

基于拓扑降耦的3T1R并联机构设计与运动学特性分析

沈惠平 顾晓阳 李 菊 邓嘉鸣
(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 根据基于方位特征方程(POC)的并联机构拓扑结构设计理论及方法,设计了一种低耦合度三平移一转动(3T1R)并联机构,对该机构进行了拓扑结构分析,包括方位特征、自由度及耦合度计算,该机构具有部分运动解耦性。但耦合度 $k=1$ 只能求得位置正解的数值解,不利于后续的尺度优化、误差分析及动力学分析,为此对其进行拓扑降耦优化设计,即在基本功能(DOF、POC)以及部分运动解耦性不变的情况下,使其耦合度 $k=0$ 并具有符号式位置正解。运用基于拓扑特征的运动学建模原理求解该优化机构的符号式位置正解,基于导出的雅可比矩阵进一步分析了机构发生奇异的条件,分别基于位置逆解和位置正解求解机构的工作空间,研究表明,基于位置正解的机构工作空间分析具有计算过程简单、计算精确、计算量少等优点。本研究为该机构后续的尺度优化、误差分析及动力学分析奠定了基础。

关键词: 并联机构; 耦合度; 拓扑降耦设计; 运动学分析

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2021)08-0406-10 OSID: 

Topological Coupling-reducing Based Design of 3T1R Parallel Mechanism and Kinematics Performances Analysis

SHEN Huiping GU Xiaoyang LI Ju DENG Jiaming
(Research Center of Advanced Mechanism, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: According to the theory and method of topological structure design of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristic (POC) equation, firstly, a low coupling parallel mechanism of three translation and one rotation (3T1R) was designed, and its topological structures were analyzed, including POC, degrees of freedom and coupling degree. It was shown that the PM had partial motion decoupling, but the coupling degree of the PM was one ($k=1$). That meant only the numerical solutions of direct position solution can be obtained, which was not conducive to the subsequent scale optimization, error analysis and dynamic analysis. Therefore, the topology decoupling optimization design was carried out, that was, the coupling degree $k=0$ and the symbolic direct position solution can be obtained under the condition that the basic functions (DOF, POC) and partial motion decoupling remained unchanged. Secondly, using the kinematics modeling principle based on topology characteristics, the symbolic direct position solution of the optimal mechanism was solved. Furthermore, based on the derived Jacobian, the conditions for singularity of the mechanism were analyzed. Finally, based on the inverse position solution and the direct position solution, the workspace of the mechanism was solved. It showed that the workspace analysis based on the direct position solution had the advantages of simple calculation process and less calculation amount. The work can lay a foundation for the subsequent scale optimization, error analysis and dynamic analysis of the mechanism.

Key words: parallel mechanism; coupling degree; topological coupling-reducing design; kinematic analysis

0 引言

并联机构(Parallel mechanism, PM)一般为多回路空间机构,回路间存在耦合性,这种耦合性给运动学、动力学分析和运动控制带来不便。因此,当机构具有符号式位置正解/具有运动解耦性时,其运动

学、动力学分析求解简单,且可简化控制和轨迹规划问题。

具有三平移—转动(3T1R)的并联机器人具有工作空间大、成本低等特点,在制造业中应用比较广泛。但其结构复杂、运动耦合性强,为此国内外学者对 3T1R 并联机构进行了新机型的设计、评估与优化。文献[1-3]设计了一类由定平台、4 条支链和双动平台组成的 SCARA 运动并联机构;文献[4-6]设计了 H4、Heli4、Par4 等系列四自由度 3T1R 并联操作手;文献[7-8]提出了 2 种具有 Schoenflies 运动的四自由度解耦并联机构;文献[9-11]对四自由度并联机构进行了运动学分析;杨桂林等^[12]提出一种 4PPa-2PaR 并联机构,并对其进行了优化;YANG 等^[13]基于有限螺旋理论提出一种 3T1R 变轴运动的并联翼型结构的递阶综合方法;杭鲁滨等^[14]设计了一种新型三平移—转动解耦并联机构;莫徽君等^[15]基于螺旋理论构建了一种新型四自由度完全解耦并联机构;赵铁石等^[16]提出一种空间 4-URU 并联机构;黄田等^[17]将移动副代替螺旋副设计了新型无装配间隙的并联机构;贾凯凯等^[18]提出一种具有空间 SCARA 运动的四自由度并联机构;赵铁石等^[19]基于螺旋理论提出一种混合型空间并联平台机构。

本文设计一种低耦合度($k=1$)的 3T1R 并联机构,在拓扑分析的基础上,根据机构降耦原理^[20-21]对该机构进行拓扑优化,得到耦合度为零、但基本功能(DOF、POC)及部分运动解耦性不变的优化机构,通过对该优化机构进行运动学分析(符号式位置正逆求解、奇异位置、工作空间),以期得到该优化机构的运动特性。

1 机构设计与拓扑分析

1.1 机构设计

根据基于方位特征(Position and orientation characteristic, POC)方程的并联机构拓扑设计方法^[22-23],设计的三平移—转动(3T1R)并联机构如图 1 所示。该机构由静平台 0、动平台 1 和 3 条支链(I、II、III)组成。

其中,支链 I 为混合支链(Hybrid single-open-chain, HSOC),包含由移动副 P_1 和 4 个转动副的平行四边形($R_{a1}-R_{b1}-R_{c1}-R_{d1}$)串联组成的运动平面分支,记作 P_1-P_a ;该分支的平动输出杆 2,又与移动副 P_2 及 2 个平行轴线的转动副 R_1 、转动副 R_2 串联组成的分支,即 $P_2 \parallel R_1 \parallel R_2$,构成一个平面机构;显然,该平面机构的输出杆 2 的输出运动为两维平移;进一步,在输出杆 2 上又串联 2 个平行轴线的转动

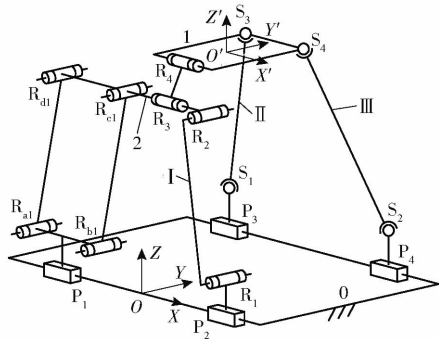


图 1 耦合度为 1 的三平移—转动并联机构

Fig. 1 Three-translation and one-rotational PM with coupling degree of 1

副 R_3 、 R_4 , 这样构成了混合支链 I, 转动副 R_4 再与动平台 1 相连。

易知,混合支链 I 末端构件(即动平台 1 的一部分)的 POC 集为三平移以及绕 R_4 轴线的一维转动。

但由于机构自由度为 4, 因此,再设计 2 条无约束支链,即取支链 II、III 分别为无约束支链 $P_3-S_1-P_4-S_2-S_3$ 、 $P_4-S_2-S_4$, 且移动副 P_3 、 P_4 共线,平行于 P_1 、 P_2 。

1.2 机构拓扑分析

1.2.1 方位特征(POC)计算

串、并联机构的 POC 方程为^[23-24]

$$M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (1)$$

其中

$$M_{bi} = \bigcup_{j=1}^m M_{ji} \quad (2)$$

式中 M_{ji} ——第 i 个运动副的 POC 集

M_{bi} ——第 i 条支链末端的 POC 集

M_{Pa} ——机构动平台的 POC 集

支链的拓扑结构为:混合支链 I(HSOC_I)由 1 条等效支链 $\{P_1-P_a\}$ 与支链 $\{P_2 \parallel R_1 \parallel R_2\}$ 形成子并联机构后,再串联 $\{R_3 \parallel R_4\}$ 组成。支链 II、III 的拓扑结构为:SOC_{II}: $\{P_3-S_1-S_3\}$ 、SOC_{III}: $\{P_4-S_2-S_4\}$ 。

子并联机构 POC 集由 P_1-P_a 分支、 $P_2 \parallel R_1 \parallel R_2$ 分支的 POC 作“交”运算而得,即由式(1)得

$$\begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix}$$

再串联 $\{R_3 \parallel R_4\}$ 后,由式(2)得 HSOC 的 POC 集为

$$M_I = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_4) \end{bmatrix}$$

由式(2)得支链 II、III 的 POC 集

$$M_{II,III} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

由式(1)得

$$M_{Pa} = \left[r^1 (\parallel R_4) \right] \cap \left[r^3 \right] \cap \left[t^3 \right] = \left[r^1 (\parallel R_4) \right]$$

因此,动平台 1 具有 3 个移动和 1 个转动(绕转动副 R_4 轴线)的运动输出特性。

1.2.2 自由度 (DOF) 计算

并联机构的通用 DOF 公式^[23-24]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \tag{3}$$

$$\xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\} \tag{4}$$

$v = m + n - 1$

式中 F ——机构自由度
 f_i ——第 i 个运动副的自由度
 m ——运动副数
 v ——独立回路数 n ——构件数
 ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数
 $\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ ——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集
 $M_{b(j+1)}$ ——前 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

由等效支链 $\{P_1 - P_a\}$ 和支链 $\{P_2 \parallel R_1 \parallel R_2\}$ 组成第 1 个平面回路(子并联机构),显然,其独立位移方程数 $\xi_{L1} = 3$ 。

由式(3)得由第 1 个回路构成的子并联机构的自由度

$$F_1 = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^1 \xi_{L_j} = 5 - 3 = 2$$

第 2 回路由上述子并联机构和支链 II 或 III 组成,如第 2 回路取为 $\{R_3 \parallel R_4 - S_3 - S_1 - P_3\}$,则第 3 个回路由支链 $\{P_4 - S_2 - S_4\}$ 组成,显然, $\xi_{L2} = \xi_{L3} = 6$ 。

由式(3)得该机构自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{L_j} = 5 + 8 + 6 - (3 + 6 + 6) = 4$$

因此,当取静平台 0 上的 4 个移动副 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 为主动副时,动平台 1 可实现 3 个移动和 1 个转动(绕转动副 R_4 轴线)的运动输出。

1.2.3 耦合度 κ 计算

由基于序单开链 SOC 单元的机构组成原理可知,任一机构可分解为一系列有序单开链,第 j 个 SOC _{j} 的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{5}$$

式中 m_j ——第 j 个 SOC _{j} 的运动副数
 f_i ——第 i 个运动副的自由度(不含局部自由度)

I_j ——第 j 个 SOC _{j} 的驱动副数

一组有序的 v 个 SOC 可分解为若干个最小的子运动链(Sub-kinematics chain, SKC),而 SKC 仅含 1 个零自由度的独立回路数为 v 的基本运动链(Basic kinematics chain, BKC)。

而 SKC 的耦合度为

$$\kappa = \Delta_j^+ = \Delta_j^- = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \tag{6}$$

式中, $\sum_{j=1}^v |\Delta_j|$ 表明 SKC 分解为 v 个 SOC(Δ_j),可有多种分配方案,取 $\sum |\Delta_j|$ 为最小者。1.2.2 节已计算出了 3 个回路的独立位移方程数,分别为 $\xi_{L1} = 3$, $\xi_{L2} = \xi_{L3} = 6$,由式(5)得,它们的约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 5 - 2 - 3 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 8 - 1 - 6 = 1$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 6 - 1 - 6 = -1$$

显然,由第 1 个回路构成第 1 个 SKC,即 SKC₁,由式(6)得其耦合度 $\kappa_1 = 0$,其位置可独立求解。

由第 2、3 个回路构成第 2 个 SKC,即 SKC₂,由式(6)得其耦合度 κ_2 为

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 |\Delta_j| = \frac{1}{2} (|-1| + |1| + |1|) = 1$$

这样,该机构包含 2 个 SKC,即 SKC₁、SKC₂,机构耦合度为 $\kappa = 1$ 。

因驱动副 P_1 、 P_2 位于 SKC₁,而驱动副 P_3 、 P_4 位于 SKC₂,因此,该机构具有部分运动解耦性。

同时表明,SKC₂ 的位置须由第 2、3 回路联立求解,即须在第 2 回路上设定 1 个虚拟变量,在第 3 回路上建立 1 个位置约束方程,可通过一维搜索法求出数值解。

但数值型位置正解,不利于该机构后续的尺度优化、误差分析及动力学分析,为此,对其进行拓扑降耦优化设计,即在基本功能(DOF、POC)以及部分运动解耦性不变的情况下,使其耦合度 $\kappa = 0$ 并具有符号式位置正解。

1.3 机构拓扑降耦设计和分析

根据并联机构拓扑降耦原理中的“动平台上转动副/球副的重合法”^[25],将动平台 1 上支链 II、III 中的球副 S_3 、 S_4 合并,这样,原 II、III 支链合并成为 1 条混合支链 II,它由 3 个球副和 2 个移动副

(3S-2P) 组成一个空间五杆机构, 再串联一个球副 S_4 组成, 即混合支链 II 通过 S_4 与动平台 1 相连, 得到拓扑优化机构如图 2 所示。

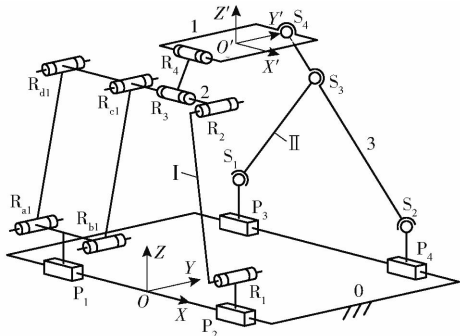


图 2 拓扑降耦后的零耦合度 3T1R 并联机构
Fig. 2 3T1R PM with zero coupling degree after topological coupling-reducing

拓扑降耦后, 动平台 1 一端 R_4 处的连接方式可采用两铰链同转动轴线的结构, 如图 3 所示。动平台 1 仍具有以 R_{41} 、 R_{42} 、 S_4 为 3 点的平面连接方式, 机构仍具有较好的稳定性; 同时, 拓扑降耦后, 该类机构的刚度会有提高^[21]。

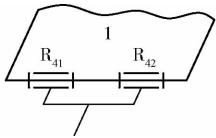


图 3 动平台 1 一端 R_4 处的连接方式

Fig. 3 Connection way of R_4 at end of moving platform 1

因该机构的 4 个驱动副均为移动副, 当导轨长度扩大时, 操作工作空间也会随之扩大, 即基于该机构的机器人操作手不仅适用于小范围内的三平移一转动 (如抓取、喷涂) 等精密操作 (当 4 个移动副取不同的速度时), 也能用于沿导轨方向的大范围内的一维移动 (如工件搬运、传输等) 运动输出 (当 4 个移动副取相同速度时), 因此, 具有潜在的应用前景。

现证明这种拓扑优化可使机构的基本功能 (POC、DOF) 不变, 但耦合度从 1 降为 0, 从而具有符号式位置正解, 且仍具有部分运动解耦性。

1.3.1 方位特征计算

可见, 拓扑降耦设计后, 混合支链 I 保持不变, 因此, 以下仅对混合支链 II 作 POC 分析。

显然, 空间五杆机构 (3S-2P) 末端的 POC 为两平移一转动 (绕 S_1S_2 连线), 而该转动产生一个沿平行于变边长 S_1S_2 的三角形平面 $S_1S_2S_3$ 法线的移动, 因此, 混合支链 II (HSOC₂) 的拓扑结构, 可等效表示为 HSOC₂ { (R-P-P) - S_4 }。显然, 由式 (2) 可得 POC 集为

$$M_{II} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$$

于是, 动平台 1 的 POC 集, 由式 (1) 得

$$M_{Pa} = M_I \cap M_{II} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \parallel (R_4) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \parallel (R_4) \end{bmatrix}$$

可见, 动平台 1 仍具有 3 个移动和 1 个转动 (绕转动副 R_4 轴线) 的运动输出特性。

1.3.2 自由度计算

第 1 个回路同前, 仍为 2-DOF 两平移并联机构, 其独立位移方程数 $\xi_{L1} = 3$ 。

如图 4 所示的 3S-2P 空间五杆机构中, S_1S_2 之间的距离在运动过程中会发生变化, 相当于存在 1 个虚拟的移动副 P_0 作用, 此外, 还存在 1 个绕这 2 个球副连线 S_1S_2 的转动自由度 $R'_{(S_1S_2)}$, 因此, 可把球副 S_1 、 S_2 、 S_3 视为 1 个变边长 S_1S_2 的整体三角形平面构件, 而 3-DOF 球副 S_3 的作用相当于转动轴线绕整体三角形 $S_1S_2S_3$ 平面法线的 1-DOF 转动副, 而这个整体三角形平面构件的姿态要由第 3 回路 (而不是第 2 回路) 确定。

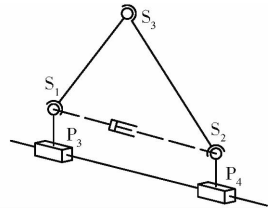


图 4 3S-2P 空间五杆机构

Fig. 4 3S-2P space five-bar mechanism

整体三角形平面构件转动 $R'_{(S_1S_2)}$ 的连线 S_1S_2 与动平台上的 R_4 副轴线平行时, 即使给定驱动副输入 P_3 与 P_4 , 动平台 1 的运动也不能完全确定。因此, P_3 与 P_4 所在的导轨应与 P_1 与 P_2 所在的导轨不平行; 反之, 应使 P_3S_1 与 P_4S_2 的长度取不同值。

显然, 实际上, 第 2 回路应为平面机构 { $P_3 - S_1 - P_0 - S_2 - P_4$ }, 其中, 3-DOF 球副 S_3 可用 1-DOF 转动副替代 (S_3 的其余 2 个 DOF 均为消极自由度); 而 3-DOF 球副 S_1 、 S_2 各相当于 2-DOF 的虎克铰, 即一个是绕三角形 $S_1S_2S_3$ 平面法线的转动; 另一个是绕连线 S_1S_2 的转动, 但它仅对第 3 回路有作用, 对第 2 回路来说, 它是局部自由度, 不应计入 (其余的 1 个 DOF 为消极自由度)。

第 2 回路的独立位移方程数为 $\xi_{L2} = 6$, 由式 (3) 可得其自由度为

$$F_{L2} = 8 - 6 = 2$$

第 3 回路由 $R_3 \parallel R_4 - S_4 - R'_{(S_1S_2)}$ 组成, 记为 { $R_3 \parallel R_4 - S_4 - R'_{(S_1S_2)}$ }, 显然, $\xi_{L3} = 6$ 。

由式 (3) 可得, 该机构自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{Lj} = 5 + 5 + 6 - (3 + 3 + 6) = 4$$

可见,机构的自由度仍为4。因此,当静平台0上的4个移动副 P_1 、 P_2 、 P_3 、 P_4 为主动副时,动平台1仍可实现3个移动和1个转动的运动输出。

1.3.3 耦合度计算

1.3.2节已计算出了3个回路的独立位移方程数,分别为 $\xi_{L1}=3$, $\xi_{L2}=\xi_{L3}=6$,由式(5)得,它们的约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 5 - 2 - 3 = 0$$
$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 9 + 2 - 3 - 2 - 6 = 0$$
$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L3} = 6 - 0 - 6 = 0$$

因此,上述3个回路分别构成该机构的3个SKC,即 SKC_1 、 SKC_2 、 SKC_3 ,它们耦合度分别为 $k_1=k_2=k_3=0$,因此,该机构的符号式位置正解,可依次通过3个SKC位置的独立求解而求出。

同时,因驱动副 P_1 、 P_2 位于 SKC_1 ,而驱动副 P_3 、 P_4 位于 SKC_2 ,因此,机构具有的部分运动解耦性不变。

2 拓扑优化机构位置分析

2.1 基于拓扑特征的机构位置正求解原理

由基于有序单开链的机构组成原理可知,机构可分解为若干个SKC,而每个SKC又可分解出约束度为正值、零、负值3种形式的单开链,因此,机构位置正解的求解,可转换为3种单开链回路的位置求解。对于本机构而言,3个SKC的耦合度均为零,即所有单开链的约束度为零,其运动具有确定性,即其位置正解能独立求出,因此,可直接求出其符号式解,从而求出整个机构的符号式位置正解。

2.2 机构坐标系建立和参数标注

建立机构的运动学模型如图5a所示,在静平台0上建立静坐标系 $OXYZ$,且点 O 位于移动副 P_1 、 P_2 所在导轨的中点, X 轴与导轨所在直线重合, Y 轴与导轨所在直线垂直, Z 轴由右手法则确定。

在动平台1上建立动坐标系 $O'X'Y'Z'$ 。 O' 位于直线 D_2C_4 的中点, X' 与直线 D_2C_4 垂直, Y' 沿着直线 D_2C_4 方向, Z' 由右手法则确定;动平台1的姿态角 γ 如图5b所示,即为 Z 轴正向和 Z' 轴正向之间的夹角。

该机构参数为:静平台0上两导轨之间的距离为 a_1 ,动平台 D_2C_4 的长度为 a_2 ,主动杆长 $A_1B_1=A_2B_2=A_4B_4=l_1$, $A_3B_3=l_7$;平行四边形 P_a 副短边长度为 $2l_2$,长边长度为 l_3 , C_1D_1 长度为 $2l_2$, C_2D_1 长度为 l_2 , D_1D_2 长度为 l_4 , B_4C_3 长度为 l_5 , C_3C_4 长度为 l_6 ,

B_3C_3 长度为 l_8 。

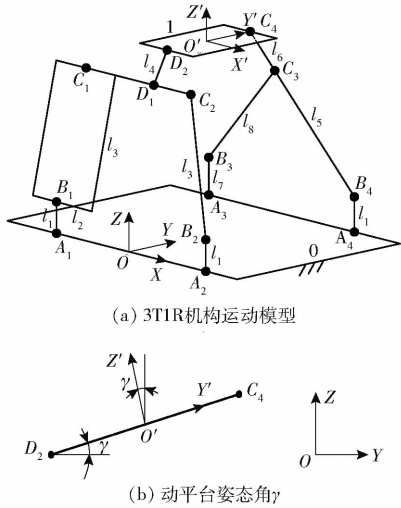


图5 3T1R机构的运动模型及参数标注

Fig.5 Kinematics model and parameters marking

设4个移动副与原点 O 在 X 轴方向上的距离分别为 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 ,并且为方便计算,将 B_4C_3 与 C_4C_3 的夹角设为 180° ,即点 B_3 、 C_3 、 C_4 在一条直线上。

2.3 机构正解求解

机构位置正解求解为:已知 h_1 、 h_2 、 h_3 、 h_4 ,求动平台 O' 位置 (x,y,z) 及姿态角 γ 。

2.3.1 SKC1的位置求解

图5的回路 $\{A_1-B_1-C_1-D_1-C_2-B_2-A_2\}$ (即第1回路 $\{P_1-P_a-R_2-R_1-P_2\}$)中,易知 $A_1=(h_1,0,0)$ 、 $A_2=(h_2,0,0)$ 、 $B_1=(h_1,0,l_1)$ 、 $B_2=(h_2,0,l_1)$ 。

由机构拓扑结构可知:在 X 轴方向上,有 $X_{D2}=X_{D1}=X_{C4}=x_0$ 。

由1.2节可知,第1回路的运动为 XOZ 平面内的两维平移,则 C_1 与 C_2 的坐标分别为 $C_1(X_{D1}-2l_2,0,Z_{D1})$ 、 $C_2(X_{D1}+l_2,0,Z_{D1})$ 。

由几何约束条件 $B_1C_1=B_2C_2=l_3$,并求得:当 $h_2-h_1 \neq 3l_2$ 时,点 D_1 的坐标为

$$\begin{cases} X_{D1} = \frac{h_1 + h_2 + l_2}{2} \\ Y_{D1} = 0 \\ Z_{D1} = l_1 + \sqrt{l_3^2 - \left(\frac{h_2 - h_1 - 3l_2}{2}\right)^2} \end{cases} \quad (7)$$

其中, Z_{D1} 舍去一值,因为会发生干涉。当 $h_2-h_1=3l_2$ 时,子并联机构发生奇异,失去 Z 轴方向的自由度,如图6所示。

2.3.2 SKC2、SKC3的位置求解

对 BKC_2 而言,即在第2回路 $\{P_3-S_1-P_o-S_2-P_4\}$ (在 $A_3-B_3-B_4-A_4$)中,易知 $A_3=(h_3,a_1,0)$; $A_4=(h_4,a_1,0)$; $B_3=(h_3,a_1,l_7)$; $B_4=(h_4,$

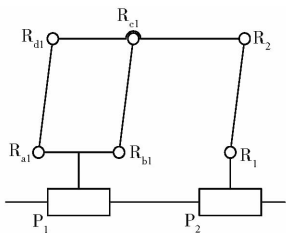


图 6 子机构发生奇异示意图

Fig. 6 Singularity position of sub-PM

a_1, l_1)。

由 2 个杆长约束条件 $B_3C_3 = l_8, B_4C_3 = l_5$, 解得

$$\begin{cases} X_{C_3} = (h_4 - X_{D_1}) \frac{l_6}{l_5 + l_6} + X_{D_1} \\ Y_{C_3} = a_1 \pm \sqrt{l_5^2 - (X_{C_3} - X_{B_3})^2 - (Z_{C_3} - Z_{B_3})^2} \\ Z_{C_3} = \frac{M}{N} \end{cases} \quad (8)$$

其中

$$N = 2(Z_{B_3} - Z_{B_4})$$

$$M = (X_{C_3} - X_{B_3})^2 - (X_{C_3} - X_{B_4})^2 + Z_{B_3}^2 - Z_{B_4}^2 + l_5^2 - l_8^2$$

由 B_4, C_3, C_4 在同一直线, 求得点 C_4 坐标为

$$\begin{cases} X_{C_4} = (X_{C_3} - X_{B_4}) \frac{l_5 + l_6}{l_5} + X_{B_4} = X_{D_1} \\ Y_{C_4} = (Y_{C_3} - Y_{B_4}) \frac{l_5 + l_6}{l_5} + Y_{B_4} \\ Z_{C_4} = (Z_{C_3} - Z_{B_4}) \frac{l_5 + l_6}{l_5} + Z_{B_4} \end{cases} \quad (9)$$

对 SKC₃ 而言, 即在第 3 回路由 $R_3 \parallel R_4 - S_4 - R'_{(S_1S_2)} (D_1 - D_2 - C_4)$ 中, 由 2 个杆长条件 $D_2C_4 = a_2, D_2D_1 = l_4$, 可得点 D_2 坐标为

$$\begin{cases} X_{D_2} = X_{D_1} \\ Y_{D_2} = \pm \sqrt{l_4^2 - (Z_{D_2} - Z_{D_1})^2} \\ Z_{D_2} = \frac{-J \pm \sqrt{J^2 - 4KL}}{2K} \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} J &= 4[G(Z_{D_1} - Z_{C_4}) - 2Y_{C_4}Z_{D_1}] \\ K &= 4[Y_{C_4}^2 + (Z_{D_1} - Z_{C_4})^2] \\ L &= G^2 - 4Y_{C_4}^2(l_4^2 - Z_{D_1}^2) \\ G &= l_4^2 - Z_{D_1}^2 + Y_{C_4}^2 + Z_{C_4}^2 - a_2^2 \end{aligned}$$

因此, 动平台上 O' 的坐标为

$$\begin{cases} x = X_{D_2} = X_{D_1} \\ y = \frac{Y_{D_2} + Y_{C_4}}{2} \\ z = \frac{Z_{D_2} + Z_{C_4}}{2} \end{cases} \quad (10)$$

此时, 转角 γ 为

$$\gamma = \arctan \frac{z - Z_{C_4}}{y - Y_{C_4}} \quad (11)$$

因此, 该机构具有输入-输出部分解耦性。

2.4 位置逆解求解

已知动平台 O' 的坐标 (x, y, z) 以及姿态角 γ , 求解驱动副的行程 h_1, h_2, h_3, h_4 。

易知 D_2 和 C_4 在动坐标系中的坐标分别为 $D_2 = (x, y - \frac{1}{2}a_2 \cos \gamma, z - \frac{1}{2}a_2 \sin \gamma), C_4 = (x, y + \frac{1}{2}a_2 \cos \gamma, z + \frac{1}{2}a_2 \sin \gamma)$ 。

由杆长约束 $D_2D_1 = l_4$ 可得

$$Z_{D_1} = z - \frac{1}{2}a_2 \sin \gamma \pm \sqrt{l_4^2 - \left(y - \frac{1}{2}a_2 \cos \gamma\right)^2}$$

因此, 点 C_1, C_2 的坐标分别为 $C_1(x - 2l_2, 0, Z_{D_1}), C_2(x + l_2, 0, Z_{D_1})$ 。

在 SKC₁ 中, 由 2 个杆长约束 $B_1C_1 = B_2C_2 = l_3$, 可求得移动副 P_1, P_2 的行程为

$$\begin{cases} h_1 = x - 2l_2 \pm \sqrt{l_3^2 - (Z_{D_1} - l_1)^2} \\ h_2 = x + l_2 \mp \sqrt{l_3^2 - (Z_{D_1} - l_1)^2} \end{cases} \quad (12)$$

在 BKC₂ 中, 易由点 C_4 的坐标、式 (9) 求得点 C_3 的坐标。

进一步, 由 2 个杆长约束 $B_3C_3 = l_8, B_4C_3 = l_5$, 可求得 P_3, P_4 的行程 h_3, h_4 分别为

$$\begin{cases} h_3 = TW + h_4 - \sqrt{l_8^2 - U^2W^2 - (VW + l_1 - l_7)^2} \\ h_4 = x \pm \frac{\sqrt{-U^2W^2 - V^2W^2 + l_5^2}}{W} \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{其中 } U = y + \frac{1}{2}a_2 \cos \gamma - a_1 \quad W = \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$V = z + \frac{1}{2}a_2 \sin \gamma - l_1 \quad T = x - h_4$$

2.5 正逆解验证

设并联机构结构参数为 $l_1 = 10 \text{ mm}, l_2 = 10 \text{ mm}, l_3 = 60 \text{ mm}, l_4 = 30 \text{ mm}, l_5 = 70 \text{ mm}, l_6 = 20 \text{ mm}, l_7 = 15 \text{ mm}, l_8 = 80 \text{ mm}, a_1 = 80 \text{ mm}, a_2 = 50 \text{ mm}$; 取 4 个移动副的输入值分别为 $h_1 = -55.42 \text{ mm}, h_2 = 35.42 \text{ mm}, h_3 = -49.46 \text{ mm}, h_4 = 19.01 \text{ mm}$

将上述参数代入式 (7) ~ (11), 求得机构正解数值如表 1 所示。

表 1 机构正解数值

Tab. 1 Direct solution value of mechanism

序号	x/mm	y/mm	z/mm	$\gamma/(\circ)$
1	-5.000	9.866	90.048	4.907
2	-5.000	-9.866	90.048	3.519

将表 1 序号 1 数据代入式 (12)、(13), 可得 4 组逆解, 如表 2 所示。

表 2 机构逆解数值

Tab.2 Inverse solution value of mechanism mm				
序号	h_1	h_2	h_3	h_4
1	-55.420	35.420	-49.460	19.010
2	55.520	35.420	-49.460	19.010
3	55.420	35.420	-60.131	-29.010
4	55.420	35.420	49.460	-29.010

易知,表 2 中的第 1 组数据与机构设定的 4 个输入值一致,故验证了机构正逆解公式的正确性。

3 奇异位置分析

3.1 奇异性分析原理

分别对 SKC₁ 中的 2 个杆长约束方程 $B_1C_1 = B_2C_2 = l_3$, 以及 SKC₂ 中的 2 个杆长约束方程 $B_3C_3 = l_8, B_4C_3 = l_5$, 同时对时间求导, 得到该机构的输出速度 $\boldsymbol{v} = [\dot{x} \ \dot{y} \ \dot{z} \ \dot{\gamma}]^T$ 与主动副输入速度 $\boldsymbol{w} = [\dot{h}_1 \ \dot{h}_2 \ \dot{h}_3 \ \dot{h}_4]^T$ 之间的关系为

$$\boldsymbol{J}_p \boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_q \boldsymbol{w} \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{J}_q = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & u_{33} & u_{34} \\ & & & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = -2(X_{C_1} - X_{B_1})$$
$$u_{22} = -2(X_{C_2} - X_{B_2})$$
$$u_{33} = -2(X_{C_3} - X_{B_3})$$

$$u_{34} = 2(X_{C_3} - X_{B_3}) \frac{l_6}{l_5 + l_6}$$

$$u_{44} = -2(X_{C_3} - X_{B_4}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{11} = 2(X_{C_1} - X_{B_1})$$
$$f_{12} = \frac{(Z_{C_1} - Z_{B_1})(-2y + a_2 \cos \gamma)}{\sqrt{l_4^2 - (y - 0.5a_2 \cos \gamma)^2}}$$
$$f_{13} = 2(Z_{C_1} - Z_{B_1})$$
$$f_{14} = 2(Z_{C_1} - Z_{B_1}) \cdot$$

$$\left[-\frac{1}{2}a_2 \cos \gamma - \frac{a_2 y \sin \gamma - 0.5a_2^2 \cos \gamma \sin \gamma}{\sqrt{l_4^2 - (y - 0.5a_2 \cos \gamma)^2}} \right]$$
$$f_{21} = 2(X_{C_2} - X_{B_2})$$
$$f_{22} = \frac{(Z_{C_2} - Z_{B_2})(-2y + a_2 \cos \gamma)}{\sqrt{l_4^2 - (y - 0.5a_2 \cos \gamma)^2}}$$
$$f_{23} = 2(Z_{C_2} - Z_{B_2})$$

$$f_{24} = 2(Z_{C_2} - Z_{B_2}) \left[-\frac{1}{2}a_2 \cos \gamma - \frac{y - 0.5a_2^2 \cos \gamma \sin \gamma}{2\sqrt{l_4^2 - (y - 0.5a_2 \cos \gamma)^2}} \right]$$

$$f_{31} = 2(X_{C_3} - X_{B_3}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{32} = 2(Y_{C_3} - Y_{B_3}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{33} = 2(Z_{C_3} - Z_{B_3}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{34} = -a_2 \sin \gamma (Y_{C_3} - Y_{B_3}) \frac{l_5}{l_5 + l_6} +$$

$$a_2 \cos \gamma (Z_{C_3} - Z_{B_3}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{41} = 2(X_{C_3} - X_{B_4}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{42} = 2(Y_{C_3} - Y_{B_4}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{43} = 2(Z_{C_3} - Z_{B_4}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

$$f_{44} = -a_2 \sin \gamma (Y_{C_3} - Y_{B_4}) \frac{l_5}{l_5 + l_6} +$$

$$a_2 \cos \gamma (Z_{C_3} - Z_{B_4}) \frac{l_5}{l_5 + l_6}$$

3.2 奇异性分析

当机构发生输入奇异时,机构的执行构件将失去某一方向的运动能力,一般发生此种情况是因为某个运动链达到了工作空间的边界。

此时, $\det(\boldsymbol{J}_q) = 0$, 从而得到矩阵 $\boldsymbol{J}_q$ 的行列式解的集合为

$$\boldsymbol{w} = \{w_1 \cup w_2 \cup w_3 \cup w_4\}$$

其中, $w_i = \{X_{C_i} = X_{B_i}\} (i = 1, 2, 3, 4)$, 即点 C_i 与点 B_i 的 X 轴坐标相等; 满足条件 w_1 的三维 CAD 构型如图 7 所示。

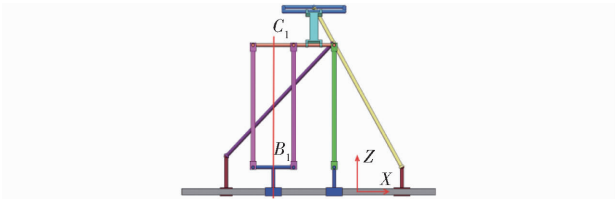


图 7 输入奇异位置

Fig.7 Input singular position

当 $\det(\boldsymbol{J}_p) = 0$ 时,机构发生输出奇异,此时,当所有的主动件锁住时,机构仍可以产生局部运动,从而使输出产生不确定性。设

$$\boldsymbol{J}_p = [e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4]$$

为使 $\det(\boldsymbol{J}_p) = 0$, 则有以下 3 种情况:

(1) 存在 2 个向量线性相关

设 $k\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ (即 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 线性相关), 即满足 $k[f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{14}] = [f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{24}]$, 则能求出 $\frac{X_{C_1} - X_{B_1}}{Z_{C_1} - Z_{B_1}} = \frac{X_{C_2} - X_{B_2}}{Z_{C_2} - Z_{B_2}}$

即当 $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ 时, 表示 2 个向量线性相关, 其中一位形如图 8 所示。

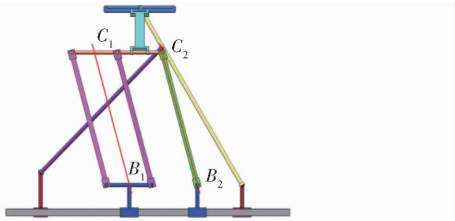


图 8 输出奇异位置
Fig. 8 Output singular position

(2) 存在 3 个向量线性相关

设 $\mathbf{e}_3 = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2$, 此时有 $[f_{31} \ f_{32} \ f_{33} \ f_{34}] = k_1[f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{14}] + k_2[f_{21} \ f_{22} \ f_{23} \ f_{24}]$

通过 Matlab 计算表明, 该种情况下, k_1 、 k_2 无法算出, 因此, 此种情况不存在。

(3) 综合奇异

此时, $\det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_p) = 0$, 即输入奇异和输出奇异同时发生。这种奇异位形只有当上述第一、二类奇异同时发生时才会产生, 此时, 机构将失去原有的运动特性。

上述奇异性的分析, 有利于样机调试时易于避开奇异位置, 并进行轨迹规划与运动控制。

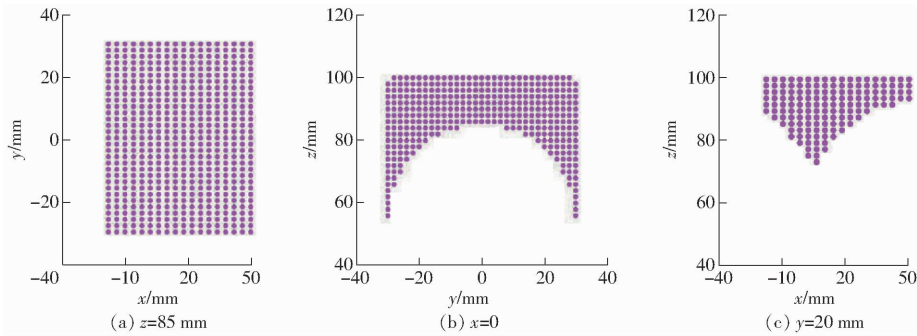


图 10 工作空间的平面投影
Fig. 10 Section projection of workspace

4.2 基于符号式位置正解的工作空间

因该优化机构具有符号式位置正解, 可直接采用位置正解来计算工作空间, 计算量更少、计算更准确。因此, 对正解式(7)~(11), 用 Matlab 软件编程, 直接求得该机构的工作空间, 如图 11 所示。

取相同参数, 其在 xoy 、 $yozy$ 、 xoz 平面上的投影, 如图 12 所示。

4 机构工作空间分析

并联机构的可达工作空间是指在考虑运动副转角范围、杆长不干涉情况下末端执行器的工作区域, 它是衡量并联机器人性能的一个重要指标。目前, 绝大多数学者基于位置逆解进行工作空间分析, 该方法编程复杂、计算量大。本文提出基于符号式位置正解的工作空间分析方法, 该方法计算简易、计算量小。

4.1 基于位置逆解的工作空间

基于极限边界搜索法的机构工作空间分析方法是: 首先, 根据杆长及大致的运动范围, 估计设定包含工作空间在内的一个搜索范围(略大于杆件的活动范围即可)。

本文取 $-50 \text{ mm} \leq x \leq 50 \text{ mm}$ 、 $-50 \text{ mm} \leq y \leq 50 \text{ mm}$ 、 $30 \text{ mm} \leq z \leq 130 \text{ mm}$; 然后, 对逆解式(12)、(13), 用 Matlab 软件编程, 得到该机构的三维工作空间, 如图 9 所示。

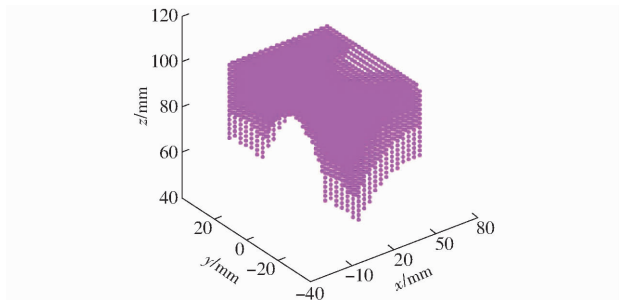


图 9 基于逆解的工作空间
Fig. 9 Inverse solutions-based workspace

其在 xoy 、 $yozy$ 、 xoz 平面上的投影, 如图 10 所示。

4.3 工作空间分析

由图 9、11 可知, 用 2 种方法求得的工作空间一致; 同一参量的(z, x, y)下, 所对应的工作空间截面(xoy 、 $yozy$ 、 xoz)大小基本相同。

用位置正解公式计算工作空间, 较简单, 计算量减少大约 50%。

随着 x 轴向变化, 工作空间变得越来越小, 工作空间对于 y 轴的对称性较好。

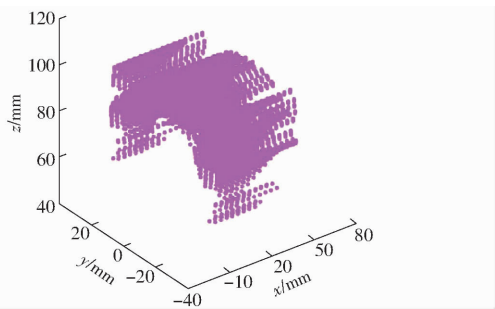


图 11 基于正解的工作空间

Fig. 11 Direct solutions-based workspace

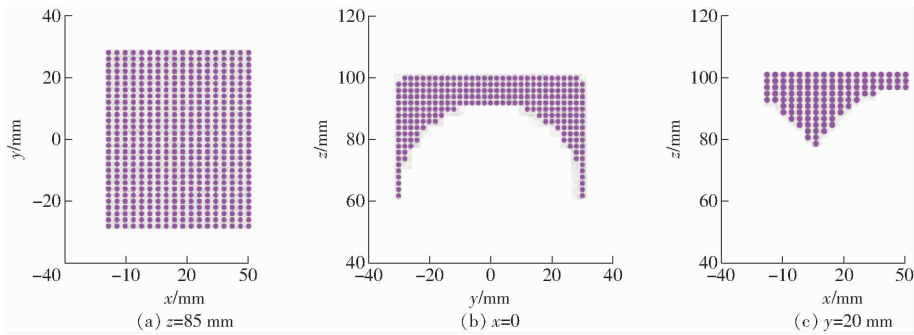


图 12 正解工作空间的平面投影

Fig. 12 Section projection of positive solution workspace

立了该优化机构位置正解的求解模型,求解出其符号式的位置正解。

(3)基于导出的雅可比矩阵分析了该机构的奇异性,同时采用基于位置逆解、位置正解两种方法进行工作空间分析,研究表明,该机构的工作空间对称

5 结论

(1)3T1R 并联机构仅由移动副和转动副组成,有利于制造和安装;该机构耦合度 $k=0$,具有正向位置符号解,有利于误差分析、尺度综合、刚度分析及动力学研究等;该机构具有部分输入-输出运动解耦性,有利于机构的轨迹规划及运动控制;该机构操作工作空间大。

(2)利用基于拓扑特征的运动学建模原理,建

性好,且工作空间较大。

(4)对具有符号式位置正解的并联机构宜直接采用位置正解计算工作空间,这样计算量更少、计算更为精确。

参 考 文 献

[1] PIERROT F, NABAT V, COMPANY O, et al. Optimal design of a 4 - DOF parallel manipulator; from academia to industry [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2009, 25(2): 213 - 224.

[2] LI Y H, MA Y, LIU S T, et al. Integrated design of a 4 - DOF high-speed pick-and-place parallel robot[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2014, 63(1): 185 - 188.

[3] LIU S T, HUANG T, MEI J P, et al. Optimal design of a 4 - DOF SCARA type parallel robot using dynamic performance indices and angular constrains[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2012, 4(3): 031005 - 1 - 031005 - 10.

[4] PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4 - DOF parallel robots[C]// Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999: 508 - 513.

[5] KRUT S, COMPANY O, NABAT V, et al. Heli4: a parallel robot for SCARA motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C]// Proceedings of International Conference on Intelligence Robots and Systems, International Conference Center, New York: IEEE, 2006: 1656 - 1661.

[6] NABAT V, COMPANY O, KRUT S, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place[C]// Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005: 1202 - 1207.

[7] SEBASTIEN B, ILIAN A B. Pantoptern - 4: a new 3T1R decoupled parallel manipulator for pick-and-place application[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(5): 707 - 721.

[8] MARCO C. Fully isotropic four-degrees-of-freedom parallel mechanisms for Schoenflies motion[J]. The International Journal of Robotics Research, 2005, 24(5): 397 - 414.

[9] 张国兴,郭金伟,侯雨雷,等. 四自由度混联天线机构静力学及运动特性仿真与设计[J/OL]. 农业机械学报, 2021, 52(1): 418 - 426.

ZHANG Guoxing, GUO Jinwei, HOU Yulei, et al. Statics and kinematic characteristics simulation of 4 - DOF hybrid antenna mechanism for design[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(1): 418 - 426. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20210147&flag=1. DOI: 10. 6041/j. issn. 1000-1298. 2021. 01. 047. (in Chinese)

[10] 畅博彦,李晓宁,金国光,等. 具有整周回转能力的 3T1R 并联机构运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(7):

- 406 – 416.
- CHANG Boyan, LI Xiaoning, JIN Guoguang, et al. Kinematics analysis of novel 3T1R parallel manipulator with full rotational capability[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(7): 406 – 416. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20190745&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.07.045. (in Chinese)
- [11] 沈惠平, 许正晓, 许可, 等. 零耦合度且部分解耦的 3T1R 并联机构设计与运动分析[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 382 – 392.
- SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and kinematic analysis of zero coupling and partially decoupled 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 382 – 392. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20190444&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.04.044. (in Chinese)
- [12] 杨桂林, 吴存存, 陈庆盈, 等. 3T1R 并联机构运动学分析与优化设计[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(12): 386 – 394, 420.
- YANG Guilin, WU Cuncun, CHEN Chinyin, et al. Kinematics analysis and design optimization of novel 3T1R parallel manipulator[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12): 386 – 394, 420. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20171248&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.12.048. (in Chinese)
- [13] YANG S F, SUN T, HUANG T. Type synthesis of parallel mechanisms having 3T1R motion with variable rotational axis[J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 109: 220 – 230.
- [14] 杭鲁滨, 王彦, 杨廷力. 一种新型三平移—转动解耦并联机构分析[J]. 中国机械工程, 2004, 15(12): 3 – 5, 9.
- HANG Lubin, WANG Yan, YANG Tingli. Analysis of a new type 3 translations-1 rotation decoupled parallel manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(12): 3 – 5, 9. (in Chinese)
- [15] 莫徽君, 徐夏民, 杨廷力. 一种新型四自由度并联机器人机构分析[J]. 机械设计与制造, 2016(8): 182 – 185.
- MO Huijun, XU Xiamin, YANG Tingli. Design and analysis of a novel four-DOF parallel mechanism[J]. Machinery Design and Manufacture, 2016(8): 182 – 185. (in Chinese)
- [16] 赵铁石, 黄真. 一种新型四自由度并联平台机构及其位置分析[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(6): 927 – 929.
- ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. A novel spatial four DOF parallel mechanism and its position analysis[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2000, 19(6): 927 – 929. (in Chinese)
- [17] 黄田, 汪满新, 刘松涛, 等. 一种具有三维平移—一维转动的并联机构: 201020687777.7[P]. 2011-07-27.
- [18] 贾凯凯, 梅江平, 刘松涛, 等. 4 自由度并联机构刚体动力学模型[J]. 机械工程学报, 2016, 52(13): 10 – 16.
- JIA Kaikai, MEI Jiangping, LIU Songtao, et al. Rigid-body dynamic model of a four-DOF parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(13): 10 – 16. (in Chinese)
- [19] 赵铁石, 高英杰, 杨铁林, 等. 混合型四自由度并联平台机构即其位置分析[J]. 光学精密工程, 2000, 1(8): 42 – 45.
- [20] 沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23): 102 – 113.
- SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102 – 113. (in Chinese)
- [21] 许正晓. 三平移—转动并联操作手的设计与分析[D]. 常州: 常州大学, 2019.
- XU Zhengxiao. Design and analysis of parallel manipulator with three translations and one rotation[D]. Changzhou: Changzhou University, 2019. (in Chinese)
- [22] 朱小蓉, 胡旻, 沈惠平, 等. 3T1R 并联机构降耦设计与分析[J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(12): 393 – 401.
- ZHU Xiaorong, HU Yang, SHEN Huiping, et al. Design and analysis of structure coupling reduction on novel 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(12): 393 – 401. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20181247&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.12.047. (in Chinese)
- [23] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑机构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [24] YANG T L, LIU A, SHEN H, et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Singapore: Springer, 2018.
- [25] 沈惠平, 熊坤, 孟庆梅, 等. 并联机构运动解耦设计方法与应用研究[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 348 – 356.
- SHEN Huiping, XIONG Kun, MENG Qingmei, et al. Design methods for kinematic decoupled parallel mechanisms and its applications[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 348 – 356. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20160646&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.046. (in Chinese)