

1T2R 并联机构拓扑降耦设计与运动性能分析

沈惠平 王 达 李 菊 孟庆梅

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要: 根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑结构设计理论与方法,设计了一种能实现一平移两转动(1T2R)的并联机构,分析了该机构的方位特征(POC)、自由度(DOF)及耦合度(κ)等主要拓扑特性。由于该机构仅含1个耦合度 $\kappa=1$ 的子运动链(SKC),得不到符号式位置正解,为此对其进行拓扑降耦设计,得到了零耦合度($\kappa=0$)、具有符号式位置正解、但 POC/DOF 保持不变的 1T2R 并联机构,并推导出其符号式位置正解和位置反解,基于雅可比矩阵对机构的奇异性进行了分析,基于符号式位置正解对机构的工作空间进行了计算分析。基于符号式位置正解的工作空间计算方法具有无需预估工作空间范围、计算量少、工作空间边界计算精确等优点。

关键词: 并联机构; 耦合度; 符号式解; 工作空间; 奇异性

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2021)05-0370-08 OSID: 

Topological Coupling-reducing Design and Kinematic Performance Analysis for 1T2R Parallel Mechanism

SHEN Huiping WANG Da LI Ju MENG Qingmei

(Research Center for Advanced Mechanism Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

Abstract: According to the topology design theory and method of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristic (POC) equations, a PM which can realize one-translation and two-rotation (1T2R) was designed. The main topological characteristics of the PM, such as POC, degree of freedom (DOF) and coupling degree (κ) were analyzed. It was shown that the PM contained only one sub-kinematic chain (SKC) and its coupling degree was one, but its symbolic direct position solutions could not be obtained. Only the numerical methods could be used to solve its numerical direct position solutions. Therefore, the topology coupling-reducing design was carried out to obtain the 1T2R PM with zero coupling degree, symbolic direct position solutions but constant POC and DOF, because zero coupling degree would benefit the subsequent error analysis, trajectory planning, motion control and dynamic analysis of the PM. Both the symbolic direct position solutions and inverse solutions were derived, and the correctness of them were proved by example. The singularities of the PM were analyzed based on the Jacobian matrix, and some cases of the singular positions of the PM were given by the graphs. Based on symbolic direct position solutions, the workspace of the PM was calculated and analyzed, which was consistent with that obtained by the inverse position solutions. At the same time, it showed that the workspace of the PM was large and the shape was regular. It was found that the workspace based on symbolic direct position solutions had the advantages of less computation and accurate boundaries.

Key words: parallel mechanism; coupling degree; symbolic position solution; workspace; singularity

0 引言

三自由度的一平移两转动(1T2R)并联机构具有制造方便、灵活性好、精度易保证等优点,目前仍

是国内外学者的研究热点之一。SONG 等^[1]运用基于共形几何代数的型综合方法,综合了一类一平移两转动(1T2R)并联机构;汪满新等^[2]研究了基于 UP 和 UPR-SPR 型等效运动的 1T2R 并联机构的

拓扑综合方法;房立丰等^[3]以一平移两转动并联稳定平台为例,研究了少自由度并联稳定平台拓扑结构设计方法;ENRIQUE 等^[4]对 3-CUP 的 1T2R 并联机构进行了运动学分析;HUSSEIN 等^[5]对 3-CRC 的 1T2R 并联机构进行了运动学分析;SUNG 等^[6]对具有封闭型正解的 1T2R 并联机构进行了运动学分析;SUN 等^[7]研究了含有限运动与寄生运动的并联机构拓扑综合问题;CHEN 等^[8]研究了无寄生运动的 3-PRRU 的 1T2R 并联机器人的动力学建模和性能;GAN 等^[9]提出基于可重构原理可在 一 平移两转动(1T2R)运动与纯旋转(3R)两种工作运动模式之间实现可重构性;ALI 等^[10]利用高速艇的运动模拟器(HSB),提出了一种新型的 1T2R 并联机构;SAIOA 等^[11-12]分析了 2-PRU+1-PRS 的 1T2R 并联机构的运动学、奇异性和动力学问题;JOSÉ 等^[13]对具有实时力/位置控制的 1T2R 型康复医疗并联机器人进行了模拟实验;XIE 等^[14]提出基于 1T2R 并联机构的两种新型铰接刀头,以用作模块化加工单元;车林仙等^[15]采用智能算法求解了一 平移两转动 2-PUR+1-PSR 并联机构的尺度参数优化设计问题;CHONG 等^[16]研究了 3-RCU 的 1T2R 并联机构的运动学优化问题。LIU 等^[17]研究了具有解析解的 1T2R 并联机构的类型综合。

求解并联机构的位置正解一般采用数值法和解析法,但较少考虑机构拓扑特性与运动学性能之间的关系。沈惠平等^[18]提出按耦合度 κ 分类求解并联机构位置正解的方法,对 κ 为 0 的并联机构直接求解其符号式位置正解,对 κ 不为 0 的并联机构可用数值法求解其位置正解。文献[19-23]提出低耦合度(或零耦合度)且具有运动解耦性的少自由度并联机构,并求解了其符号式位置正反解,分析了机构运动学性能。

本文根据基于方位特征(Position and orientation characteristic,POC)方程的并联机构拓扑设计理论^[24],设计一种一平移两转动并联机构,因该机构耦合度为 1,得不到符号式位置正解,故对其进行降耦优化设计^[25],得到一种零耦合度的一平移两转动并联机构,并对其符号式位置正反解、奇异位形及其工作空间进行计算和分析。

1 机构设计及拓扑分析

1.1 机构设计

1.1.1 POC 集计算

机构 POC 方程^[24]为

$$M_{bi} = \bigcup_{i=1}^m M_{ji} \quad (1)$$

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中 M_{ji} ——第 i 个运动副的 POC 集
 M_{bi} ——第 i 条支链末端的 POC 集
 M_{pa} ——机构动平台的 POC 集

1.1.2 支链设计

待设计并联机构 POC 集为 $M_{pa} = \begin{bmatrix} t^1 \\ r^2 \end{bmatrix}$,其自由度为 3,其设计步骤如下:

(1) 支链 POC 集确定

支链末端满足 M_{pa} 的 POC 集 M_{bi} 可取为

$$M_{bi} = \left\{ \begin{bmatrix} t^1 \\ r^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^1 \\ r^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^2 \\ r^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^2 \\ r^3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right\}$$

(2) 支链数目确定

一般情况下,支链数目应该等于并联机构自由度数,故设计该机构支链数目为 3。

(3) 支链拓扑结构综合

每条支链可有 1 个驱动副,为实现动平台长距离的移动,故设计每条支链的驱动副为 P 副,并在平行的导轨上。

第 I 条支链可设计为方位特征支链^[25],即其末端构件的 POC 集为动平台的 M_{pa} ,即在满足第 I 条支链能实现一平移两转动的同时,尽可能使其拓扑结构简单。由式(2)可知,在 P 副的基础上串联 2 个轴线垂直的 R 副,故第 I 条支链的拓扑结构可设计为

$$SOC_I: \{P \perp R \perp R\}$$

第 II、III 条支链可设计为拓扑结构相同的无约束支链,即其末端构件 POC 集为 $\begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix}$,即

$$SOC_i: \{P-S-S\} \quad (i=II,III)$$

1.1.3 机构构成

根据支链的几何布置规则,设计的一平移两转动(1T2R)并联机构如图 1 所示,该机构由动平台 1、静平台 0,以及 3 条支链(I、II、III)构成。I 支链为方位特征支链 $P_{31} \perp R_{32} \perp R_{33}$, P_{31} 轴线与 P_{11} 轴线平行, R_{32} 轴线始终与静平台 0 平面平行;II、III 支链均为 $P_{i1}-S_{i2}-S_{i3}$ ($i=1,2$) 无约束支链,其移动副 P_{11} 和 P_{21} 轴线共线。

1.2 机构拓扑分析

1.2.1 机构 POC 集验证

(1) 支链拓扑结构分别为

$$SOC_I: \{P_{31} \perp R_{32} \perp R_{33}\}$$

$$SOC_{II}: \{P_{11}-S_{12}-S_{13}\}$$

$$SOC_{III}: \{P_{21}-S_{22}-S_{23}\}$$

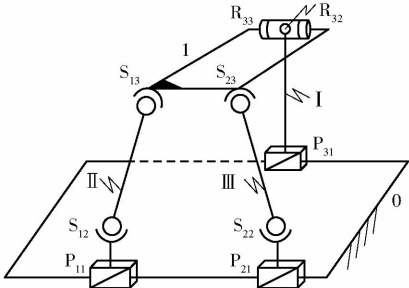


图 1 1T2R 并联机构

Fig. 1 Schematic of 1T2R PM

(2)选取动平台 1 上任一点为基点 O' 。

(3)确定支链末端构件的 POC 集。

由式(1)、(2)得支链末端构件 POC 集分别为

$$M_{bI} = \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^0 \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_{32}) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^0 \\ r^1(\parallel R_{33}) \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right]$$
$$M_{bII} = M_{bIII} = \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right]$$

(4)确定动平台的 POC 集,由式(2)得

$$M_{pa} = M_{bI} \cap M_{bII} \cap M_{bIII} = \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right]$$

因此,动平台 1 具有沿 P_{31} 轴线一维平移以及绕转动副 R_{32} 和 R_{33} 轴线两维转动的输出特性。

1.2.2 机构自由度

并联机构全周 DOF 公式^[24]为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{Lj} \tag{3}$$

其中 $\xi_{Lj} = \dim. \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\}$ (4)

$v = m - n + 1$

式中 F ——机构自由度

f_i ——第 i 个运动副的自由度

m ——运动副数

v ——独立回路数 n ——构件数

ξ_{Lj} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ ——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集

$M_{b(j+1)}$ ——前 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

由第 I、II 支链构成的第 1 回路(即子并联机构)的独立位移方程数为

$$\xi_{L1} = \dim. \left\{ \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] \right\} = 6$$

该子并联机构自由度为

$$F_{(I-II)} = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 6 + 3 - 6 = 3$$

该子并联机构的 POC 集为

$$M_{pa(I-II)} = M_{bI} \cap M_{bII} = \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right] \cap \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right]$$

由上述子并联机构和支链 III 构成第 2 回路的独立位移方程数为

$$\xi_{L2} = \dim. \left\{ \left[\begin{matrix} t^1(\parallel P_{31}) \\ r^2(\parallel \diamond(R_{32}, R_{33})) \end{matrix} \right] \cup \left[\begin{matrix} t^3 \\ r^3 \end{matrix} \right] \right\} = 6$$

机构自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^2 \xi_{Lj} = 9 + 6 - (6 + 6) = 3$$

故当取静平台 0 的 3 个移动副 P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 为驱动副时,动平台 1 可实现沿 P_{31} 轴线的一维平移以及绕转动副 R_{32} 和 R_{33} 轴线的两维转动。

1.2.3 机构耦合度

由基于序单开链^[24](Single-open-chain, SOC)的机构组成原理可知,任一机构可分解为约束度为正、零、负的 3 种有序单开链(SOC),第 j 个 SOC _{j} 的约束度定义为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{Lj} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = 1, 2, 3 \end{cases} \tag{5}$$

式中 m_j ——第 j 个 SOC _{j} 的运动副数

I_j ——第 j 个 SOC _{j} 的驱动副数

进一步,一组有序的 v 个 SOC 可组成 1 个独立回路数为 v 的(最小)子运动链^[24](Sub-kinematics chain, SKC),SKC 耦合度为

$$k = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \tag{6}$$

SKC 分解为 v 个 SOC(Δ_j),可有多种分配方案,

取 $\sum_{j=1}^v |\Delta_j|$ 为最小者。

在 1.2.2 节,已计算出 2 个回路的独立位移方程数,即 $\xi_{L1} = 6, \xi_{L2} = 6$ 。因此,由式(5)可得,它们的约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 9 - 2 - 6 = 1$$
$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 - 1 - 6 = -1$$

显然,由第 1、2 回路构成 1 个 SKC,由式(6)得,该 SKC 耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^v |\Delta_j| = \frac{1}{2} \times (1 + |-1|) = 1$$

即该机构只包含 1 个 SKC,其耦合度 $\kappa = 1$,表明在位置正解求解时,需要在约束度为正值($\Delta_1 = 1$)的回路上设置 1 个虚拟变量,而在约束度为负值($\Delta_2 = -1$)的回路上,建立 1 个含该虚拟变量的约束方程,可用一维搜索法求其数值型位置正解;但数值型位置正解不利于后续的误差分析、轨迹规划和运动控制,以及动力学分析。

因此,可对该机构进行拓扑降耦设计,以使该机构在保持基本功能(DOF、POC)不变的情况下,具有符号式位置正解。

1.3 机构降耦设计及其拓扑分析

根据机构拓扑降耦设计方法^[25]中的“转动副/球副重合法”,将图 1 所示机构中支链 II、III 中的球副 S_{13} 、 S_{23} 合并,但考虑双重球副制造的不方便性,可将 S_{13} 移至支链 III 上,得到的改进机构如图 2 所示,即可保持机构基本功能(DOF、POC)不变,而使其耦合度从 1 降到 0。

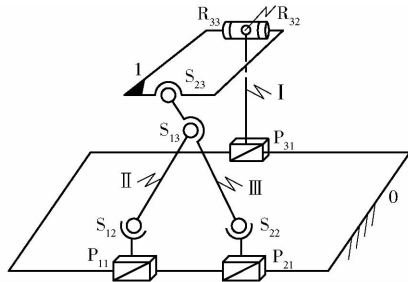


图 2 降耦后 1T2R 并联机构简图

Fig. 2 Schematic of 1T2R PM after decoupling reduction

此时,支链 II、III 组合成为一复杂支链(子并联机构),可知,其仍为无约束支链;同时,方位特征支链 I 不变。因此,根据 1.2 节中所述的拓扑分析步骤知,机构降耦后的 POC 集、自由度并未发生改变,即:

第 1 回路 $\{P_{11}-S_{12}-S_{13}-S_{22}-P_{21}\}$,显然 $\xi_{L1} = 6$,其约束度为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L1} = 9 + 2 - 3 - 2 - 6 = 0$$

式中, -3 是指应扣除绕 $S_{12}S_{13}$ 、 $S_{13}S_{22}$ 及 $S_{12}S_{22}$ 连线的 3 个局部转动自由度;但绕 $S_{12}S_{22}$ 连线的局部转动自由度,应计入第 2 回路的约束度计算中。

第 2 回路 $\{R^{S_{12}S_{22}}-S_{23}-R_{33}-R_{32}-P_{31}\}$,显然, $\xi_{L2} = 6$,其约束度为

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L2} = 6 + 1 - 1 - 6 = 0$$

可知,根据子运动链(SKC)的划分原则^[24],第 1、2 回路分别构成 SKC_1 、 SKC_2 ,它们耦合度均为零,即 $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$,因此,该并联机构耦合度为零,其位置正解易求出。

2 机构位置分析

2.1 基于拓扑特征的机构位置正解求解原理

由基于有序单开链(SOC)的机构组成原理^[24]可知,降耦后的机构包含 2 个 SKC,每个 SKC 可分解为一系列约束度分别为正值、零、负值的单开链回路,因此,该机构位置正解的求解,可转换为这两个 SKC 内所含单开链的位置求解。对本机构而言,SKC 内仅有约束度为零的单开链,其运动位置具有确定性,因此,其位置正解能独立求解。

2.2 坐标系建立及参数标注

机构运动学建模如图 3 所示,设静平台 0 为长方形,其宽 l_{OI} 为 a ,长为任意正实数,动平台 1 上 $l_{GF} = b$ 。设静平台 0 上的点 O 为静坐标系 $OXYZ$ 原点, X 轴沿 OC 方向, Y 轴沿 OI 方向, Z 轴由右手螺旋法则确定;动平台 1 上点 O' 为动坐标系 $O'X'Y'Z'$ 原点,其 X' 轴沿 $O'M$ 方向, Y' 轴沿 FO' 方向, Z' 轴由右手螺旋法则确定。

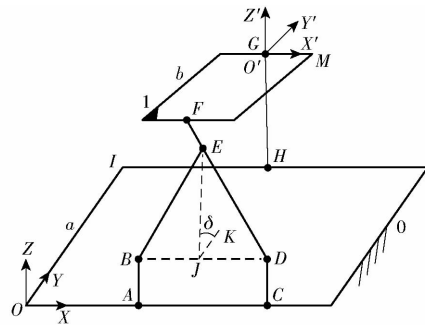


图 3 1T2R 并联机构的运动学建模

Fig. 3 Kinematic modeling of 1T2R PM

点 O' 与点 G 重合, AB 、 CD 、 GH 都垂直于静平台 0 平面, $\triangle EBD$ 的中线 EJ 与静平台 0 平面夹角为 δ 。设动平台 1 绕 OX 、 OY 轴正方向转动的角度分别为 α 、 β ; 设 $l_{AB} = l_{CD} = d$, $l_{BE} = l_{DE} = e$, $l_{EF} = f$, $l_{GH} = h$, 并令 $l_{FD}/l_{ED} = (f + e)/e = k_0$; 设 3 个驱动副输入分别为 $l_{OA} = l_1$ 、 $l_{OC} = l_2$ 、 $l_{IH} = l_3$ 。

2.3 位置正解求解

已知:3 个移动副的位置分别为 l_1 、 l_2 、 l_3 , 求:动平台上 $O' = (x, y, z)$ 及转角 α 和 β 。

2.3.1 SKC₁位置求解

第1回路A-B-E-D-C中,各点坐标为A=(*l*₁,0,0),B=(*l*₁,0,*d*),C=(*l*₂,0,0),D=(*l*₂,0,*d*)。由*l*_{EB}=*l*_{ED}的几何关系,易求得点E坐标为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} (l_1 + l_2)/2 \\ \sqrt{e^2 - (l_2 - l_1)^2/4} \cos \delta \\ d + \sqrt{e^2 - (l_2 - l_1)^2/4} \sin \delta \end{bmatrix}$$

2.3.2 SKC₂位置求解

第2回路F-G-H中,各点的坐标为G=O'=(*l*₃,*a*,*h*),H=(*l*₃,*a*,0),由*l*_{FD}/*l*_{ED}=*k*₀,得

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} l_2 + k_0(l_1 - l_2)/2 \\ k_0 \sqrt{e^2 - (l_2 - l_1)^2/4} \cos \delta \\ d + k_0 \sqrt{e^2 - (l_2 - l_1)^2/4} \sin \delta \end{bmatrix} \quad (7)$$

由杆长约束条件*l*_{FG}=*b*,整理并解得

$$\delta = 2 \arctan \left(\frac{-R \pm \sqrt{R^2 + S^2 - T^2}}{T - S} \right)$$

其中 $R = -2k_0(h - d) \sqrt{e^2 - (l_2 - l_1)^2/4}$

$$S = -2k_0a \sqrt{e^2 - (l_2 - l_1)^2/4}$$

$$T = a^2 - b^2 + (h - d)^2 + k_0^2 [e^2 - (l_2 - l_1)^2/4] + \{l_3 - [k_0l_1 + (2 - k_0)l_2]/2\}^2$$

因动坐标系中点F在静坐标系OXYZ中的坐标为

$$\begin{bmatrix} X_F \\ Y_F \\ Z_F \end{bmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} 0 \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_3 \\ a \\ h \end{bmatrix}$$

其中
$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \sin \alpha & \sin \beta \cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix}$$

式中Q——动坐标系到静坐标系的变换矩阵

解得
$$\begin{cases} \alpha = \arccos \frac{Y_F - a}{-b} \\ \beta = \arccos \frac{Z_F - h}{-b \sin \alpha} \\ (\text{或 } \beta = \arcsin \frac{X_F - l_3}{-b \sin \alpha}) \end{cases} \quad (8)$$

由式(7)、(8)求出动平台姿态角α、β、O'(x,y,z)及动平台上任一点的位置。

2.4 位置反解求解

机构位置逆解为:已知动平台1的转角α、β及O'(x,y,z),求*l*₁、*l*₂、*l*₃。

由式(8)可得

$$\begin{cases} X_F = -b \sin \beta \sin \alpha + l_3 \\ Y_F = -b \cos \alpha + a \\ Z_F = -b \cos \beta \sin \alpha + h \end{cases} \quad (9)$$

从而得点E坐标为

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} X_F/k_0 + (k_0 - 1)l_2/k_0 \\ Y_F/k_0 \\ Z_F/k_0 + (k_0 - 1)d/k_0 \end{bmatrix}$$

由*l*_{BE}=*l*_{DE}=*e*,解得

$$\begin{cases} l_1 = X_E \pm \sqrt{e^2 - (Z_E - d)^2 - Y_E^2} \\ l_2 = X_E \pm \sqrt{e^2 - (Z_E - d)^2 - Y_E^2} \\ l_3 = x \end{cases} \quad (10)$$

可知,*l*₁、*l*₂各有2组解,故逆解数为2×2=4,故该机构有4种构型。

2.5 正逆解验算

设该机构结构参数分别为:*a*=60 mm,*b*=20 mm,*d*=5 mm,*e*=75 mm,*f*=5 mm,*h*=45 mm。设此时3个移动副的位置分别为:*l*₁=7.380 3 mm,*l*₂=116.991 6 mm,*l*₃=60.000 0 mm。

用Matlab求得机构位置正解,如表1所示。

表1 位置正解

Tab.1 Direct position solutions

序号	α/(°)	β/(°)	<i>x</i> /mm
1	9.999 9	25.000 5	60.000 0
2	58.396 1	4.943 2	60.000 0

将表1中序号1的数值代入式(10),用Matlab解得机构的所有反解,如表2所示。

表2 位置反解

Tab.2 Inverse position solutions mm

序号	<i>l</i> ₁	<i>l</i> ₂	<i>l</i> ₃
1	7.380 3	7.380 3	60.000 0
2	7.380 3	116.991 6	60.000 0
3	116.991 6	7.380 3	60.000 0
4	116.991 6	116.991 6	60.000 0

可见,表2中序号2组的逆解数值,与正解计算给定的3个输入值一致。因此,正、反解公式推导正确。

3 机构奇异性分析

3.1 雅可比矩阵

采用Jacobian法分析该机构的奇异位形。将式(10)两边同时对时间*t*求导,得

$$f_{i1}\dot{\alpha} + f_{i2}\dot{\beta} + f_{i3}\dot{x} - u_{ii}\dot{l}_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (11)$$

该机构动平台输出速度*v*₁和输入速度*v*₂的关系为

$$\boldsymbol{J}_p \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{J}_q \boldsymbol{v}_2 \quad (12)$$

其中 $\boldsymbol{v}_1 = [\dot{\alpha} \quad \dot{\beta} \quad \dot{x}]^T \quad \boldsymbol{v}_2 = [\dot{l}_1 \quad \dot{l}_2 \quad \dot{l}_3]^T$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_q = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$f_{11} = -2b\sin\beta\cos\alpha(X_E - l_1)/k_0 + 2b\sin\alpha Y_E/k_0 - 2b\cos\beta\cos\alpha(Z_E - d)/k_0$$

$$f_{12} = -2b\cos\beta\sin\alpha(X_E - l_1)/k_0 + 2b\sin\beta\sin\alpha(Z_E - d)/k_0$$

$$f_{13} = 2(X_E - l_1)/k_0$$

$$f_{21} = -2b\sin\beta\cos\alpha(X_E - l_2)/k_0 + 2b\sin\alpha Y_E/k_0 - 2b\cos\beta\cos\alpha(Z_E - d)/k_0$$

$$f_{22} = -2b\cos\beta\sin\alpha(X_E - l_2)/k_0 + 2b\sin\beta\sin\alpha(Z_E - d)/k_0$$

$$f_{23} = 2(X_E - l_2)/k_0 \quad f_{31} = 0 \quad f_{32} = 0 \quad f_{33} = 1$$

$$u_{11} = 2(X_E - l_1) \quad u_{12} = (k_0 - 1)/k_0$$

$$u_{22} = -2(X_E - l_2)/k_0 \quad u_{33} = 1$$

依据 $\mathbf{J}_p$ 、 $\mathbf{J}_q$ 矩阵是否奇异, 将机构的奇异位形分为如下 3 类: ①当 $\det(\mathbf{J}_q) = 0$ 时, 机构发生输入奇异。②当 $\det(\mathbf{J}_p) = 0$ 时, 机构发生输出奇异。③当 $\det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_p) = 0$ 时, 机构发生综合奇异。

3.2 奇异位形分析

当机构发生输入奇异, 意味着每条支链靠近驱动杆的两根杆处于折叠或完全展开状态。此时, 动平台的自由度数减少, 则有 $\det(\mathbf{J}_q) = 0$, 方程解为

$$l_1 = l_2 \tag{13}$$

根据式 (13) 可知, 滑块 P_{11} 和 P_{21} 重合时才会发生输入奇异, 但考虑到构件间的干涉, 因此, 此类奇异位形不存在。

当机构发生输出奇异, 意味着每条支链靠近动平台的杆件处于折叠或完全展开的状态, 此时动平台自由度数增多, 即使锁住输入, 动平台也可能存在自由度输出。设

$$[f_{i1} \quad f_{i2} \quad f_{i3}] = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

若 $\det(\mathbf{J}_p) = 0$, 则向量 $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 、 $\mathbf{e}_3$ 有如下 2 种情况:

(1) 存在 2 个向量线性相关

若 $\mathbf{e}_1 = k\mathbf{e}_2$, 满足 $GF \parallel \triangle EBD$ 的条件下, 机构存在奇异位置, 如图 4 所示。

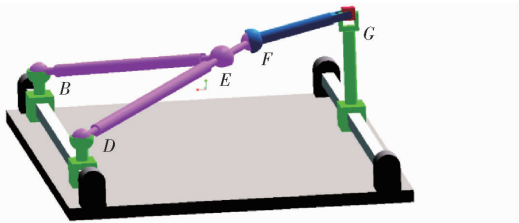


图 4 $GF \parallel \triangle EBD$ 的奇异位形

Fig. 4 Singular configuration of $GF \parallel \triangle EBD$

若 $\mathbf{e}_1 = k\mathbf{e}_3$, 满足 $GF \parallel EB$ 的条件下, 机构存在奇异位置, 如图 5 所示。

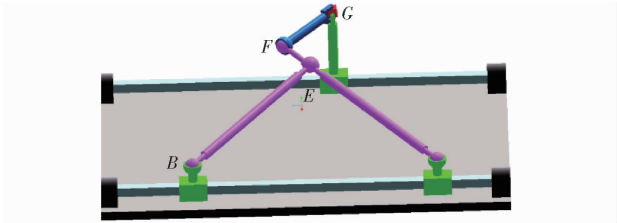


图 5 $GF \parallel EB$ 的奇异位形

Fig. 5 Singular configuration of $GF \parallel EB$

若 $\mathbf{e}_2 = k\mathbf{e}_3$, 满足点 G 、 F 、 D 共线的条件下, 机构存在奇异位置, 如图 6 所示。

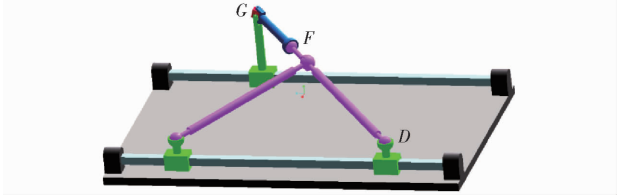


图 6 点 G 、 F 、 D 共线的奇异位形

Fig. 6 Singular configuration of collinear points G , F and D

(2) 3 个向量线性相关

设 $\mathbf{e}_3 = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2$ ($k_1k_2 \neq 0$), 满足 $\sin\alpha = 0$ (即 $FG \perp GH$) 的条件下, 机构存在奇异位置, 如图 7 所示。

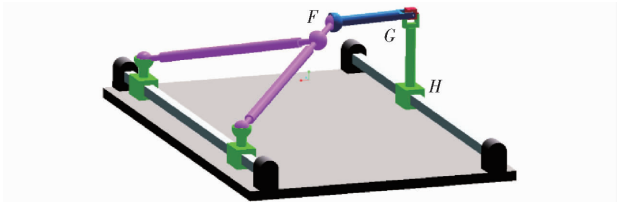


图 7 $FG \perp GH$ 的奇异位形

Fig. 7 Singular configuration of $FG \perp GH$

当 $\det(\mathbf{J}_q) = \det(\mathbf{J}_p) = 0$, 即输入奇异和输出奇异同时发生, 该机构不存在综合奇异位置。

4 基于符号式位置正解的工作空间分析

4.1 工作空间计算

并联机构的可达工作空间是指在考虑运动副的转角范围、杆长不干涉的情况下, 末端执行器的工作区域, 是衡量并联机构性能的一个重要指标。

传统的工作空间计算是基于机构位置反解公式, 采用离散化空间的三维搜索法, 即需要预先估计设定一个搜索范围, 通过 Matlab 软件搜索所有满足位置反解约束条件的点, 由这些点组成的三维图即为该机构的工作空间。但由于预设的搜索范围难于估计其大小, 因此, 计算量很大。

本文降耦优化机构具有符号式位置正解, 因此, 直接采用位置正解来计算工作空间, 具有思路清晰、

计算量少、工作空间边界计算准确等优点。

当滑块 P_{31} 固定时(取 $l_3 = 60\text{ mm}$), 滑块 P_{11} 、 P_{21} 的活动范围为: $-20\text{ mm} \leq l_1 \leq 60\text{ mm}$, $60\text{ mm} \leq l_2 \leq 140\text{ mm}$ 。通过 Matlab 软件编程, 由式(7)、(8)得到该机构两维转动(2R)的工作空间, 如图 8 所示。

2R 输出时, 工作空间在 XOY 、 XOZ 、 YOZ 平面上的投影图如图 9 所示。

当 3 个滑块都运动并具有不同速度时, 滑块

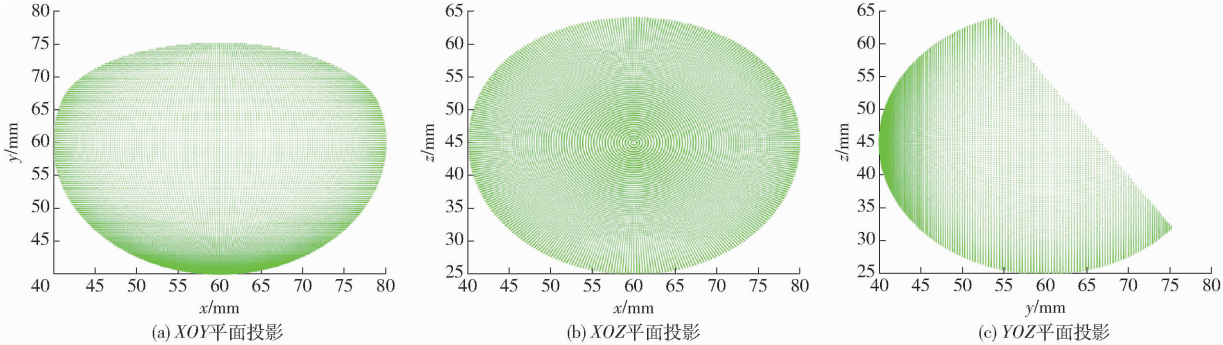


图 8 2R 输出时的工作空间

Fig. 8 Workspace of 2R output

图 9 2R 工作空间在 XOY 、 XOZ 、 YOZ 上的投影

Fig. 9 Projection of 2R workspace on XOY , XOZ and YOZ

P_{11} 、 P_{21} 、 P_{31} 活动范围为: $-20\text{ mm} \leq l_1 \leq 60\text{ mm}$, $60\text{ mm} \leq l_2 \leq 140\text{ mm}$, $60\text{ mm} \leq l_3 \leq 120\text{ mm}$, 通过 Matlab 软件编程, 由式(7)、(8)得到该机构一平移两转动(1T2R)的工作空间, 如图 10 所示(可看作是图 8 所示的 2R 工作空间在 X 轴方向叠加而成)。

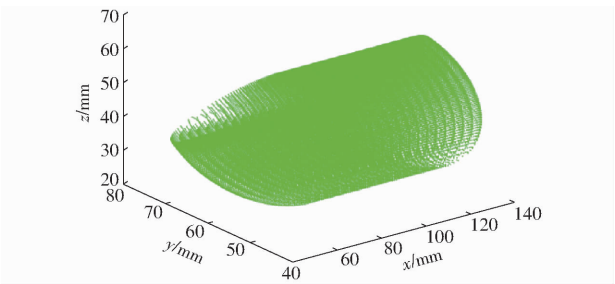


图 10 1T2R 工作空间

Fig. 10 Workspace of 1T2R

1T2R 工作空间在 XOY 、 XOZ 、 YOZ 平面上的投影图如图 11 所示。

4.2 工作空间分析

采用传统的、基于式(9)、(10)的方法, 同样计算出了动平台上点 F 如图 8、9 所示两维转动工作空间, 以及如图 10、11 所示的一平移两转动工作空间, 但基于符号式位置正解和位置反解求解 2R、1T2R 工作空间的计算量不同(由程序耗时, 可直观且真实地知道计算量); 基于符号式位置正解、位置反解的程序, 求得 2R 和 1T2R 工作空间的耗时, 分别为 7.856、129.307 s 和 24.913、410.075 s, 即基于符号式位置正解算法, 分别是基于位置反解的计算量的 31.533%、31.532%。

由图 8、10 可知, 用两种工作空间计算方法求得该机构的工作空间完全一致。由图 10、11 可知, 该机构工作空间关于 $z = 45\text{ mm}$ 处的 XOY 面部分对称; 当 $z > 45\text{ mm}$ 时, 工作空间随 z 增大而减小, 当 $z \leq 45\text{ mm}$ 时, 工作空间随 z 减小而先增后减, 其形

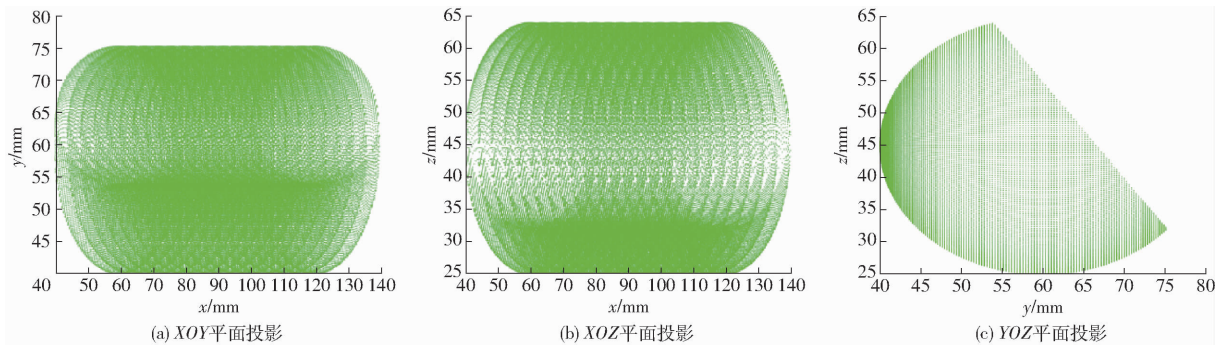


图 11 1T2R 工作空间在 XOY 、 XOZ 、 YOZ 上的投影

Fig. 11 Projection of 1T2R workspace on XOY , XOZ and YOZ

状较为规则,且工作空间大。基于符号式位置正解的工作空间计算,计算极为方便,计算量约为基于位置反解工作空间计算量的 31.53%,且工作空间边界计算准确。

5 结论

(1) 在保持初始设计 1T2R 并联机构的 POC、DOF 不变的情况下,通过拓扑降耦设计进行优化,

使其耦合度从 1 降为 0,进而可以直接推导出该机构的符号式位置正解,而不需复杂的数学消元等推导过程,故有利于后续的尺度综合、误差分析、轨迹规划、运动控制及动力学分析。

(2) 基于符号式位置正解的机构工作空间计算方法具有无需预估工作空间范围、计算量少、工作空间边界计算准确等优点,同时表明,该 1T2R 并联机构的工作空间大,形状较为规则。

参 考 文 献

- [1] SONG Yimin, HAN Pengpeng, WANG Panfeng. Type synthesis of 1T2R and 2R1T parallel mechanisms employing conformal geometric algebra[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 121:475–486.
- [2] 汪满新, 黄田. 1T2R 3 自由度并联机构拓扑结构综合[J]. 机械工程学报, 2015, 51(17):1–7.
WANG Manxin, HUANG Tian. Type synthesis of 1T2R 3-DOF parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(17):1–7. (in Chinese)
- [3] 房立丰, 刘安心, 杨廷力, 等. 一平移二转动并联稳定平台拓扑结构设计[J/OL]. 农业机械学报, 2012, 43(2):205–210.
FANG Lifeng, LIU Anxin, YANG Tingli, et al. Topology structure design of 1T–2R parallel stable platform[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(2):205–210. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20120239&journal_id=jesam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.02.039. (in Chinese)
- [4] ENRIQUE C U, ERNESTO R L. Kinematic analysis of the 3–CUP parallel mechanism[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2013, 29(5):382–395.
- [5] HUSSEIN T, ERNESTO R L. Instantaneous kinematics analysis via screw-theory of a novel 3–CRC parallel mechanism[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2016, 13(3):128–143.
- [6] SUNG M K, WHEEKUK K, JAEHON C, et al. Kinematic analyses of a 1T2R and a 1T3R parallel mechanisms with closed-form position solutions [C]// 2009 International Conference on Control and Automation. Chrichurch: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2009:1874–1879.
- [7] SUN Tao, HUO Xinming. Type synthesis of 1T2R parallel mechanisms with parasitic motions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 128:412–428.
- [8] CHEN Genliang, YU Weidong, LI Qinchuan, et al. Dynamic modeling and performance analysis of the 3–PRRU 1T2R parallel manipulator without parasitic motion[J]. Nonlinear Dynamics, 2017, 90(1):1–15.
- [9] GAN Dongming, DIAS J, SENEVIRATNE L. Unified kinematics and optimal design of a 3rRPS metamorphic parallel mechanism with a reconfigurable revolute joint[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96:239–254.
- [10] ALI P, JAVAD E, MASOUD D. Dynamic analysis of high-speed boat motion simulator by a novel 3-DOF parallel mechanism with prismatic actuators based on seakeeping trial[J]. Journal of Marine Science and Application, 2018, 17(2):178–191.
- [11] SAIIOA H, CHARLES P, OSCAR A, et al. Analysis of the 2PRU–1PRS 3DOF parallel manipulator: kinematics, singularities and dynamics[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2018, 51:63–72.
- [12] SAIIOA H, CHARLES P, MIKEL D, et al. Analytical procedure based on the matrix structural method for the analysis of the stiffness of the 2PRU–1PRS parallel manipulator[J]. Robotica, 2019, 37(8):1401–1414.
- [13] JOSÉ C, MARINA V, ÁNGEL V, et al. Hybrid force/position control for a 3-DOF 1T2R parallel robot: implementation, simulations and experiments[J]. Mechanics Based Design of Structures and Machines, 2016, 44(1–2):16–31.
- [14] XIE Fugui, LIU Xinjun, LI Tiemin. A comparison study on the orientation capability and parasitic motions of two novel articulated tool heads with parallel kinematics[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2013, 5:81–90.
- [15] 车林仙, 王桃芬, 何兵. 姿态能力最优的 2PUR–PSR 并联机构尺度综合[J]. 机械设计, 2019, 36(12):108–115.
CHE Linxian, WANG Taofen, HE Bing. Dimensional synthesis of a SPUR–PSR parallel manipulator with optimal orientational capability[J]. Journal of Machine Design, 2019, 36(12):108–115. (in Chinese)
- [16] CHONG Zenghui, XIE Fugui, LIU Xinjun, et al. Design of the parallel mechanism for a hybrid mobile robot in wind turbine blades polishing[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2020, 61:101857–101865.
- [17] LIU Haitao, XU Ke, SHEN Huiping, et al. Type synthesis of 1T2R parallel mechanisms using structure coupling-reducing method[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2019, 32(1):1–10.
- [18] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6–SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21):70–80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6–SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21):70–80. (in Chinese)
- [19] 沈惠平, 吉昊, 许正骁, 等. 三平移机构设计与运动学符号解及性能评价[J/OL]. 农业机械学报, 2020, 51(9):397–407.
SHEN Huiping, JI Hao, XU Zhengxiao, et al. Kinematic symbolic solution and performance evaluation of new three translation mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(9):397–407. http://www.j-csam.org/jcam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20200946&flag=1. DOI:106041/j.issn.1000-1298.2020.09.046. (in Chinese)

- [8] MATTINGLY G E, YEH T T. Secondary flow effects due to several elbow configurations[J]. American Society of Mechanical Engineers Fluids Engineering Division, 1990, 95: 5-9.
- [9] MATTINGLY G E, YEH T T. Effects of pipe elbows and tube bundles on selected types of flowmeters[J]. Flow Measurement & Instrumentation, 1991, 2(1): 4-13.
- [10] YEH T, MATTINGLY G. Laser doppler velocimeter studies of the pipe flow by a generic header [M]. US Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology, 1995.
- [11] YEH T, MATTINGLY G. Flowmeter installation effects due to a generic header[S]. NIST Technical note 1419, 1996.
- [12] GRANER S, HINZ D F, BREITSAMTER C. Downstream relaxation of velocity profiles in pipe-flow with swirl disturbances [J]. Technisches Messen, 2016, 83(12): 696-711.
- [13] RAIŠUTIS R. Investigation of the flow velocity profile in a metering section of an invasive ultrasonic flowmeter[J]. Flow Measurement & Instrumentation, 2006, 17(4): 201-206.
- [14] ZHENG D, ZHANG P, XU T. Study of acoustic transducer protrusion and recess effects on ultrasonic flowmeter measurement by numerical simulation[J]. Flow Measurement & Instrumentation, 2011, 22(5): 488-493.
- [15] RUPPEL C, PETERS F. Effects of upstream installations on the reading of an ultrasonic flowmeter[J]. Flow Measurement & Instrumentation, 2004, 15(3): 167-177.
- [16] CARLANDER C, DELSING J. Installation effects on an ultrasonic flow meter with implications for self diagnostics[J]. Flow Measurement & Instrumentation, 2000, 11(2): 109-122.
- [17] GATABI J R, GATABI I R, SOLTANI M, et al. An improved measurement algorithm for increasing the accuracy of sing-around type ultrasonic flow meters[J]. Mechanika, 2012, 18(2): 209-213.
- [18] IOOSS B, LHUILLIER C, JEANNEAU H. Numerical simulation of transit-time ultrasonic flowmeters: uncertainties due to flow profile and fluid turbulence[J]. Ultrasonics, 2002, 40(9): 1009-1015.
- [19] ANDREEVA T A. Ultrasonic technique in determination of grid-generated turbulent flow characteristics [D]. Worcester Polytechnic Institute, 2003.
- [20] ANDREEVA T A, DURGIN W W. Ultrasound technique for prediction of statistical characteristics of grid-generated turbulence [J]. AIAA Journal, 2003, 41(8): 1438-1443.
- [21] ANDREEVA T A, DURGIN W W. Determination of correlation functions of turbulent velocity and sound speed fluctuations by means of ultrasonic technique[J]. Experiments in Fluids, 2011, 51(6): 1765-1771.
- [22] POPE S B. Turbulent flows [M]. IOP Publishing, 2001.
- [23] 刘永辉. 圆管过渡区流速特性的研究[D]. 济南: 山东大学, 2011.
LIU Yonghui. Research of characteristics of transition flow in pipes[D]. Ji'nan: Shandong University, 2011. (in Chinese)
- [24] KOLMOGOROV A N. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences, 1991, 434(1890): 15-17.

(上接第 377 页)

- [20] 沈惠平, 许正骁, 许可, 等. 零耦合度且部分解耦的 3T1R 并联机构设计与运动分析[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 382-392.
SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and kinematic analysis of zero coupling and partially decoupled 3T1R parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 382-392. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20190444&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.04.044. (in Chinese)
- [21] 沈惠平, 许正骁, 许可, 等. 低耦合度且部分解耦的 3T1R 并联机构设计与分析[J/OL]. 农业机械学报, 2019, 50(2): 373-383, 419.
SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and analysis for partially decoupled 3T1R parallel mechanism with low coupling degree[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(2): 373-383, 419. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20190243&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.02.043. (in Chinese)
- [22] 周金波, 尤晶晶, 李菊, 等. 具有符号式位置正解的 2T1R 并联机构逆向动力学分析[J]. 机械设计与研究, 2020, 36(3): 23-29.
ZHOU Jinbo, YOU Jingjing, LI Ju, et al. Inverse dynamics of 2T1R parallel mechanism with symbolic positive position solution[J]. Machine Design & Research, 2020, 36(3): 23-29. (in Chinese)
- [23] 沈惠平, 朱忠勋, 孟庆梅, 等. 零耦合度空间 2T1R 并联机构运动学与刚度建模分析[J/OL]. 农业机械学报, 2020, 51(10): 411-420.
SHEN Huiping, ZHU Zhongqi, MENG Qingmei, et al. Kinematics and stiffness modeling analysis of spatial 2T1R parallel mechanism with zero coupling degree[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(10): 411-420. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20201047&journal_id=jcsam. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.10.047. (in Chinese)
- [24] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [25] 沈惠平, 朱小蓉, 尹洪波, 等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报, 2016, 52(23): 102-113.
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23): 102-113. (in Chinese)