doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.05.046

斜拉索-磁流变阻尼器非脆弱减振控制器研究

冯志敏[1] 时云飞[1] 张 刚[1] 刘小锋[1] 段玉贺[2]

(1.宁波大学海运学院,宁波 315211;2.南京莱斯电子设备有限公司,南京 210014)

摘要:以抑制振荡幅值和时间为目标,针对斜拉索-磁流变阻尼器外部扰动和减振控制器参数不确定性问题,提出一种多性能指标约束下的非脆弱减振控制器设计方法。基于线性矩阵不等式(LMI)理论,利用 H_∞ 性能指标抑制外部扰动,并以区域极点配置表征减振控制的快速性与稳定性,以方差表征小振幅和振动速度。通过 Matlab 中 LMI 工具箱对多 LMI 约束和线性目标函数的凸优化问题进行求解,给出了多性能指标约束的非脆弱减振控制器设计形式。以浙江省某跨海大桥 C22、C13 号斜拉索为实例,进行了仿真验证。结果表明,在不同随机扰动下,该方法设计的减振控制器使不同拉索振动状态的振幅分别降低 57.805%、74.395%,收敛时间分别缩短 56.705%、77.845%。

关键词:斜拉索;磁流变阻尼器;非脆弱控制;线性矩阵不等式;多性能约束

中图分类号:U441$^+$.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-1298(2020)05-0411-10 **OSID**:

Design of Non-fragile Damping Controller for Stay Cable - Magnetorheological Damper

FENG Zhimin[1] SHI Yunfei[1] ZHANG Gang[1] LIU Xiaofeng[1] DUAN Yuhe[2]

(1. *Faculty of Maritime and Transportation*, *Ningbo University*, *Ningbo* 315211, *China*
2. *Nanjing Rice Electronic Equipment Co.*, *Ltd.*, *Nanjing* 210014, *China*)

Abstract: Aiming at suppressing the amplitude and time of oscillation, the uncertainties of the disturbance of unknown external disturbances of the stay cable - magnetorheological damper control system and uncertainties in the parameters of the damping controller. Based on linear matrix inequality (LMI) theory, the H_∞ performance index and non-fragile control were used to suppress external disturbances and closed-loop system parameter perturbation problems, respectively. Regional pole configuration was used to characterize the fastness and stability of vibration reduction control, and variance was used to represent small amplitude and vibration speed. The LMI toolbox in Matlab was used to solve the convex optimization problem with multiple LMI constraints and linear objective functions, and a non-fragile vibration damping controller design form with multiple performance index constraints was given. Finally, the cable-stayed cables C22 and C13 of a cross-sea bridge in Zhejiang Province were taken as an example for simulation verification, and the vibration reduction effects were analyzed and compared. The results showed that the vibration damping controller designed by this method not only had good immunity and stability under different random disturbances, but also could reduce the amplitudes of different cable vibration states by 57.805% and 74.395%, the reduction of convergence time was 56.705% and 77.845%, and the vibration reduction effect was better, which could meet the needs of marine engineering applications.

Key words: stay cable; magnetorheological damper; non-fragile control; linear matrix inequality; multiple performance constraints

收稿日期:2020-01-07 修回日期:2020-03-07

基金项目:国家自然科学基金项目(51675286)、浙江省教育厅一般科研项目(Y201941599)和浙江省大学生科技创新活动计划暨新苗人才计划项目(2018R405090)

作者简介:冯志敏(1960—),男,教授,博士生导师,主要从事海洋结构工程状态监测及控制研究,E-mail: fengzhimin@nbu.edu.cn

0 引言

由车辆行驶、风雨等未知外力引起的有害振动已成为影响斜拉索桥梁安全性的重要因素。作为桥梁的主要受力构件,斜拉索极易在未知载荷作用下产生振动。减小和抑制斜拉索振动对于提高桥梁结构稳定性和安全性具有重要的工程意义[1]。

磁流变阻尼器是一种新型的智能阻尼器[2],具有响应时间快、阻尼力可调范围大等特点,广泛应用于农用车辆、航空航天等减振控制中。斜拉索减振控制研究也逐渐集中到磁流变阻尼器半主动控制上。OU 等[3]将 LQR 控制算法用于斜拉索-磁流变阻尼器控制中,提出一种半主动控制算法,并仿真验证该方法的有效性;禹见达等[4]利用位移反馈对 Bang - Bang 控制算法进行改进,证明该算法对斜拉索减振有良好效果;樊晓平等[5]基于奇摄动理论,设计了抑制斜拉索振动的半主动自适应控制方法,并利用数值案例验证此算法的合理性;HEO 等[6]将鲁棒控制中的 Lyapunov 法和截断最优相结合,对斜拉索振动进行控制,具有较高的可靠性。

鲁棒控制主要以被控对象和外界未知扰动不确定性为研究目标,结合相应性能指标,以获得闭环系统稳定的控制器。而非脆弱鲁棒控制不仅要考虑被控对象和未知扰动的不确定性,同时还要考虑控制器在工程调试过程中其增益参数发生的摄动状况。实际上,斜拉索减振控制器的增益参数不可能准确实现,并且在外界干扰下也可能发生改变。因此,极易降低控制器闭环系统的动态稳定性能,表现为控制器的脆弱性[7]。在传统减振控制器研究中,YEGANEHFALLAH 等[8]考虑到斜拉索系统动态参数的不确定性,提出一种解决此问题的鲁棒控制器设计方法;段玉贺等[9]为了降低振幅和振速,分别在斜拉索-磁流变阻尼器减振控制算法中引入区域极点和协方差性能指标约束的鲁棒控制理论,设计出减振效果良好的控制器。但上述研究未考虑斜拉索-磁流变阻尼器的外部扰动和减振控制器参数增益不确定性,目前将鲁棒控制中多性能指标约束[10]和非脆弱控制[11]相结合的减振控制研究成果尚不多见。

为减少斜拉索减振控制器参数摄动和外部扰动对系统性能的影响,本文提出一种多性能指标约束的非脆弱减振控制器设计方法。运用非脆弱控制和鲁棒控制中的多性能约束方法,以抑制振荡幅值和时间为目标,给出该减振控制器设计形式及求解方法,并与常规减振控制器、H_∞ 减振控制器的减振效果进行分析对比。

1 系统模型及求解分析

1.1 系统模型建立

斜拉索-磁流变阻尼器动力学模型如图 1 所示。

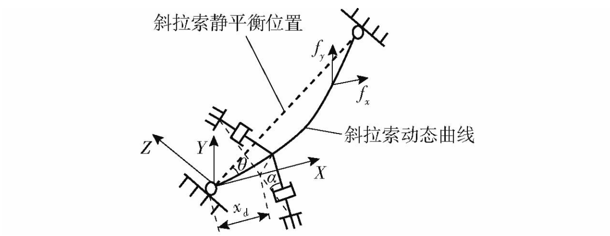


图 1 斜拉索-磁流变阻尼器动力学模型示意图

Fig. 1 Schematic of dynamic model of stay cable - magnetorheological damper

斜拉索在风雨振主发生面存在极小垂度(考虑材质、安装等因素)。假设静平衡状态下斜拉索长度为 L,与水平面夹角为 θ,振动时斜拉索曲线为 $y(x,\ t)$,静平衡下索曲线为 $y_0(x)$、索力变化量为 ΔS;外部激励载荷 $\boldsymbol{f}(t)$ 垂直作用于斜拉索,且在二维 X、Y 面内存在 f_x、f_y;两侧磁流变阻尼器对称安装在距锚固端 x_d 处,轴向阻尼力为 $f_d(t)$,与水平面夹角为 α 且与斜拉索索长方向垂直。

结合 Hamilton 原理可得斜拉索-磁流变阻尼器系统动力学方程[12]为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta W \mathrm{d}t = 0 \tag{1}$$

其中
$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m\ \dot{y}^2 \mathrm{d}x \qquad V = V_f + V_s$$

$$\delta W = \delta W_c + \delta W_d + \delta W_f$$

式中 T——系统动能

V_f——弯曲应变能

V_s——拉伸应变能

δW_c——系统阻尼做功

δW_d——阻尼器做功

δW_f——外力做功

m——斜拉索单位长度质量

V——弯曲与拉伸应变能总和

δW——系统阻尼、阻尼器及外力做功总和

由于斜拉索抗弯刚度和斜拉索振动时的索力增量较小,可忽略不计,即 $EI \approx 0$,E 为斜拉索弹性模量,I 为惯性矩,$\Delta S \approx 0$ 得 n 组方程[13]为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^l m\phi_i\phi_j \mathrm{d}x\, \ddot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^l c_0\phi_i\phi_j \mathrm{d}x\, \dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\int_0^l S_0\phi_i'\phi_j' \mathrm{d}x q_i = \sum_{i=1}^{n}\int_0^l f(x,t)\phi_i \mathrm{d}x - f_d \sum_{i=1}^{n} \phi_{id} \tag{2}$$

式中 c_0——斜拉索单位长度阻尼系数

S_0——初始索力

q_i——广义位移坐标

ϕ_i——i 阶振型函数

ϕ_{id}——阻尼力作用下的 i 阶振型函数

ϕ_j——j 阶振型函数

令 $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{f}_d(t)$，得其矩阵形式为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}(t) + \boldsymbol{\varphi}(x_d)\boldsymbol{u}(t) \tag{3}$$

式中　$\boldsymbol{M}$——质量矩阵　　$\boldsymbol{K}$——刚度矩阵

$\boldsymbol{C}$——阻尼矩阵

$\boldsymbol{\varphi}(x_d)$——振型函数向量在坐标 x_d 处的向量

$\boldsymbol{u}(t)$——斜拉索所受阻尼力

1.2　求解及系统分析

1.2.1　切比雪夫级数的方程求解

$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$ 中矩阵元素 m_{ij}、k_{ij}、c_{ij} 的计算十分复杂，为简化求解过程，采用切比雪夫级数计算方法，并以正弦函数表示该振型函数。斜拉索-磁流变阻尼器的振型函数可表示为[9]

$$\phi_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i T_i(x) \tag{4}$$

其中　$T_i(x) = \cos(i\arccos x/L)$

式中　f_i——i 次切比雪夫级数系数

$T_i(x)$——i 次切比雪夫多项式

斜拉索采用磁流变阻尼器控制，其振动形态发生很大变化，也增加了求解过程复杂性。为提高振动时收敛速度，可用“0”阶振型表示磁流变阻尼器作用下静力变形，即

$$\phi_0(x) = \begin{cases} x/x_d & (0 \leqslant x \leqslant x_d) \\ (L-x)/(L-x_d) & (x_d < x \leqslant L) \end{cases} \tag{5}$$

则斜拉索振动状态为

$$y(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \phi_i(x) q_i(t) \tag{6}$$

1.2.2　系统状态空间方程表达

以斜拉索 y 向振动位移 $\boldsymbol{q}$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 作为系统状态向量，则运动方程式(3)对应的状态方程为

$$\dot{\boldsymbol{z}}_q(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_q(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(t) \tag{7}$$

式中　$\boldsymbol{z}_q(t)$——y 向广义坐标状态变量

$\boldsymbol{A}$——系统矩阵

$\boldsymbol{B}$——控制矩阵

$\boldsymbol{D}$——扰动矩阵

同时，$\phi_i(x)$ 需满足索的几何边界条件 $\phi_i(0) = \phi_i(1) = 0$，$\phi_d = \phi(x_d)$，$\phi_0 = \phi(x_0)$。对此，引入状态矩阵与矩阵不确定性项[9]，式(7)改写为

$$\dot{\boldsymbol{z}}_q(t) = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}_q(t) + (\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{f}(t) \tag{8}$$

其中　$$[\Delta\boldsymbol{A}\quad \Delta\boldsymbol{B}] = \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}[\boldsymbol{E}_1\quad \boldsymbol{E}_2] \tag{9}$$

式中　$\Delta\boldsymbol{A}$——系统矩阵中未知实矩阵

$\Delta\boldsymbol{B}$——控制矩阵中未知实矩阵

$\boldsymbol{F}$——不确定矩阵，$\in \boldsymbol{R}^{ij}$ 且满足 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} < \boldsymbol{I}$

$\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$——系统模型中不确定性结构矩阵

$\boldsymbol{H}$——有 LEBESUGE 可测元的未知矩阵

为解决斜拉索-磁流变阻尼器状态空间式(8)中减振控制器参数摄动问题，选用非脆弱状态反馈控制，即

$$\boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{K}_1 + \Delta\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{z}_q(t) \tag{10}$$

式中　$\boldsymbol{K}_1$——控制增益，$\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$

$\Delta\boldsymbol{K}_1$——控制器参数的增益摄动，$\in \boldsymbol{R}^{m\times n}$

为构造控制器增益摄动，选择加法摄动方式，其表达形式为

$$\Delta\boldsymbol{K}_1 = \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{F}_1(t)N_1 \quad (\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}_1(t) \leqslant \boldsymbol{I}) \tag{11}$$

即斜拉索-磁流变阻尼器系统式(8)在非脆弱状态反馈控制式(10)作用下，得到系统状态方程

$$\dot{\boldsymbol{z}}_q(t) = [(\boldsymbol{A}_C + \Delta\boldsymbol{A}_C) + (\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B})(\boldsymbol{K}_1 + \Delta\boldsymbol{K}_1)]\boldsymbol{z}_q(t) + \boldsymbol{D}W_K(t)\boldsymbol{D} \tag{12}$$

其中　$\boldsymbol{A}_C = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}_1 + \Delta\boldsymbol{K}_1)$

$\Delta\boldsymbol{A}_C = \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)[\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{K}_1 + \Delta\boldsymbol{K}_1)]$

式中　$W_K(t)$——外部激励载荷 $f(x)$ 的函数[14]

基于此，设计一种多性能指标约束下的非脆弱减振控制器式(10)，其闭环系统的极点能够配置在以 $(-q,0)$ 为圆心、半径为 r 的圆盘区域 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 内，且满足 $0<r<q$，以保证减振控制快速性与稳定性；同时，为解决减振控制系统外界干扰及增益摄动问题，引入非脆弱控制、H_∞ 性能指标约束、协方差性能指标约束，用以减少斜拉索的振幅与振速，且使振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有较小上界。若斜拉索-磁流变阻尼器减振控制系统稳定，则稳态协方差可定义为

$$\boldsymbol{X} = \lim_{t\to\infty}\boldsymbol{E}[\boldsymbol{z}_q(t)\boldsymbol{z}_q^{\mathrm{T}}(t)] \tag{13}$$

式中　$\boldsymbol{X}$——半正定矩阵

且满足

$$(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{D}W_K\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} = 0 \tag{14}$$

结合引理，用以设计多性能指标约束的非脆弱减振控制器

引理 1[15]：给定矩阵 $\boldsymbol{A}$，其所有特征值均在圆盘 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 中的充要条件是存在适维对称正定矩阵 $\boldsymbol{X}>0$，使得

$$\begin{bmatrix} -r\boldsymbol{X} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + q\boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + q\boldsymbol{X} & -r\boldsymbol{X} \end{bmatrix} < 0 \tag{15}$$

引理 2[16]：给定适维矩阵 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{E}$，对任意满足 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \leqslant \boldsymbol{I}$ 的矩阵 $\boldsymbol{F}$ 存在

$$\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} < 0 \tag{16}$$

当且仅当存在正实数 ε 使得

$$\boldsymbol{Q} + \varepsilon\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} < 0 \tag{17}$$

引理 3[17]：若对称矩阵 $\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{12}\\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22}\end{bmatrix}$ 中的 $\boldsymbol{S}_{11}$、$\boldsymbol{S}_{22}$ 分别为非奇异可逆矩阵，则以下 3 个条件等价：①$\boldsymbol{S}<0$。②$\boldsymbol{S}_{11}<0,\boldsymbol{S}_{22}-\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}_{11}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}<0$。③$\boldsymbol{S}_{22}<0,\boldsymbol{S}_{11}-\boldsymbol{S}_{12}\boldsymbol{S}_{22}^{-1}\boldsymbol{S}_{12}^{\mathrm{T}}<0$。

2 减振控制器设计

2.1 常规减振控制器

定理 1：对随机载荷 $\boldsymbol{f}(t)$ 激励下的减振控制系统式（12），不考虑控制器摄动，能使得控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{z}_q(t)$ 闭环系统极点配置在圆盘区域 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 内，且振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有上界的充要条件是以下矩阵不等式组有可行解[18]。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-r^2\boldsymbol{Q}<0 \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}W_K\boldsymbol{D}<0 \tag{19}$$

$$\boldsymbol{Q}>0 \tag{20}$$

显然，式（19）为保证闭环系统极点配置到圆盘 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 区域内，使得减振控制具有快速性与稳定性；式（19）保证了振幅与振速方差矩阵有上界，满足：$\boldsymbol{X}<\boldsymbol{Q}$。式（20）要求矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为正定矩阵。

为便于求解式（18）~（20）矩阵不等式方程，利用矩阵变换和引理将其转换为下 LMIs 形式。

定理 2：减振控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{z}_q(t)$ 在随机载荷 $\boldsymbol{f}(t)$ 的激励下，存在反馈控制增益阵 $\boldsymbol{K}_1$，使得减振控制系统极点配置在圆盘区域 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 内且振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有上界的充要条件是：存在正实数变量 $\varepsilon_i(i=1,2,3)$ 和矩阵变量 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{S}$，使 LMIs 有可行解，即

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{Q} & (\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S} & 0\\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & -r\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S} & -\varepsilon_3\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

$$\boldsymbol{Q}>0 \tag{23}$$

证明：定义控制增益 $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{S}\boldsymbol{Q}^{-1}$，应用引理 1~3，并参照文献［19］，可知结论成立。

2.2 H_∞ 减振控制器

定理 3：减振控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{z}_q(t)$ 在随机载荷 $\boldsymbol{f}(t)$ 激励下，减振控制器极点能够配置在圆盘区域 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 内，系统抗干扰能力 $\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})\|_\infty<\gamma$，且振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有上界的充要条件是存在可配置正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和反馈增益 $\boldsymbol{K}_1$ 同时满足[20]

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}-r^2\boldsymbol{Q}<0 \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}<0 \tag{25}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_1+\boldsymbol{H}\boldsymbol{F}(t)\\ \boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1+q\boldsymbol{I}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}W_K\boldsymbol{D}<0 \tag{26}$$

$$\boldsymbol{Q}>0 \tag{27}$$

式（24）~（27）分别表示闭环系统极点配置到圆盘 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 区域内，以保证减振控制具有快速性与稳定性；系统抑制外界干扰指标 $\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})\|_\infty<\gamma$；以及斜拉索的振幅与振速稳态状态协方差阵有上界且 $\boldsymbol{X}<\boldsymbol{Q}$。

利用矩阵变换和引理将其转换为下 LMIs 等价形式。

定理 4：减振控制器 $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{z}_q(t)$ 在随机载荷 $\boldsymbol{f}(t)$ 的激励下，存在反馈控制增益阵 $\boldsymbol{K}_1$，使得减振控制系统极点配置在圆盘区域 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 内，系统抑制外界干扰指标 $\|\boldsymbol{H}(\boldsymbol{S})\|_\infty<\gamma$，且振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有上界的充要条件是：存在正实数变量 $\varepsilon_i(i=1,2,3,4,5)$、$\gamma$ 和矩阵变量 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{S}$，使线性 LMIs 有可行解，即

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{Q} & (\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S} & 0\\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & -r\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{28}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\gamma\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon_3\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{29}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & -\gamma\boldsymbol{I} & 0\\ \boldsymbol{Q}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & 0 & -\varepsilon_3\boldsymbol{I}\end{bmatrix}<0 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{Q}>0 \tag{31}$$

证明：略。

2.3 非脆弱减振控制器

定理 5：减振控制闭环系统式（12）在随机载荷 $\boldsymbol{f}(t)$ 的激励下，控制器参数具有一定的摄动范围，闭

环极点配置在圆盘区域 $F(-q,r)$ 内，且振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有上界，同时，能够抑制系统外界干扰指标 $\|\boldsymbol{H}(S)\|_{\infty}<\gamma$ 的条件为存在可配置正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和非脆弱减振控制增益 K_1^*，同时满足[21]

$$(\boldsymbol{A}_C+\Delta\boldsymbol{A}_C+q\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}_C+\Delta\boldsymbol{A}_C+q\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}-r^2\boldsymbol{Q}<0 \tag{32}$$

$$(\boldsymbol{A}_C+\Delta\boldsymbol{A}_C)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}_C+\Delta\boldsymbol{A}_C)^{\mathrm{T}}+\gamma^{-2}\boldsymbol{QC}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{CQ}+\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}}<0 \tag{33}$$

$$(\boldsymbol{A}_C+\Delta\boldsymbol{A}_C)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}_C+\Delta\boldsymbol{A}_C)+\boldsymbol{D}W_K\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}<0 \tag{34}$$

$$\boldsymbol{Q}>0 \tag{35}$$

式(32)~(35)分别表示必存在正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和非脆弱减振控制器反馈增益 $\boldsymbol{K}_1^*=\boldsymbol{K}_1+\Delta\boldsymbol{K}_1$，使减振控制系统中的实常数方阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值均具有负实部，且可配置到圆盘区域 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 内，以保证减振控制具有一定的快速性与稳定性；同时，为抑制外界干扰和斜拉索的振幅、振速，其对应的闭环系统满足 $\|\boldsymbol{H}(S)\|_{\infty}<\gamma$，振幅、振速稳态状态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 之间的关系也必满足 $\boldsymbol{X}<\boldsymbol{Q}$。

为便于求解，利用矩阵变换和引理将上述矩阵不等式转换为下 LMIs 等价形式。

定理 6：若斜拉索-磁流变阻尼器减振控制器式(10)中含有加性不确定性式(11)，则闭环系统式(12)极点配置于圆盘区域 $\boldsymbol{F}(q,r)$ 内且满足振幅、振速稳态协方差矩阵 $\boldsymbol{X}$ 有上界，同时，能够抑制系统外界干扰指标 $\|\boldsymbol{H}(S)\|_{\infty}<\gamma$ 的充要条件为：存在正实数变量 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,7)$、$\gamma$ 和矩阵变量 $\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{S}$，使得 LMIs 有可行解，即

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{Q} & (\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I})\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{BS} & 0 & \varepsilon_2\boldsymbol{BM}_1 & 0 \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+q\boldsymbol{I})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & -r\boldsymbol{I} & \boldsymbol{QE}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{QN}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} & \varepsilon_4\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ \varepsilon_2\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0 & \varepsilon_2\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_2\boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q} & 0 & 0 & \varepsilon_2\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{36}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AQ}+\boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BS}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_3\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{DD}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{QC}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{QE}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & \varepsilon_5\boldsymbol{BM}_1 & \boldsymbol{QN}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{CQ} & -\gamma^2\boldsymbol{I} & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S} & 0 & -\varepsilon_4\boldsymbol{I} & \varepsilon_5\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ \varepsilon_5\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & 0 & \varepsilon_5\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_5\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q} & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_5\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{37}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{AQ}+\boldsymbol{QA}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BS}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_6\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{D}W_K\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{QE}_1+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & 0 & \boldsymbol{QN}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{E}_1\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{S} & -\varepsilon_6\boldsymbol{I} & \varepsilon_7\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{M}_1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_7\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q} & 0 & 0 & -\varepsilon_7\delta\boldsymbol{I} \end{bmatrix}<0 \tag{38}$$

$$\boldsymbol{Q}>0 \tag{39}$$

式中，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{Q}$，则在含有加性不确定摄动系统式(11)中，其名义控制增益为 $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{SQ}^{-1}$。

证明：根据引理 1、引理 2，表征快速性与稳定性圆盘极点约束性能指标式(32)等价为

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{Q} & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_1)\boldsymbol{Q}+q\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_1)^{\mathrm{T}}+q\boldsymbol{I} & -r\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}} \\ 0 & (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{Q} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \boldsymbol{BM}_1 \\ 0 \\ \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{M}_1 \end{bmatrix}\boldsymbol{F}_1(t)[0 \quad \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q} \quad 0]+\left[\begin{bmatrix} \boldsymbol{BM}_1 \\ 0 \\ \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{M}_1 \end{bmatrix}\boldsymbol{F}_1(t)[0 \quad \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q} \quad 0]\right]^{\mathrm{T}}<0$$

由引理(2)可得

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1\boldsymbol{HH}^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{Q} & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_1)\boldsymbol{Q}+q\boldsymbol{I} & 0 \\ \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}_1)^{\mathrm{T}}+q\boldsymbol{I} & -r\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1)^{\mathrm{T}} \\ 0 & (\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{Q} & -\varepsilon_1\boldsymbol{I} \end{bmatrix}+\varepsilon_2\begin{bmatrix} \boldsymbol{BM}_1 \\ 0 \\ \boldsymbol{E}_2\boldsymbol{M}_1 \end{bmatrix}[\boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad \boldsymbol{M}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}]+\varepsilon_2^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{QN}_1^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix}[0 \quad \boldsymbol{N}_1\boldsymbol{Q} \quad 0]<0$$

令 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{Q}$,根据引理 3 可证得与不等式(32)等价条件式(36)。此外,为抑制外界对减振控制系统干扰,引入 H_∞ 性能指标约束式(33),并结合引理 1~3,可证得等价条件式(37)。同理可证斜拉索振幅、振速稳态协方差约束式(34)等价于式(38)。

若要进一步优化减振控制器增益及抑制扰动的 H_∞ 性能指标 γ,需结合凸优化方法,以解决系统 H_∞ 性能指标 γ、圆盘极点可配置、振幅和振速稳态协方差性能指标约束下的极小值问题。

2.4 凸优化问题求解

假设在非脆弱控制下能同时满足 H_∞ 性能指标约束、圆盘极点性能指标约束和方差性能指标约束,由定理 6 可知,式(36)~(39)必有可行解,其不仅使 H_∞ 性能指标 γ 较小,且其稳态状态方差性能指标的上界与极点性能指标有相容的较小上界[22],即

$$\begin{cases}\min\{\mathrm{tr}\boldsymbol{Q}\}:(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_7,\gamma^2)\\ \quad \text{s. t. (式(36)~(39))}\end{cases} \tag{40}$$

令 $(\boldsymbol{Q}_L,\boldsymbol{S}_L,\varepsilon_{1L},\varepsilon_{2L},\cdots,\varepsilon_{7L},\gamma_L^2)$ 为上述极值问题的相应极小值,若给定方差上界 $\sigma^2>\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}_L)$,则式(36)~(39)必有可行解。于是,在给定 H_∞ 性能指标 γ、极点配置性能指标和方差上界性能指标 $\sigma^2>\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}_L)$ 时,则定理 7 成立。

定理 7:若减振控制器闭环系统式(12)极点可配置,取 H_∞ 性能指标 γ、圆盘极点性能指标以及振速、振幅稳态协方差性能指标,则满足 $\sigma^2>\mathrm{diag}(\boldsymbol{Q}_L)$ 的方差上界指标 σ^2 与区域极点指标 $\boldsymbol{F}(-q,r)$ 相容,即

$$\begin{cases}\min\{\gamma^2\}:(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{S},\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_7,\gamma^2)\\ \quad \text{s. t. (式(36)~(39)},\boldsymbol{Q}<\boldsymbol{Q}_0)\end{cases} \tag{41}$$

3 仿真实例

3.1 系统状态空间方程矩阵参数

以浙江省某跨海大桥 C22(长索)和 C13(短索)斜拉索为实例验证。磁流变阻尼器安装方式如图 1 所示。斜拉索与 MR-60 型磁流变阻尼器相互垂直于连接处,且对称安装在距离桥面高 1.8 m 位置。

MR-60 型磁流变阻尼器最大工作电流为 2 A,最大阻尼力为 8 kN,部分工况参数[23]如表 1 所示。

表 1 MR-60 型磁流变阻尼器工况参数

Tab. 1 Working parameters of MR-60 magnetorheological damper

部件	材料	比热容/(J·(kg·K)$^{-1}$)	导热系数/(W·(m^2·K)$^{-1}$)
活塞	纯铁	455	81.1
永磁	磁铁	502	9
线圈	铜	390	393
磁液	SG-MRF2035	1 360	1

斜拉索材料选用镀锌钢丝,其弹性模量为 200 GPa,C22 和 C13 斜拉索基本参数如表 2、3 所示。

表 2 C22 斜拉索基本参数

Tab. 2 Basic parameters of C22 stay cable

参数	索长/m	直径/m	索力/kN	倾角/(°)	单位质量/(kg·m^{-1})
数值	221.26	0.151	4 925	30.83	80.1

表 3 C13 斜拉索基本参数

Tab. 3 Basic parameters of C13 stay cable

参数	索长/m	直径/m	索力/kN	倾角/(°)	单位质量/(kg·m^{-1})
数值	159.38	0.127	3 653	37.55	56.5

结合式(8),取形函数数目 $n=2$[9],可计算得 C22 和 C13 号斜拉索参数矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{D}$ 及 W_K 为

$$\boldsymbol{M}_{C22}=\begin{bmatrix}0.1624 & -0.0013\\ -0.0013 & 0.6542\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{C22}=\begin{bmatrix}-0.0020 & 0.0098\\ 0.0098 & 0.6431\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{C22}=\begin{bmatrix}0.0050 & 0\\ 0 & 0.0168\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{C22}=[1.0000 \quad 0.1643]$$

$$\boldsymbol{M}_{C13}=\begin{bmatrix}0.1145 & -0.0010\\ -0.0010 & 0.4650\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K}_{C13}=\begin{bmatrix}-0.0018 & 0.0073\\ 0.0073 & 0.4769\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{C13}=\begin{bmatrix}0.0069 & 0\\ 0 & 0.0233\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}_{C13}=[1.0000 \quad 0.1919]$$

$$\boldsymbol{A}_{C22}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.0147 & -0.0682 & -0.0308 & -0.0010\\ -0.0149 & -0.9832 & -0.0001 & -0.0257\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{C22}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 8.1197\\ 0.4149\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}_{C22}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 6.1577 & 0.0129\\ 0.0129 & 1.5168\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{C13}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.0156 & -0.0727 & -0.0603 & -0.0004\\ -0.0157 & -1.0257 & -0.0001 & -0.0501\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}_{C13}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 11.5169\\ 0.5858\end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}_{C13}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 8.7338 & 0.0188\\ 0.0188 & 2.1506\end{bmatrix}$$

$$W_K=0.1002$$

3.2　系统不确定参数及控制器增益摄动不确定性参数

考虑到实际的工程环境、斜拉索模型的非线性和增益摄动范围等因素，引入 5% 不确定性误差作为模型输入矩阵和控制器参数摄动误差，则

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}=\operatorname{diag}\begin{bmatrix}-0.3669-19.15i\\-0.3669+19.15i\\-12.3000-101i\\-12.3000+101i\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}0&0&0.0500&0\\0&0&0&0.0500\\-0.0025&-0.0097&-0.0024&0.0001\\-0.0029&-0.0540&0&-0.0019\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\0.2714\\0.0164\end{bmatrix}$$

由于非脆弱减振控制器增益 $\boldsymbol{K}_1^*$ 在实际执行时为[24-25]

$$\boldsymbol{K}_1^*=\boldsymbol{K}_1+r_1(t)\Delta\boldsymbol{K}_1^*+r_2(t)\Delta\boldsymbol{K}_2^*+r_3(t)\Delta\boldsymbol{K}_3^*+r_4(t)\Delta\boldsymbol{K}_4^*$$

其中　$\Delta\boldsymbol{K}_1^*=[1\quad 0\quad 0\quad 0]$　$\Delta\boldsymbol{K}_2^*=[0\quad 1\quad 0\quad 0]$

$$\Delta\boldsymbol{K}_3^*=[0\quad 0\quad 1\quad 0]\quad \Delta\boldsymbol{K}_4^*=[0\quad 0\quad 0\quad 1]$$

$$-1\leqslant r_i\leqslant 1\quad (i=1,2,3,4)$$

则可定义矩阵

$$\boldsymbol{F}(t)=\operatorname{diag}[r_1(t)\quad r_2(t)\quad r_3(t)\quad r_4(t)]$$

同时，考虑到 5% 输入误差，则取

$$\boldsymbol{M}_1=[0.05\quad 0.05\quad 0.05\quad 0.05]$$

$$\boldsymbol{N}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

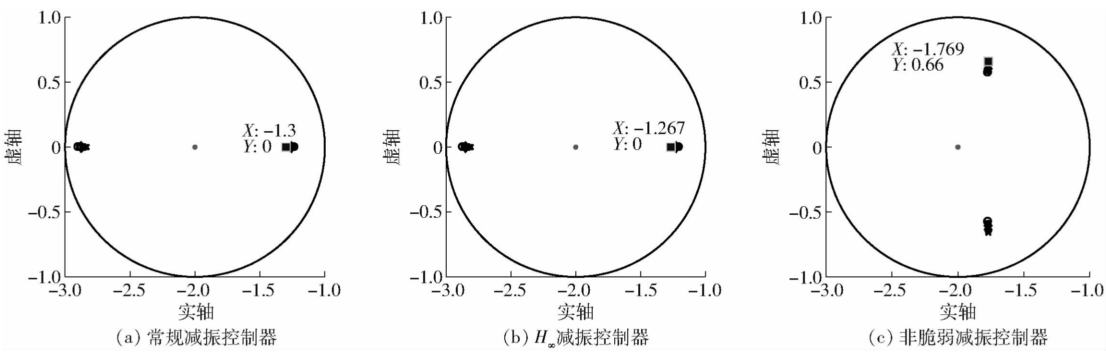
利用 Matlab 并结合定理 2、定理 4、定理 6、定理 7 可得 C22、C13 号斜拉索相应控制器增益及抗扰指标 γ。

常规减振控制器增益为：$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{C22}}=[-0.4316\quad 0.0265\quad -0.5009\quad -0.0680]$；$\boldsymbol{K}_{1\mathrm{C13}}=[-0.3289\quad 0.0114\quad -0.3605\quad -0.0407]$。

H_∞ 减振控制器增益及抗扰指标 γ 为：$\boldsymbol{K}_{2\mathrm{C22}}=[-0.4175\quad 0.0078\quad -0.4952\quad -0.0514]$；$\boldsymbol{K}_{2\mathrm{C13}}=[-0.3481\quad 0.0014\quad -0.3667\quad -0.0330]$；$\gamma_{\mathrm{C22min}}=2.1214$、$\gamma_{\mathrm{C13min}}=2.1431$，取 H_∞ 性能指标 $\gamma_{\mathrm{C22}}=\gamma_{\mathrm{C13}}=3$。

非脆弱减振控制器增益及抗扰指标为：$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{C22}}=[-0.5125\quad -0.9059\quad -0.5664\quad 1.1511]$；$\boldsymbol{K}_{3\mathrm{C13}}=[-0.3873\quad -0.5603\quad -0.4104\quad 0.6739]$；$\gamma_{\mathrm{C22min}}=1.2519$；$\gamma_{\mathrm{C13min}}=1.7169$，取 H_∞ 性能指标 $\gamma_{\mathrm{C22}}=\gamma_{\mathrm{C13}}=2$。

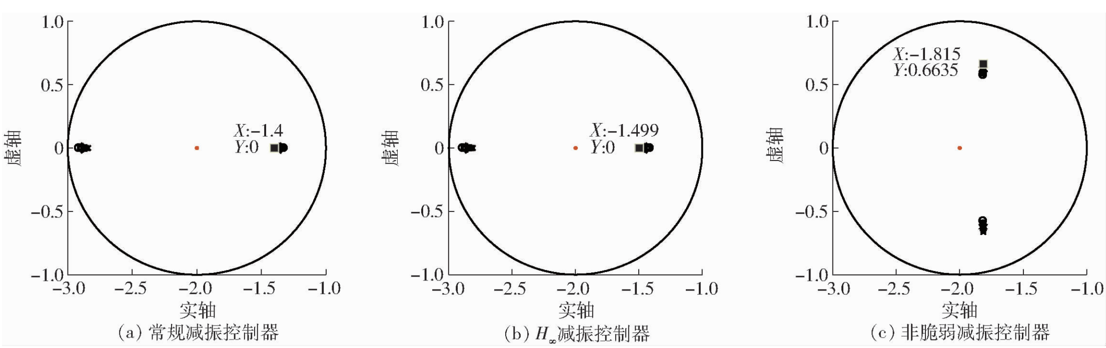
非脆弱减振控制器控制下的极点与常规减振控制器、H_∞ 减振控制器控制下的极点能够配置在同一圆盘 $\boldsymbol{F}(-2,1)$ 内，得到极点分布图如图 2、3 所示。



(a) 常规减振控制器　(b) H_∞减振控制器　(c) 非脆弱减振控制器

图 2　C22 号斜拉索 3 种不同减振控制系统闭环极点分布图

Fig. 2　Closed-loop pole distribution of three different vibration damping control systems for C22 stay cable



(a) 常规减振控制器　(b) H_∞减振控制器　(c) 非脆弱减振控制器

图 3　C13 号斜拉索 3 种不同减振控制系统闭环极点分布图

Fig. 3　Closed-loop pole distribution of three different vibration damping control systems for C13 stay cable

以不同均值高斯白噪声（$W_K=0.100\,2$、$2W_K=0.200\,4$）分别表示不同随机载荷扰动，通过 Simulink 仿真计算，获得 3 种不同减振控制器在不同随机扰动、不同振动状态下的零输入响应曲线，如图 4、5 所示。

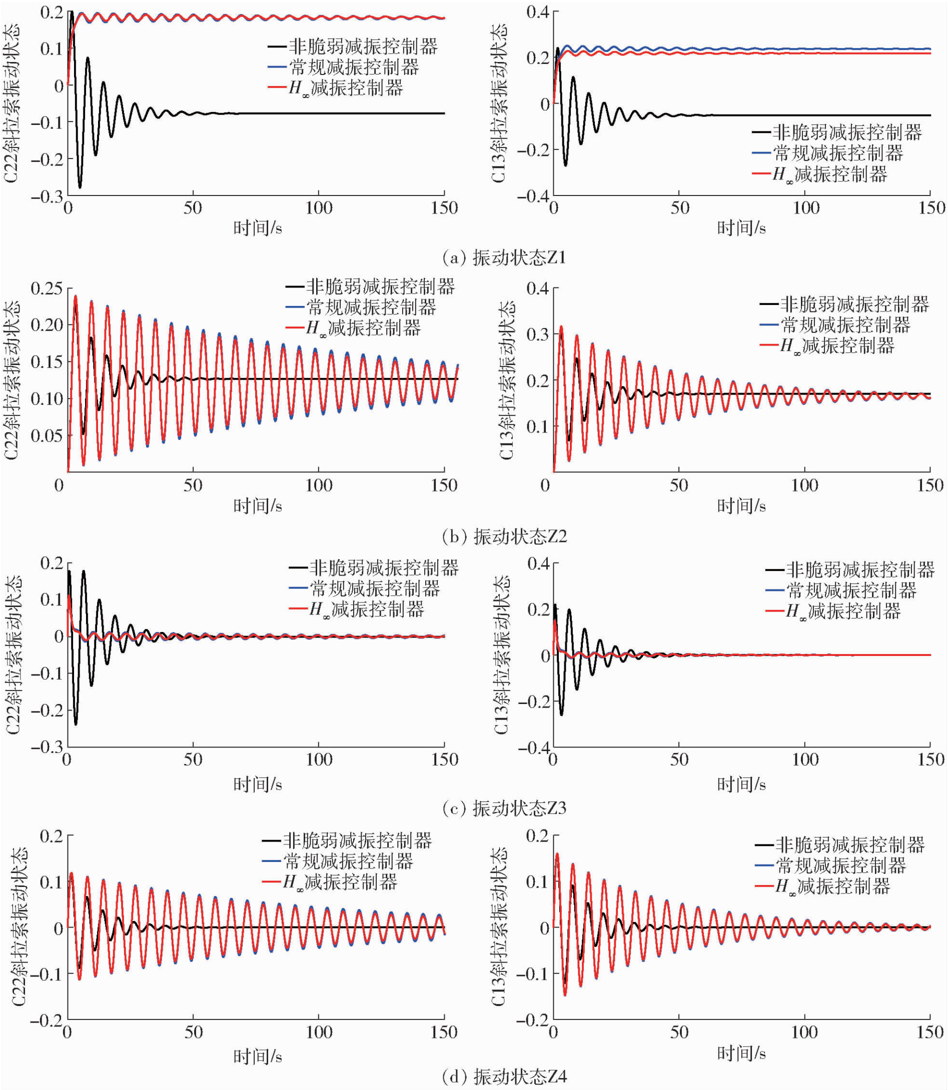


图 4　随机扰动为 0.100 2 时 C22 号与 C13 号斜拉索不同状态零响应输入曲线

Fig. 4　Zero response input curves of C22 and C13 stay cables with random disturbances at 0.100 2

由图 4、5 可知，常规减振控制器指仅含极点配置性能指标约束、稳态协方差性能指标约束的闭环控制系统；H_∞ 减振控制器指同时拥有 H_∞ 性能指标约束、极点配置性能指标约束、稳态协方差性能指标约束的闭环控制系统；非脆弱减振控制器指闭环系统不仅满足 H_∞ 性能指标约束、极点配置性能指标约束、稳态协方差性能指标约束，且求取的反馈控制矩阵 $\boldsymbol{K}_1$ 在一定的摄动范围内仍能使减振控制器闭环系统保持稳定。此外，Z1、Z2 表示系统在减振控制器作用下振动幅值的响应状态；Z3、Z4 表示系统在减振控制器作用下振动速度的响应状态。

3.3　仿真分析比较

通过对比 H_∞ 减振控制器及非脆弱减振控制器抗扰性能指标值 γ 可知，非脆弱减振控制器闭环系统拥有较小的抗扰指标值。同时，由图 2、3 分析可知，在非脆弱控制及多性能指标约束作用下（H_∞ 性能指标约束、圆盘极点约束、稳态协方差性能指标约束），非脆弱减振控制器闭环系统的极点与常规减振控制器闭环系统的极点、H_∞ 减振控制器闭环系统的极点能配置在同一圆盘 $\boldsymbol{F}(-2,1)$ 内，使得系统的稳定性得以保证。

此外，由图 4、5 知，在 W_K 及 $2W_K$ 2 种强度的随机载荷扰动下，C22 号与 C13 号斜拉索在 H_∞ 减振控制器控制下的不同振动状态比常规减振控制器控制下的振动幅值和振动速度的收敛时间有所降低，但减少量不太明显，且收敛时间均在 150 s 后；而在非脆弱减振控制器控制下的不同振动状态的振动幅值和振动速度在 70 ~ 80 s 内已收敛。同时，在 $W_K=0.100\,2$ 和 $2W_K=0.200\,4$ 随载荷扰动下，C22 号索

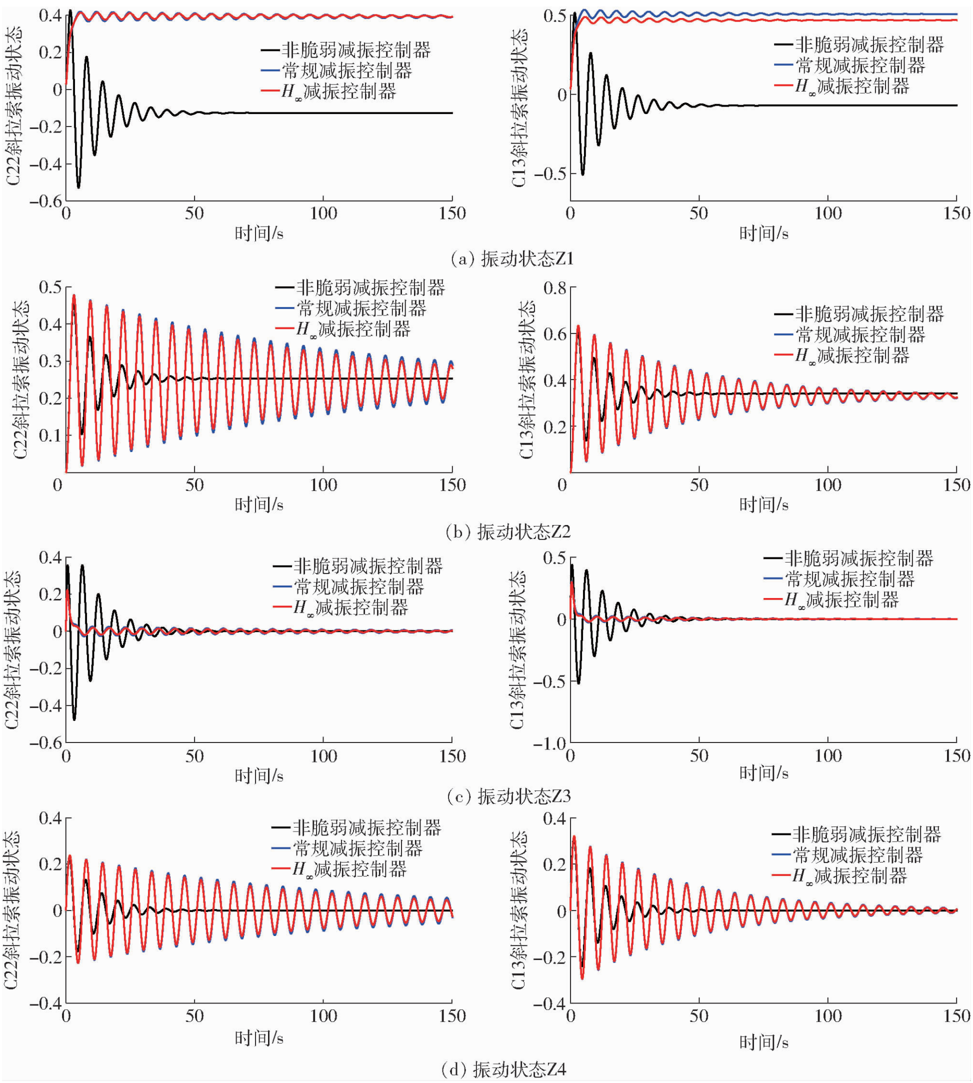


图 5　随机扰动为 0.200 4 时 C22 号与 C13 号斜拉索不同状态零响应输入曲线

Fig. 5　Zero response input curves of C22 and C13 stay cables with random disturbances at 0.200 4

振幅降低 57.805%，收敛时间缩短 56.705%；C13 号索振幅降低 74.395%，收敛时间缩短 77.845%。

4　结论

（1）将非脆弱控制和 H_∞ 性能指标约束、圆盘极点性能指标约束及稳态协方差性能指标约束相结合，应用到斜拉索减振控制器的设计方法中，既能保证减振控制系统的快速性与稳定性，改善减振控制器参数易发生摄动的状况，也抑制了外界扰动对减振控制系统的影响，具有较好的抗扰性能。

（2）在不同随机载荷扰动下，多性能指标约束下的非脆弱减振控制器能有效抑制外界干扰，使斜拉索减振控制系统保持稳定。实例仿真表明，C22 号索振幅降低 57.805%，收敛时间缩短 56.705%；C13 号索振幅降低 74.395%，收敛时间缩短 77.845%，具有良好的工程应用价值。

参　考　文　献

[1]　LU L, LI J. Longitudinal vibration and its suppression of a railway cable-stayed bridge under vehicular loads[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2018, 18(4):1850052.

[2]　金京设,陈照波,程明,等.改进阻尼特性的内置平行双线圈磁流变阻尼器研究[J/OL].农业机械学报, 2017,48(3):368 – 375. KIM Kyongsol, CHEN Zhaobo, CHENG Ming, et al. Magneto-rheological damper with parallel double coil for improvement of damping performance[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(3):368 – 375. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20170347&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.03.047. (in Chinese)

[3]　OU J, LI H. Analysis of capability for semi-active or passive damping systems to achieve the performance of active control systems[J]. Structural Control & Health Monitoring, 2010, 17(7):778 – 794.

[4]　禹见达,陈政清,王修勇,等. 改进的 Bang – Bang 控制算法的理论与试验研究[J].振动与冲击,2010,29(2):60 – 63. YU Jianda, CHEN Zhengqing, WANG Xiuyong, et al. Theoretical and experimental study on an improved Bang – Bang control

algorithm[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(2): 60 - 63. (in Chinese)
[5] 樊晓平,武利冲,杨胜跃. 斜拉索的磁流变半主动自适应控制器设计[J]. 控制理论与应用,2010,27(10):1307 - 1314.
FAN Xiaoping, WU Lichong, YANG Shengyue. Design of semi-active adaptive controllers for the stay cables using magneto-rheological damper[J]. Control Theory & Applications, 2010, 27(10): 1307 - 1314. (in Chinese)
[6] HEO G, JOONRYONG J. Semi-active vibration control in cable-stayed bridges under the condition of random wind load[J]. Smart Materials and Structures, 2014, 23(7):075027.
[7] 何朕,王广雄,张静,等. 控制系统的脆弱性分析[J]. 控制理论与应用, 2013, 30(1):95 - 100.
HE Zhen, WANG Guangxiong, ZHANG Jing, et al. Fragility analysis for control systems[J]. Control Theory & Applications, 2013, 30(1):95 - 100. (in Chinese)
[8] YEGANEHFALLAH A, ATTARI N K A. Robust control of seismically excited cable stayed bridges with MR dampers[J]. Smart Materials and Structures, 2017, 26(3):035056.
[9] 段玉贺,张刚,韩祥兰,等. 斜拉索-磁流变阻尼器多性能约束下的减振控制算法[J]. 船舶工程,2018,40(7):52 - 57.
DUAN Yuhe, ZHANG Gang, HAN Xianglan, et al. Vibration-reducing control algorithm for cable-magnetorheological damper system with multi-performance constraints[J]. Ship Engineering, 2018, 40(7):52 - 57. (in Chinese)
[10] 王昕. 多指标约束的满意 PI ~ λD ~ μ 控制器设计[J]. 华东理工大学学报(自然科学版), 2014, 40(3):357 - 364.
WANG Xin. Satisfactory fractional PI ~ λD ~ μ controller design with multiple desired indexes constraints[J]. Journal of East China University of Science and Technology(Natural Science Edition), 2014, 40(3):357 - 364. (in Chinese)
[11] 代慧芳. 不确定中立时滞系统的非脆弱 H_∞ 控制器[J]. 控制工程, 2017, 24(3):655 - 660.
DAI Huifang. Non-fragile H_∞ control for neutral systems with mixed delay[J]. Control Engineering of China, 2017, 24(3): 655 - 660. (in Chinese)
[12] 邬喆华,陈勇. 磁流变阻尼器对斜拉索的振动控制[M]. 北京:科学出版社, 2007.
[13] 李利军. 斜拉索风雨振分析及磁流变阻尼器减振应用研究[D]. 西安: 长安大学, 2005.
LI Lijun. Analysis of wind-induced vibration of stay cables and application of magnetorheological damper vibration reduction [D]. Xi'an: Chang'an University, 2005. (in Chinese)
[14] 岳晓瑞,徐海祥,罗薇,等. 海洋工程结构物风载荷计算方法比较[J]. 船海工程, 2012, 41(1): 99 - 100.
YUE Xiaorui, XU Haixiang, LUO Wei, et al. Comparison of wind load calculation methods for marine engineering structures [J]. Ship & Ocean Engineering, 2012, 41(1): 99 - 100. (in Chinese)
[15] 韩笑冬,葛龙,王执铨. 多性能指标约束下动态输出反馈容错控制[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2008, 48(增刊2):105 - 110.
HAN Xiaodong, GE Long, WANG Zhiquan. Dynamic output feedback fault-tolerant control with multiple performance indices [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2008, 48(Supp.2): 105 - 110. (in Chinese)
[16] 韩祥兰,张刚,王执铨. 多性能指标约束下的模糊容错控制系统设计[J]. 北京理工大学学报,2009,29(1):38 - 43.
HAN Xianglan, ZHANG Gang, WANG Zhiquan. Design of fuzzy fault-tolerant control system with multi-indices constraints [J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2009, 29(1): 38 - 43. (in Chinese)
[17] 薄翠梅,王执铨,张广明,等. 一类多指标约束下模糊非线性系统的满意容错控制[J]. 控制与决策, 2010,25(7):998 - 1003.
BO Cuimei, WANG Zhiquan, ZHANG Guangming, et al. Satisfactory fault-tolerant control with multi-indices constraints for fuzzy nonlinear systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(7):998 - 1003. (in Chinese)
[18] 刘胜,王五桂. 不确定广义系统多约束指标的相容性[J]. 控制与决策, 2012, 27(12):1876 - 1880.
LIU Sheng, WANG Wugui. Consistency of multiple constraint indices for uncertain descriptor systems [J]. Control and Decision, 2012, 27(12): 1876 - 1880. (in Chinese)
[19] 肖民卿,陈金玉,曹长修. Delta 算子系统具有极点约束的鲁棒非脆弱方差控制[J]. 控制理论与应用,2008,25(6):1139 - 1141.
XIAO Minqing, CHEN Jinyu, CAO Changxiu. Robust non-fragile variance control for Delta-operator systems with disk-pole constraints[J]. Control Theory & Applications, 2008, 25(6): 1139 - 1141. (in Chinese)
[20] GAO X, TEO K L, DUAN G R. Non-fragile robust\r, H\r, ∞ \r, control for uncertain spacecraft rendezvous system with pole and input constraints[J]. International Journal of Control, 2012, 85(7):933 - 941.
[21] 韩东颖,时培明,赵东伟. 非线性轧机机电系统电机速度鲁棒非脆弱控制[J]. 电机与控制学报,2015,19(3):82 - 87.
HAN Dongying, SHI Peiming, ZHAO Dongwei. Speed robust and non-fragile control on motor of rolling mill's nonlinear mechanical and electrical system[J]. Electric Machines and Control, 2015,19(3): 82 - 87. (in Chinese)
[22] 张家凡. 一种求解控制理论问题的新工具:LMI 凸优化方法[J]. 计算技术与自动化,2003,22(1):8 - 11.
ZHANG Jiafan. A new tool in solving control theory problems: LMI convex optimization method[J]. Computing Technology and Automation, 2003,22(1): 8 - 11. (in Chinese)
[23] 冯志敏,孙捷超,赵洪洋,等. 温度效应下磁流变阻尼器动力学仿真建模与试验[J/OL]. 农业机械学报,2018,49(9): 382 - 388.
FENG Zhimin, SUN Jiechao, ZHAO Hongyang, et al. Dynamic simulation modeling and test of MR damper under temperature effect [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(9): 382 - 388. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20180945&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.09.045. (in Chinese)
[24] SHOUMIN A, LEI H, SHUSHENG G, et al. Robust non-fragile state feedback control of discrete time-delay systems[M]. 2005.
[25] 高兴泉,胡云峰. 考虑时域约束的线性系统非脆弱 H_∞ 控制[J]. 计算机应用,2014,34(7):2140 - 2144.
GAO Xingquan, HU Yunfeng. Non-fragile H_∞ control of linear system with time-domain constraints[J]. Journal of Computer Applications, 2014, 34(7): 2140 - 2144. (in Chinese)