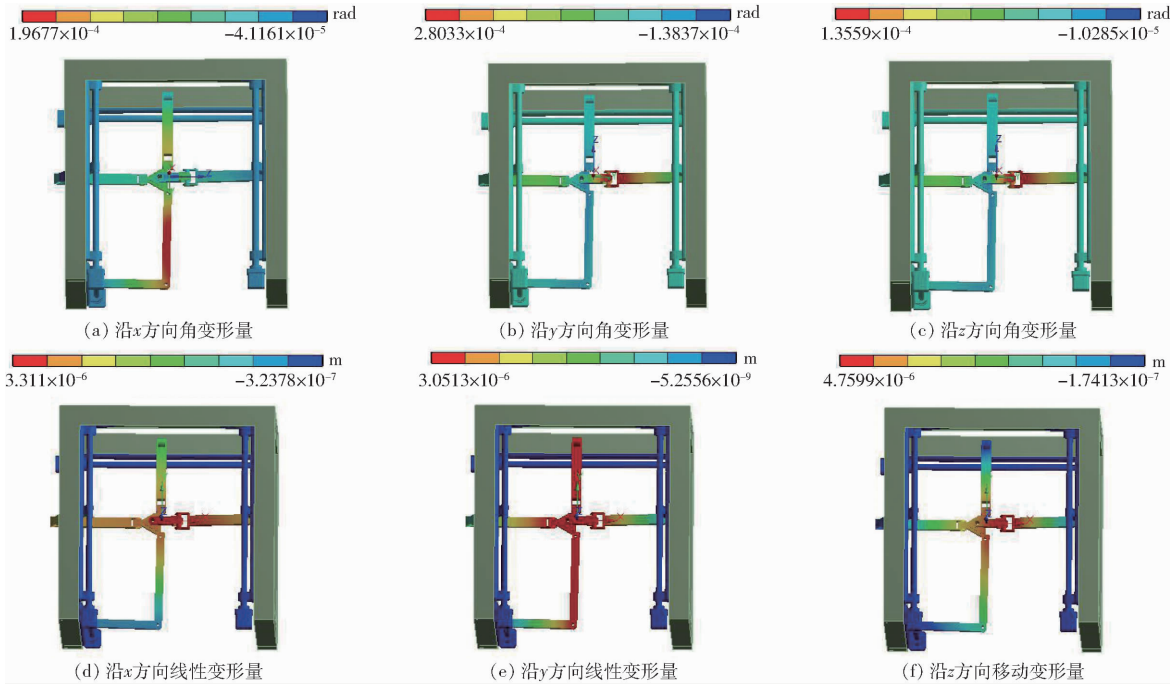


图 8 施加单位力/力矩的机构变形

Fig. 8 Simulation results of line and angle deformation

表 5 ANSYS 与理论建模的变形量结果对比
Tab.5 Comparisons of static stiffness results between ANSYS and theoretical modeling

方法	角变形量/rad		
	ψ_x	ψ_y	ψ_z
理论法	4.03×10^{-5}	6.07×10^{-5}	5.05×10^{-5}
有限元	3.90×10^{-5}	5.75×10^{-5}	4.78×10^{-5}
误差/%	3.33	5.57	5.65

方法	线变形量/m		
	σ_x	σ_y	σ_z
理论法	2.93×10^{-6}	2.61×10^{-6}	4.52×10^{-6}
有限元	3.19×10^{-6}	2.95×10^{-6}	4.20×10^{-6}
误差/%	8.15	11.5	7.62

面,再根据式(9)计算各工作平面上任一点所对应的刚度矩阵,其主对角线元素可看成是机构的角刚

度和线刚度。限于篇幅,本文仅取末端平台姿态 $\phi=0$,中心点 $z=200\text{ mm}$ 的工作平面,绘制 $180\text{ mm} \times 220\text{ mm}$ 工作平面内刚度矩阵的主对角线元素,结果如图 9 所示。

由图 9 可得,机构 3 个方向的刚度均随机构位姿变化。刚度在工作平面内分布较为均匀、无突变,说明机构刚度性能良好。机构 x 方向的线刚度,沿 x 方向保持不变,沿 y 轴方向呈现线性递减趋势;而 y 方向的线刚度,沿 y 轴方向不变,沿 x 轴呈现线性递减趋势,这应该与机构 x 向和 y 向的运动输出具有解耦性有关。机构 z 方向的线刚度,呈现相对于 $y=x$ 轴线对称的趋势,这可能与机构第 1 支链与第 3、4 支链沿斜边对称的布置方式有关,说明支链布局影响机构的刚度分布。

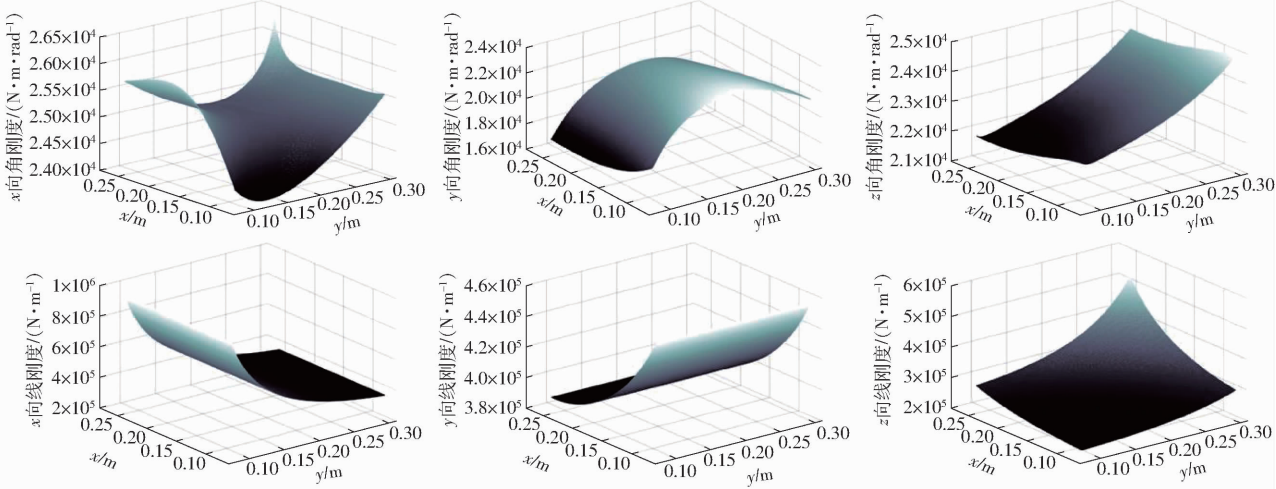


图 9 机构静刚度分布

Fig. 9 Distribution of static stiffness

3.4 工作空间内无量纲刚度

据 2.4 节式(15)提出的无量纲化性能指标,分析 $z=200\text{ mm}$, $\phi=0$ 时, xOy 平面内无量纲化的线刚度和角刚度分布,结果如图 10 所示。

由图 10 可得,机构线刚度 k_l 比角刚度 k_r 大 1

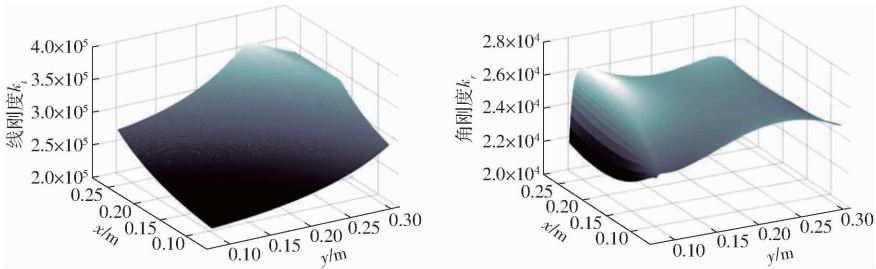
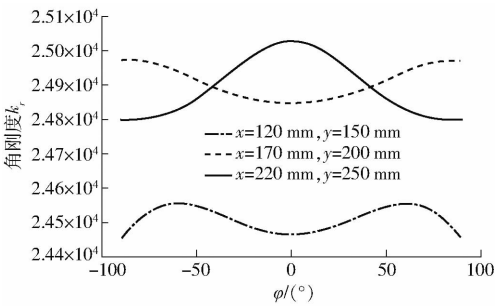


图 10 机构无量纲线刚度和角刚度分布
Fig. 10 Dimensionless stiffness performance

3.5 末端姿态角对刚度性能的影响

为评价机构刚度随末端姿态角的变化情况,利用式(15)计算末端平台位置固定但姿态变化时机构的无量纲线刚度 k_l 和角刚度 k_r ,图 11 分别是末端平台中心位于点 $(170, 200, 200)\text{ mm}$ 、 $(120, 150,$



个数量级,说明机构的线刚度较高,对抗移动方向上载荷形变能力较高;而角刚度性能一般,承受转矩能力较弱。线刚度 k_l 沿 x 正方向和 y 正方向均呈现增加的趋势,但总体分布较为均匀。角刚度 k_r 在工作空间边界处变化较大外,其余分布较为平坦。

200) mm 和点 $(220, 250, 200)\text{ mm}$ 的角刚度和线刚度随机构姿态角的变化曲线。

根据式(16)计算机构不同姿态下的全局线刚度 G_l 和角刚度 G_r ,图 12 为 z 取 120、160、200 mm 时工作平面内的刚度。

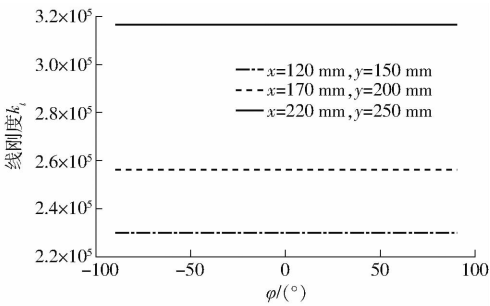


图 11 固定位置线刚度和角刚度随末端姿态的变化曲线

Fig. 11 Relationship between global stiffness in fixed position with ϕ

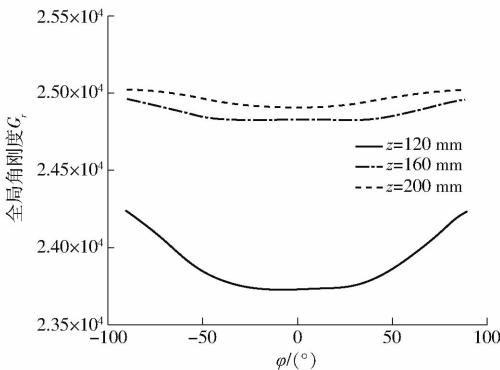
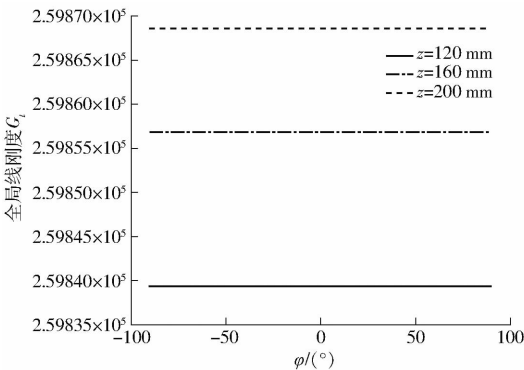


图 12 工作平面内线刚度与角刚度随末端姿态的变化曲线

Fig. 12 Relationship between global stiffness with ϕ

由图 12 可得,末端姿态变化时, xOy 工作平面内全局线刚度 G_l 几乎不变;但随着 z 向高度提升,全局线刚度 G_l 增加,这有利于机构的抓取操作。末端姿态变化时,工作平面内的全局角刚度变化较小, z 为 120、160、200 mm 时的变化范围分别为 $2.36 \times 10^4 \sim 2.43 \times 10^4$ 、 $2.48 \times 10^4 \sim 2.50 \times 10^4$ 、 $2.49 \times$

$10^4 \sim 2.51 \times 10^4$,刚度一致性较好。

4 结论

(1) 基于虚关节法和有限元分析建立了混联机构静刚度半解析模型,分析了典型位姿下的机构刚度,并对其进行了有限元仿真验证,所建模型可用于

机构结构参数的优化。

(2) 采用“分层”法分析了机构工作平面内的刚度分布, 得出机构刚度分布与支链布局以及机构移动输出的解耦特性有关。

(3) 分析了机构工作空间内无量纲线刚度和角

刚度分布。结果表明, 该机构的线刚度优于角刚度, 且随末端姿态角的变化不明显; 随着末端抓取高度的增加, 机构线刚度增大, 而角刚度保持不变。这些特性都有利于机构的抓取应用, 本研究可为该机构的结构优化和操作轨迹设计提供理论依据。

参 考 文 献

- [1] PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-dof parallel robots [C] // IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, Atlanta, GA, 1999: 508–513.
- [2] KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for Scara motions [J]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2003, 2(2): 1875–1880.
- [3] NABAT V, RODRIGUEZ M, COMPANY O, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems. Edmonton, Canada, 2005: 553–558.
- [4] ROLLAND L H. The Manta and the Kanuk: novel 4-DOF parallel mechanisms for industrial handling [C] // ASME Dynamic Systems and Control Division, IMECE'99 Conference, 1999: 831–844.
- [5] BRIOT S, BONEV I A. Pantopteron – 4: a new 3T1R decoupled parallel manipulator for pick-and-place applications [J]. Mechanism & Machine Theory, 2010, 45(5): 707–721.
- [6] 黄田, 赵学满, 梅江平, 等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构: 201220007884. X[P]. 2012–11–14.
- [7] 畅博彦, 李晓宁, 金国光, 等. 具有整周回转能力的 3T1R 并联机构运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(7): 406–416.
CHANG Boyan, LI Xiaoning, JIN Guoguang, et al. Kinematics analysis of novel 3T1R parallel manipulator with full rotational capability[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(7): 406–416. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20190745&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.07.045. (in Chinese)
- [8] 吴存存, 杨桂林, 陈庆盈, 等. 四自由度 2PPPaR 并联机构运动学及性能分析[J]. 机械工程学报, 2018, 54(3): 36–45.
WU Cuncun, YANG Guilin, CHEN Chinyin, et al. Kinematic and performance analysis of a 4-DOF 2PPPaR parallel manipulator [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(3): 36–45. (in Chinese)
- [9] 于靖军, 毕树生, 宗光华, 等. 3 自由度柔性微机器人的静刚度分析[J]. 机械工程学报, 2002, 38(4): 7–10.
YU Jinjun, BI Shusheng, ZONG Guanghua, et al. Analysis for the static stiffness of a 3DOF parallel compliant micromanipulator [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(4): 7–10. (in Chinese)
- [10] MARCO C, GIUSEPPE C. A stiffness analysis for CaPaMan (Cassino parallel manipulator) [J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5): 427–439.
- [11] BRIOT S, BONEV I A. Accuracy analysis of 3T1R fully-parallel robots [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(5): 695–706.
- [12] DONG W, SUN L, DU Z. Stiffness research on a high-precision, large-workspace parallel mechanism with compliant joints [J]. Precision Engineering, 2008, 32(3): 222–231.
- [13] GOSSELIN C M, ZHANG D. Stiffness analysis of parallel mechanisms using a lumped model [J]. Int. J. of Robotics and Automation, 2002, 17(1): 17–27.
- [14] PASHKEVICH A, CHABLAT D, WENGER P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(5): 966–982.
- [15] PASHKEVICH A, KLIMCHIK A, CHABLAT D. Stiffness analysis of parallel manipulators with preloaded passive joints [C] // Advances in Robot Kinematics: Motion in Man and Machine, 2010: 465–474.
- [16] AMIR R, ALIREZA A, MOHAMMAD R, et al. An investigation on stiffness of a 3 – PSP spatial parallel mechanism with flexible moving platform using invariant form [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 51: 195–216.
- [17] WU Guanglei, BAI Shaoping, KEPLER J A. Stiffness analysis and comparison of 3 – PPR planar parallel manipulators with actuation compliance [C] // ASME Biennial Conference on Engineering Systems Design & Analysis, 2012.
- [18] 吕帮俊, 彭利坤, 熊先鋒. 考虑构件弹性的电动 Stewart 并联机构刚度建模与仿真 [J]. 振动与冲击, 2013, 32(12): 135–139, 149.
LÜ Bangjun, PENG Likun, XIONG Xianfeng. Stiffness modeling and simulation for an electric Stewart parallel mechanism considering elasticity of components [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(12): 135–139, 149. (in Chinese)
- [19] ALEXANDR K, DAMIEN C, ANATOL P. Stiffness modeling for perfect and non-perfect parallel manipulators under internal and external loadings [J]. Mechanism and Machine Theory, 2014, 79: 1–28.
- [20] 张俊, 赵艳芹. Exechon 并联模块的静刚度建模与分析 [J]. 机械工程学报, 2016, 52(19): 34–41.
ZHANG Jun, ZHAO Yanqin. Stiffness modeling and evaluation for Exechon parallel kinematic machine module [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(19): 34–41. (in Chinese)
- [21] GORGULU I, CARBONE G, DEDE M I. Time efficient stiffness model computation for a parallel haptic mechanism via the virtual joint method [J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 143: 1–24.
- [22] 朱小蓉, 胡畅, 沈惠平, 等. 3T1R 并联机构降耦设计与分析 [J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(12): 393–401.
ZHU Xiaorong, HU Yang, SHEN Huiping, et al. Structure coupling reduction design and research on a novel 3T1R parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(12): 393–401. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20181247&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.12.047. (in Chinese)
- [23] KOVECES J, EBRHIMI S. Parameter analysis and normalization for the dynamics and design of multibody systems [J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2009, 4(3): 340–341.
- [24] WU Guanglei, BAI Shaoping, HJORN P. On the stiffness of three/four degree-of-freedom parallel pick-and-place robots with four identical limbs [C] // International Conference on Robotics and Automation (ICRA) Stockholm, 2016: 861–866.
- [25] 马致远. 高速并联抓拿机械手性能分析及优化设计 [D]. 常州: 常州大学, 2019.
MA Zhiyuan. Performance analysis and optimization design of high speed parallel grasping manipulator [D]. Changzhou: Changzhou University, 2019. (in Chinese)