doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2020.01.044

具有解析式位置正解的2T1R并联机构运动性能分析

沈惠平[1] 周金波[1] 尤晶晶[2] 杨廷力[1]
(1.常州大学现代机构学研究中心,常州 213016;2.南京林业大学机械电子工程学院,南京 210037)

摘要:求解具有解析式位置正解且部分运动解耦的并联机构,有利于后续的误差分析、动力学分析、运动轨迹规划与控制等。基于方位特征方程(POC)的并联机构设计理论与方法,设计了两种具有解析式位置正解且部分运动解耦的2T1R并联机构,并对这两种机构进行了方位特征、自由度及耦合度等主要拓扑性能分析;提出基于拓扑特征的运动学建模与求解方法,并据此求解了两种机构的解析式位置正解;基于导出的位置反解,分析了两种机构工作空间、奇异位形、动平台的速度与加速度变化规律。最后比较了两种机构的运动性能,选择了优选机型。为优选机型的动力学分析与样机研制提供了理论基础。

关键词:并联机构;2T1R;解析解;拓扑设计;工作空间;奇异性
中图分类号:TH112 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-1298(2020)01-0398-12 **OSID**:

2T1R Parallel Mechanism with Analytic Positive Position Solutions and Its Kinematic Performance Based Optimization

SHEN Huiping[1] ZHOU Jinbo[1] YOU Jingjing[2] YANG Tingli[1]
(1. *Research Center of Modern Mechanism*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213016, *China*
2. *College of Mechanical and Electronic Engineering*, *Nanjing Forestry University*, *Nanjing* 210037, *China*)

Abstract: The parallel mechanisms with analytic positive position solution and partial motion decoupling are of great benefit to subsequent research such as error analysis, workspace solution, singularity analysis and stiffness analysis, dynamic performance analysis, motion trajectory planning and control. Firstly, a class of two 2T1R parallel mechanisms with analytic positive position solutions and partial motion decoupling were proposed according to the design theory and method of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristics equation (POC). The main topological performance, including position and orientation characteristics, degree of freedom and coupling degree calculation, was performed. Secondly, according to the method for kinematics modeling based on topological characteristics by the author, the analytic positive solution of one of the PMs was solved in detail. Then, based on the derived position inverse solution, the workspace, singular configuration, velocity and acceleration variation of the PM were analyzed. Finally, the difference between the two PMs in the above various performance indexes was compared and analyzed. Based on this, the preferred PM was selected. Because of its simple structure, good kinematics and dynamic performance, it had potential applications in the manufacturing, which was especially suitable for handling, grabbing, loading and unloading of workpieces with large length in the longitudinal direction. The research result laid a theoretical foundation for the dynamic analysis and prototype development of the preferred PM.

Key words: parallel mechanism; 2T1R; analytical solution; topology design; workspace; singularity

0 引言

三自由度的三维纯平移和三维纯转动并联机构已得到较多的研究与应用[1-4]。而具有转动和移动混合输出的三自由度并联机构因驱动元件少、制造容易、结构紧凑等特点,在空间抓取、调姿、定位等实际操作中也具有较高的研究价值和应用前景[5-8]。

目前,对两平移一转动(2T1R)并联机构研究相

收稿日期:2019-06-26 修回日期:2019-07-28
基金项目:国家自然科学基金项目(51475050)和江苏省重点研发计划项目(BK20161192)
作者简介:沈惠平(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人机构学研究,E-mail: shp65@126.com

对较少，但这类机构可用于空间抓放定位操作或娱乐、调姿装备等。WANG 等[9] 提出了一种 Cylindrical 型两平移一转动并联机构；KONG 等[10]、杨宁等[11]分别基于螺旋理论对 2T1R 型并联机构的结构综合进行了研究；REFAAT 等[12]根据位移李群理论对三自由度运动并联机构进行型综合研究；张彦斌等[13]根据线性变换理论，对无奇异完全各向同性 2T1R 型空间并联机构进行了结构综合；杨廷力等[14-16]基于单开链单元理论对 2T1R 型并联机构进行了型综合，得到多种含有平面闭回路结构的新型机构；余顺年等[17]提出了一种以两平移一转动并联机构为主体的串并联中医推拿机器人机型。

上述大多数 2T1R 机构不具有解析式位置正解，给后续研究（误差分析、动力学正解求解以及实时运动控制等）带来了困难。因此，具有解析式位置正解的并联机构的拓扑设计与分析，一直是机构学研究的方向之一，目前设计的具有解析式位置正解的并联机构拓扑类型较少。沈惠平等[18]发现，机构耦合度 $\kappa=0$ 时可容易地直接求解 6-SPS 并联机构的解析正解，并提出按机构耦合度 κ 分类求解 6-SPS 并联机构位置正解全部实数解的数值法；尤晶晶等[19]提出了一种 12-6 台体型 Stewart 冗余并联机构，并推导了适用于实时反馈控制的正向运动学全解析算法。

本文基于方位特征（POC）的并联机构设计理论与方法[14-16]，提出两种低耦合度（$\kappa=1$）的 2T1R 并联机构，给出这两种机构的 4 个主要拓扑特性（POC 集、自由度、耦合度、运动耦合性），并对其运动学（位置正逆解求解、工作空间、奇异位形以及速度、加速度）进行计算分析与比较。

1　机型设计与运动学建模

1.1　机型设计

根据基于方位特征（POC）方程的并联机构拓扑结构设计理论[14-16]，提出了一类两种 2T1R 三自由度并联机构，如图 1 所示。静平台 0 上的移动副 P_2 与 P_3为沿 Y 轴方向的共轴线布置，移动副 P_1 与 P_2 平行。

机构 1 的拓扑结构设计如图 1a 所示：

（1）右侧两滑块（P_2、P_3）平面六杆机构（记作：2P4R）回路的中间构件 9 上，串联两个轴线相互平行的转动副 R_1 与 R_2，且 R_2副与动平台 1 相连，得到第 Ⅰ 个混合支链（$HSOC_1$）。

（2）左侧支链由一个滑块（P_1）与一个 4R 平行四边形机构（$R_{a1}R_{b1}R_{c1}R_{d1}$）及转动副 R_3串联而成，且 R_3副与动平台 1 相连，得到第 Ⅱ 个混合支链（$HSOC_2$）。

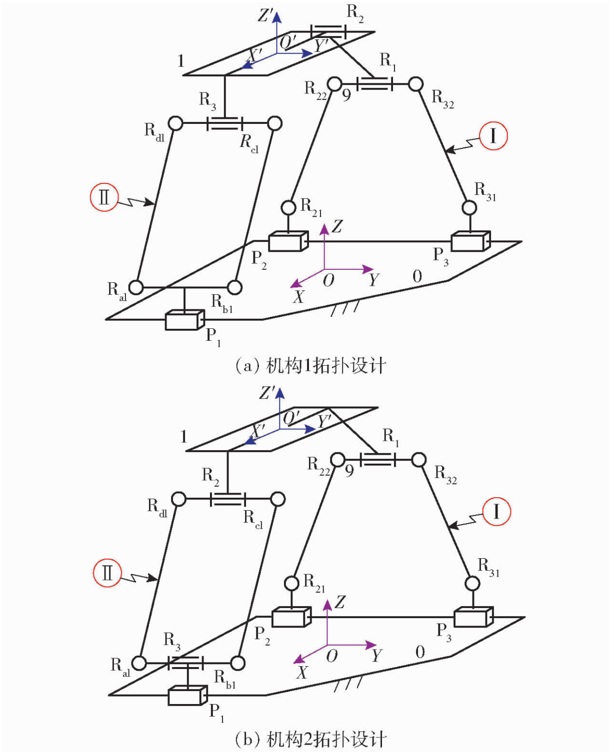


图 1　具有解析式位置正解的 2T1R 并联机构

Fig. 1　2T1R PMs with analytic positive position solution

（3）机构运动时，两滑块平面六杆机构 2P4R 始终与平行四边形机构的运动平面 YOZ 平行。

而机构 2 的拓扑结构设计，如图 1b 所示：

（1）右侧 2P4R 平面六杆机构的中间构件 9 通过串联一个转动副 R_1，直接与动平台 1 相连，得到第 Ⅰ 个混合支链（$HSOC_1$）。

（2）左侧支链由一个滑块（P_1）、转动副 R_3、4R 平行四边形机构及转动副 R_2串联而成，且 $R_3 \parallel R_2$，R_2副与动平台 1 相连，得到第 Ⅱ 个混合支链（$HSOC_2$）。

可见，机构 1 和机构 2 的主要区别在于：3 个平行轴线被动转动副（R_1、R_2、R_3）的位置发生了变换，其余没变。

1.2　基于拓扑特征的运动学建模方法

基于拓扑特征的机构运动学建模方法基本思路：首先进行机构的拓扑分析，揭示其拓扑特征；再利用这些拓扑特征，进行运动学方程建模与求解；这种建模方法的优点在于：拓扑特征的利用，等于增加了运动方程数目，从而使方程求解方便。

1.2.1　机构的 POC 集计算

机构 POC 方程为[14]

$$M_{bi}=\bigcup_{j=1}^{k} M_{Sj} \tag{1}$$

$$M_{Pa}=\bigcap_{i=1}^{n} M_{bi} \tag{2}$$

式中　M_{Sj}——当支链中第 j 个子 SOC 的 POC 集

M_{bi}——第 i 条支链末端的 POC 集

M_{Pa}——机构动平台的 POC 集

机构 POC 集确定如下：

(1)支链拓扑结构

混合支链Ⅰ中，2P4R 平面六杆机构中间杆 9 的输出运动显然为两平移一转动(2T1R)，与 $R_1 \parallel R_2$ 串联后，其末端的输出为三平移两转动(3T2R)；混合支链Ⅱ中，P_1 副与一个 4R 平行四边形机构及 R_3 副串联，显然，其末端输出运动为两平移一转动(2T1R)。故混合支链Ⅰ、Ⅱ的拓扑结构等效地记为

$$\mathrm{HSOC}_1\{-(P_2^{(2P4R)}-P_3^{(2P4R)})\perp R^{(2P4R)}\perp R_1 \parallel R_2-\}$$

$$\mathrm{HSOC}_2\{-P_1(\perp P^{(4R)})\parallel R_3-\}$$

(2)选定动平台 1 上的 O' 点作为基点。

(3)混合支链Ⅰ、Ⅱ末端构件的 POC 集确定

由式(1)可得

$$M_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix} t^2(\parallel(YOZ)) \\ r^1(\parallel R_{22}) \end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix} t^2(\parallel(XOZ)) \\ r^1(\parallel R_2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel(R_{22},R_2)) \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} t^1(\parallel P_1)\cup t^1(\perp P_1) \\ r^1(\parallel R_3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^2(\parallel(YOZ)) \\ r^1(\parallel R_3) \end{bmatrix}$$

(4)动平台 POC 集确定

由式(2)可得

$$M_{Pa}=M_{\mathrm{I}}\cap M_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} t^2(\parallel(YOZ)) \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \tag{3}$$

由此可知，机构动平台 1 产生 YOZ 平面内的两维移动，以及绕转动副 R_1 轴线的一维转动。而混合支链Ⅰ中的中间杆 9 在混合支链Ⅱ的作用下，只存在沿 Y、Z 轴方向的移动（即中间杆 9 的运动始终平行于静平台），这个特殊的拓扑结构是求解本机构解析式位置正解的关键。

1.2.2 机构的自由度分析

并联机构全周性 DOF 公式[14-15]为

$$F=\sum_{i=1}^{m} f_i-\sum_{j=1}^{v}\xi_j \tag{4}$$

其中 $$\xi_j=\dim.\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{j} M_{b_i}\right)\cup M_{b_{(j+1)}}\right\} \tag{5}$$

$$v=m-n+1$$

式中 F——机构自由度

f_i——第 i 个运动副的自由度

m——运动副数　　n——构件数

v——独立回路数

ξ_j——第 j 个独立回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^{j} M_{b_i}$——前 j 条支链组成的子并联机构 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$——前 $j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

混合支链Ⅰ中，2P4R 六杆平面机构为第 1 个独立回路，即 $\mathrm{Loop}_1\{-(P_2^{(2P4R)}-P_3^{(2P4R)})\perp R^{(2P4R)}-\}$，显然，其独立位移方程数 $\xi_1=3$。

由混合支链 HSOC_2 及子串 $R_1 \parallel R_2$ 构成第 2 个回路，记作 $\mathrm{Loop}_2\{-P_1(\perp P^{(4R)})\parallel R_3 \parallel R_2 \parallel R_1-\}$，其独立位移方程数 ξ_2，由式(5)可得

$$\xi_2=\dim.\{M_{\mathrm{II}}\cup M_{\mathrm{I}}\}=\dim.\left\{\begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel(R_{32},R_2)) \end{bmatrix}\right\}=5$$

由式(4)可得并联机构自由度为

$$F=\sum_{i=1}^{3} f_i-\sum_{j=1}^{3}\xi_j=(6+5)-(3+5)=3$$

因此，该机构自由度为 3，当取静平台 0 上的移动副 P_1、P_2、P_3 为驱动副时，动平台 1 可实现两平移一转动的运动输出。

当 3 个移动副以相同的速度运动时，该机构可实现大范围的操作移动；而当其取不同的速度时，可实现小范围内的三平移精确作业。因此，该机构适合于长度方向较大尺寸工件的搬运、抓取、上下料等操作。

1.2.3 机构耦合度计算

由基于单开链(SOC)的机构组成原理[20]可知，任一机构可分解为约束度为正、零、负的 3 种有序单开链(SOC)，第 j 个 SOC_j 的约束度定义为

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m_j} f_i-I_j-\xi_j \tag{6}$$

其中 $$\Delta_j=\begin{cases} \Delta_j^+=1,2,3,\cdots \\ \Delta_j^0=0 \\ \Delta_j^-=-1,-2,-3,\cdots \end{cases}$$

式中 m_j——第 j 个 SOC_j 的运动副数

I_j——第 j 个 SOC_j 的驱动副数

一组有序的 v 个 SOC 可划分为若干个最小的子运动链 SKC(Sub-kinematics chain)，每个 SKC 仅含一个自由度为零的基本运动链(BKC)[16]，对一个 SKC 而言，须

$$\sum_{j=1}^{v}\Delta_j=0 \tag{7}$$

因此，SKC 耦合度 κ 定义为

$$\kappa=\Delta_j^+=|\Delta_j^-|=\frac{1}{2}\min\left\{\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|\right\} \tag{8}$$

式中 $\min\left\{\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|\right\}$——SKC 分解为 v 个 $\mathrm{SOC}(\Delta_j)$，有多种分配方案，取 $(\sum|\Delta_j|)$ 为最小者

耦合度 κ 的物理意义：①κ 反映了 SKC 内各回路变量之间的关联、依赖程度，且已证明：κ 越大，机构运动学、动力学问题求解的复杂度越高。②机构的位置正解求解可转换为其各个 SKC 的位置求解。③对于 $\kappa=0$ 的 SKC，其每个回路的运动量解析解都能独立求出；若 $\kappa>0$，表明 SKC 的运动量需多个回路方程联立求解，可用数值法或代数法求得其位置正解。

1.2.2 节已分别求得该机构两个回路的 ξ 值，即 $\xi_1=3$、$\xi_2=5$，由式(6)可得约束度分别为

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m_1} f_i-I_1-\xi_1=6-2-3=1$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m_2} f_i-I_2-\xi_2=5-1-5=-1$$

于是，由式(8)可得

$$\kappa=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|=\frac{1}{2}(|+1|+|-1|)=1$$

该机构只含有一个 SKC，且该 SKC 耦合度 $\kappa=1$。因此，该机构位置正解时，仅需在约束度为正值($\Delta_j>0$)的回路 Loop_1 上设定一个虚拟变量；然后，在约束度为负值($\Delta_j<0$)的回路 Loop_2 上建立一个含这个虚拟变量的位置约束方程，从而求得该机构的位置正解。

但由于此机构具有特殊的拓扑约束，可直接通过约束度为负值($\Delta_j<0$)的回路 Loop_2 作用于约束度为正值($\Delta_j>0$)的回路 Loop_1 的几何约束(即杆 9 的运动始终平行于静平台)，可直接从 Loop_1 中求出该虚拟变量，从而直接求得其解析式位置正解。

2　位置分析

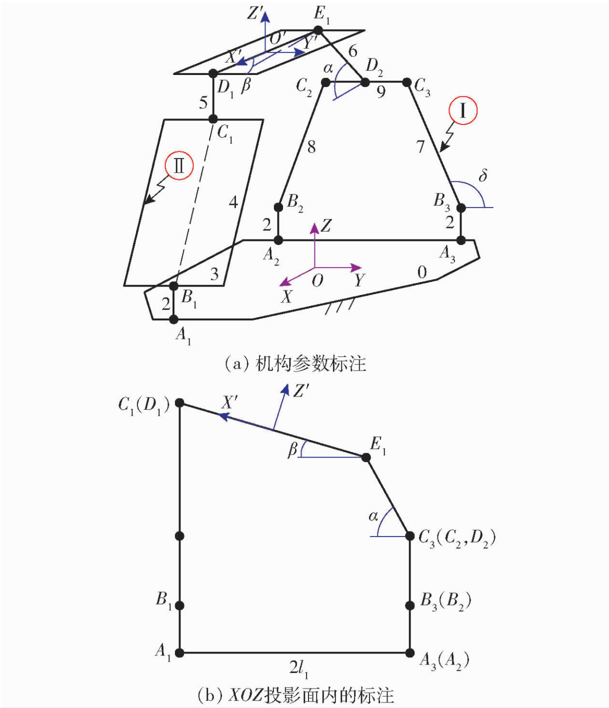
2.1　坐标系建立与参数标注

如图 2a 所示，设机构静平台 0 为宽度 $2l_1$ 的矩形，静平台 0 上 3 个移动副的位置分别为 A_1、A_2、A_3。在静平台 0 建立 $OXYZ$ 坐标系，O 为静平台的几何中心，X 轴与 $l_{A_2A_3}$ 连线垂直，Y 轴与 $l_{A_2A_3}$ 连线平行；在动平台 1 建立 $O'X'Y'Z'$ 坐标系，O' 为动平台 1 的中心，X' 轴与 $l_{E_1D_1}$ 共线，Y' 轴与 $l_{E_1D_1}$ 垂直，Z、Z' 轴由右手笛卡尔坐标系法则确定。设 $l_{B_3C_3}$ 与 Y 轴正方向的夹角为虚拟角 δ。

机构 XOZ 投影图如图 2b 所示，$l_{D_2E_1}$、$l_{E_1D_1}$ 与 X 轴正方向的夹角分别为 α、β。

该机构结构参数为：动平台上 $l_{E_1D_1}=l_8$，$l_{A_iB_i}=l_i\,(i=1,2,3)$；第 1 条混合支链中 $l_{B_2C_2}=l_{B_3C_3}=l_5$，$l_{C_2D_2}=l_{D_2C_3}=l_6$，$l_{D_2E_1}=l_7$；第 2 条混合支链中 $l_{B_1C_1}=l_4$，$l_{C_1D_1}=l_9=0$。

在静坐标系 $OXYZ$ 下，易知 A_i、$B_i\,(i=1,2,3)$ 点



(a) 机构参数标注

(b) XOZ投影面内的标注

图 2　机构 1 运动学建模

Fig. 2　Kinematics modeling of PM1

的坐标分别为 $A_1=(l_1,y_{A_1},0)$、$A_2=(-l_1,y_{A_2},0)$、$A_3=(-l_1,y_{A_3},0)$；$B_1=(l_1,y_{A_1},l_3)$、$B_2=(-l_1,y_{A_2},l_3)$、$B_3=(-l_1,y_{A_3},l_3)$。

2.2　位置正解求解

已知：静平台 0 上 $A_i\,(i=1,2,3)$ 的位置 y_{A_1}、y_{A_2}、y_{A_3}，求：动平台 1 上 O' 的坐标 (x_0,y_0,z_0) 和姿态角 β。

(1) 约束度为正的第 1 回路(Loop_1)的求解

由 1.2.1 节可知，机构运动过程中，由机构特殊的拓扑约束，即 2P4R 平面机构的中间构件 9 始终平行于静平台 0，即 $l_{C_2C_3}\parallel l_{A_2A_3}$，则有

$$z_{C_2}=z_{C_3}\tag{9}$$

因此，点 C_2、C_3 及 D_2 的坐标分别为

$$\begin{cases}C_2=(-l_1,y_{A_3}+l_5\cos\delta-2l_6,l_3+l_5\sin\delta)\\ C_3=(-l_1,y_{A_3}+l_5\cos\delta,l_3+l_5\sin\delta)\\ D_2=(-l_1,y_{A_3}+l_5\cos\delta-l_6,l_3+l_5\sin\delta)\end{cases}$$

由几何约束条件 $l_{B_2C_2}=l_5$，建立机构位置方程，整理并化简得

$$A\cos\delta+B=0$$

令 $\tan(\delta/2)=p$，则有

$$\delta=2\arctan\frac{\pm\sqrt{A^2-B^2}}{A-B}\tag{10}$$

其中　　$A=2l_5\quad B=y_{A_3}-2l_6-y_{A_2}$

这样，约束度为正的第 1 回路 Loop_1 上的特殊几何约束($z_{C_2}=z_{C_3}$)可以直接应用于约束度为负的第 2 回路 Loop_2，这是直接求出虚拟角 δ 解析解的

关键。

(2)约束度为负的第2回路($Loop_2$)的求解

在第2回路$A_1-B_1-C_1-D_1-E_1-D_2$中,由点D_2可求出点E_1的坐标为$(-l_1+l_7\cos\alpha, y_{A_3}+l_5\cos\delta-l_6, l_3+l_5\sin\delta+l_7\sin\alpha)$,$C_1$、$D_1$坐标为$(-l_1+l_7\cos\alpha+l_8\cos\beta, y_{A_3}+l_5\cos\delta-l_6, l_3+l_5\sin\delta+l_7\sin\alpha+l_8\sin\beta)$。同时,可计算得$O'$点的坐标

$$\boldsymbol{O}'=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{E_1}+\dfrac{l_8\cos\beta}{2}\\y_{E_1}\\z_{E_1}+\dfrac{l_8\sin\beta}{2}\end{bmatrix}\tag{11}$$

由几何条件$l_{B_1C_1}=l_4$,建立位置方程

$$(x_{C_1}-x_{B_1})^2+(y_{C_1}-y_{B_1})^2+(z_{C_1}-z_{B_1})^2=l_4^2$$

化简可得

$$l_7\sin\alpha+l_8\sin\beta=t\tag{12}$$

其中 $$t=\pm\sqrt{H_2}-H_1$$

$$H_1=l_5\sin\delta\quad H_2=l_4^2-(y_{A_1}-y_{D_2})^2$$

机构运动时,由于点B_1和C_1的X轴方向的位置相同($x_{B_1}=x_{C_1}$),因此,恒有

$$l_7\cos\alpha+l_8\cos\beta=2l_1\tag{13}$$

然后,由式(11)、(12)消除α,则有

$$D\sin\beta+E\cos\beta+F=0$$

令$\tan(\beta/2)=u$,则有

$$\beta=2\arctan\frac{D\pm\sqrt{D^2+E^2-F^2}}{E-F}\tag{14}$$

其中 $D=2l_8t\quad E=4l_1l_8\quad F=l_7^2-4l_1^2-l_8^2-t^2$

最后,将式(10)、(14)所求得δ、β值代入式(11),即可得动平台1上O'点的坐标(x_0,y_0,z_0)。

由式(10)知

$$\delta=f_1(y_{A_2},y_{A_3})$$

由式(14)知

$$\beta=f_2(y_{A_1},y_{A_2},y_{A_3})$$

因此,由式(11)知

$$\begin{cases}x_0=f_1(y_{A_1},y_{A_2},y_{A_3})\\y_0=f_2(y_{A_2},y_{A_3})\\z_0=f_3(y_{A_1},y_{A_2},y_{A_3})\end{cases}$$

由于动平台O'点(x_0,y_0,z_0)中$y_0=f_2(y_{A_2},y_{A_3})$,可说明动平台y_0的输出运动只与驱动滑块2、3的输入运动有关,即该机构具有部分输入-输出运动解耦性,这对动平台的轨迹规划与运动控制是有利的。

2.3 位置逆解求解

已知:动平台1上O'的y_0、z_0坐标和姿态角β,求静平台0上$A_i(i=1,2,3)$位置y_{A_1}、y_{A_2}、y_{A_3}。

根据式(11)和式(13),可求出x_0、α为

$$x_0=l_1-\frac{l_8\cos\beta}{2}\tag{15}$$

$$\alpha=\arccos\frac{2l_1-l_8\cos\beta}{l_7}\tag{16}$$

从而,可求出C_1、D_1的坐标为$(x_0+l_8\cos\beta/2, y_0, z_0+l_8\sin\beta/2)$、$E_1$的坐标为$(x_0-l_8\cos\beta/2, y_0, z_0-l_8\sin\beta/2)$。进一步,求出点$C_2$、$C_3$的坐标分别为$(x_0-l_8\cos\beta/2-l_7\cos\alpha, y_0-l_6, z_0-l_8\sin\beta/2-l_7\sin\alpha)$、$(x_0-l_8\cos\beta/2-l_7\cos\alpha, y_0+l_6, z_0-l_8\sin\beta/2-l_7\sin\alpha)$。

因此,由杆长条件建立位置约束方程为

$$\begin{cases}(x_{C_1}-x_{B_1})^2+(y_{C_1}-y_{B_1})^2+(z_{C_1}-z_{B_1})^2=l_4^2\\(x_{C_2}-x_{B_2})^2+(y_{C_2}-y_{B_2})^2+(z_{C_2}-z_{B_2})^2=l_5^2\\(x_{C_3}-x_{B_3})^2+(y_{C_3}-y_{B_3})^2+(z_{C_3}-z_{B_3})^2=l_5^2\end{cases}\tag{17}$$

即可求解$y_{A_i}(i=1,2,3)$为

$$y_{A_i}=y_{C_i}\pm\sqrt{N_i}\quad(i=1,2,3)\tag{18}$$

其中 $$N_1=l_4^2-(z_{C_1}-l_3)^2$$

$$N_2=l_5^2-(z_{C_2}-l_3)^2\quad N_3=l_5^2-(z_{C_3}-l_3)^2$$

综上可知,当动平台1上O'的坐标值y_0、z_0和姿态角β已知时,静平台0上$A_i(i=1,2,3)$位置y_{A_1}、y_{A_2}、y_{A_3}各有两组解,故逆解数$2\times2\times2=8$,因此,该机构有8种构型。

2.4 正逆解验证

设该并联机构的结构参数为$l_1=125$ mm、$l_2=175$ mm、$l_3=37.5$ mm、$l_4=180$ mm、$l_5=130$ mm、$l_6=55$ mm、$l_7=55$ mm、$l_8=240$ mm、$l_9=0$。

取静平台0上$A_i(i=1,2,3)$位置分别为$y_{A_1}=38.19$ mm、$y_{A_2}=-121.13$ mm、$y_{A_3}=122.94$ mm。

将所知参数代入式(10)~(14)计算,由Matlab计算可解得机构的位置正解,如表1所示,此时所对应的机构装配构型如图3a所示。

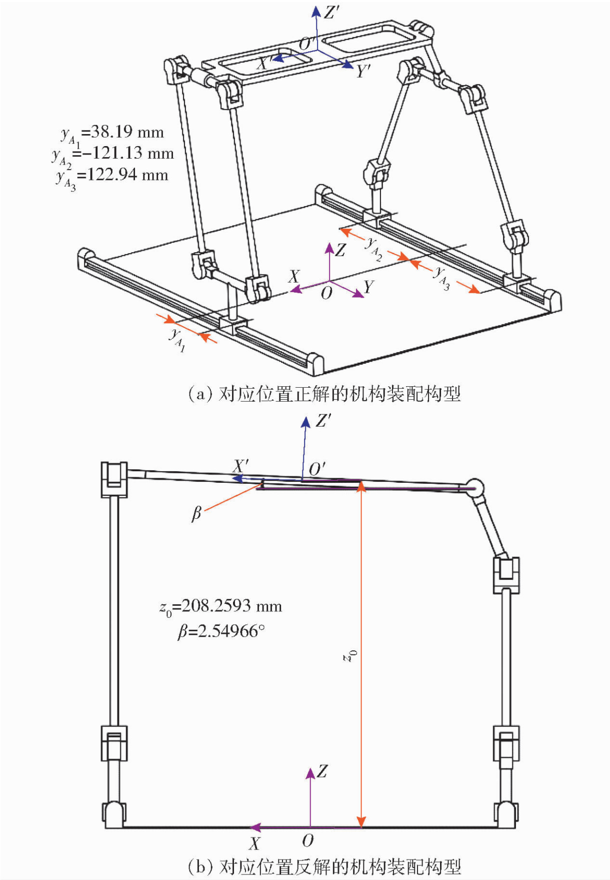
表1 机构1的位置正解数值

Tab.1 Positive position solutions of PM1

序号	y_0/mm	z_0/mm	β/(°)
1*	0.9050	208.2593	2.54966
2	0.9050	160.0974	26.4763

将表1中组1正解数值代入式(15)~(18),可得$y_{A_i}(i=1,2,3)$的8组逆解数值,如表2所示。

可见,表2中第1组的逆解数据和正解求解时给定的3个输入位置$y_{A_i}(i=1,2,3)$一致,此时对应的机构装配构型如图3b所示,从而证明了正、逆解的正确性。实际上,图3所示的CAD装配构型可视为机构1同一个装配构型的两个不同视图。



(a) 对应位置正解的机构装配构型

(b) 对应位置反解的机构装配构型

图 3　机构 1 的第 1 组正解所对应的机构装配构型

Fig. 3　Assembly configuration of the first group of PM1

表 2　机构 1 的位置逆解数值

Tab. 2　Inverse position solutions of PM1　　mm

序号	y_{A_1}	y_{A_2}	y_{A_3}
1*	38.183 1	−121.132 2	122.942 2
2	38.183 1	−121.132 2	−11.132 2
3	38.183 1	12.942 2	122.942 2
4	38.183 1	12.942 2	−11.132 2
5	−36.373 1	−121.132 2	122.942 2
6	−36.373 1	−121.132 2	−11.132 2
7	−36.373 1	12.942 2	122.942 2
8	−36.373 1	12.942 2	−11.132 2

3　机构奇异性分析

3.1　机构奇异性分析原理

所有输入运动和输出运动构成的矢量分别记为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的关系可表示为

$$F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=0 \tag{19}$$

将方程(19)两边分别对时间求导，有

$$\boldsymbol{J}_p\dot{\boldsymbol{Y}}-\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{X}}=0 \tag{20}$$

依据 $\boldsymbol{J}_p$、$\boldsymbol{J}_q$ 矩阵是否奇异，将机构的奇异位形分为 3 类：①当 $\det(\boldsymbol{J}_q)=0$ 时，机构发生输入奇异。②当 $\det(\boldsymbol{J}_p)=0$ 时，机构发生输出奇异。③当 $\det(\boldsymbol{J}_q)=\det(\boldsymbol{J}_p)=0$ 时，机构发生综合奇异。

式(17)两边同时对时间求导，可以得到机构动平台的输出速度 $\boldsymbol{V}=[\dot{y}_0\quad \dot{z}_0\quad \dot{\beta}]^{\mathrm{T}}$ 和主动输入移动速度 $\boldsymbol{\omega}=[\dot{y}_{A_1}\quad \dot{y}_{A_2}\quad \dot{y}_{A_3}]^{\mathrm{T}}$ 的关系，即

$$\boldsymbol{J}_p\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}_q\boldsymbol{\omega} \tag{21}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_p=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13}\\ f_{21} & f_{22} & f_{23}\\ f_{31} & f_{32} & f_{33}\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{J}_q=\begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & u_{22} & \\ & & u_{33}\end{bmatrix}$$

$$u_{11}=2(y_{C_1}-y_{A_1})\quad u_{22}=2(y_{C_2}-y_{A_2})$$

$$u_{33}=2(y_{C_3}-y_{A_3})\quad f_{11}=2(y_{C_1}-y_{A_1})$$

$$f_{12}=2(z_{C_1}-z_{B_1})\quad f_{13}=(z_{C_1}-z_{B_1})l_8\cos\beta$$

$$f_{21}=2(y_{C_2}-y_{A_2})\quad f_{22}=f_{32}=2(z_{C_2}-z_{B_2})$$

$$f_{23}=f_{33}=2(x_{C_2}-x_{B_2})(l_8\sin\beta+Ml_7\sin\alpha)-(z_{C_2}-z_{B_2})(l_8\cos\beta+2Ml_7\cos\alpha)$$

$$f_{31}=2(y_{C_3}-y_{A_3})$$

$$M=-l_8\sin\beta/\sqrt{l_7^2-(2l_1-l_8\cos\beta)^2}$$

3.2　奇异性分析

3.2.1　输入奇异

当机构发生输入奇异时，机构的执行构件将失去某个方向的运动能力，则至少有一个运动链到达了工作空间的边界。

此时，满足 $\det(\boldsymbol{J}_q)=0$，该方程解的集合 A 为

$$A=\{A_1\cup A_2\cup A_3\} \tag{22}$$

其中，$A_i=\{y_{A_i}=y_{C_i}\}$，$i=1,2,3$，即点 A_i 与点 C_i 的 y 轴坐标相等；满足 A_1 的三维 CAD 构型如图 4 所示。

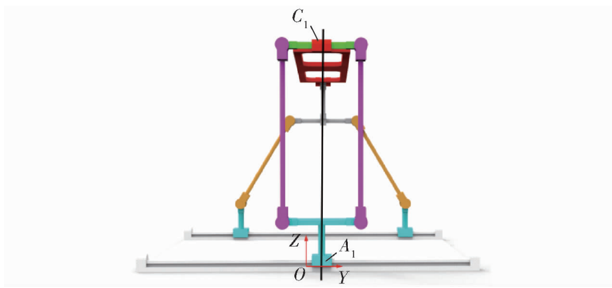


图 4　机构 1 输入奇异位形图

Fig. 4　Input singularity of PM1

3.2.2　输出奇异

在这种情况下，当所有的主动件锁住时，执行构件依旧可以产生局部运动。此时，若机构末端执行器上作用有限的力，则主动件上将需无穷大的驱动力才能达到力平衡。设

$$[f_{i_1}\quad f_{i_2}\quad f_{i_3}]=\boldsymbol{e}_i\quad (i=1,2,3) \tag{23}$$

若 $\det(\boldsymbol{J}_p)=0$，则向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 有如下两种情况：

(1)存在 2 个向量线性相关

若取 $\boldsymbol{e}_2=t\boldsymbol{e}_3$，即$[f_{21}\quad f_{22}\quad f_{23}]=t[f_{31}\quad f_{32}\quad f_{33}]$，

则能求解出

$$\begin{cases} t=1 \\ y_{C_2}-y_{A_2}=y_{C_3}-y_{A_3} \end{cases}$$

即当 $l_{B_2C_2} \parallel l_{B_3C_3}$ 时，表示两个向量线性相关，其中一种位形如图5所示。

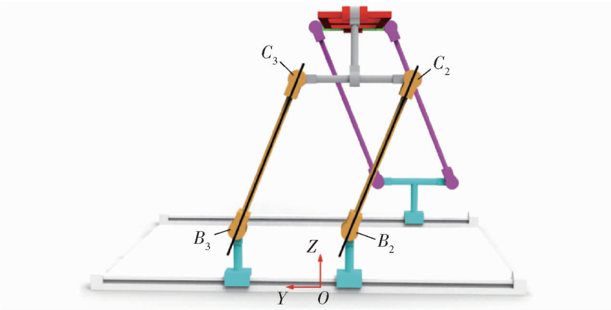


图5 机构1输出奇异位形图

Fig. 5 Output singularity of PM1

(2)存在3个向量线性相关

若取 $\boldsymbol{e}_1=t_1\boldsymbol{e}_2+t_2\boldsymbol{e}_3(t_1t_2\neq0)$，此时有

$$[f_{11}\quad f_{12}\quad f_{13}]=t_1[f_{21}\quad f_{22}\quad f_{23}]+t_2[f_{31}\quad f_{32}\quad f_{33}]$$

通过Matlab计算表明，该种情况下 t_1、t_2 的解无法解出，因此，此种情况不存在。

此时 $\det(\boldsymbol{J}_q)=\det(\boldsymbol{J}_p)=0$，即输入奇异和输出奇异同时发生。这种奇异位形只有当上述第1、2类奇异同时发生时才会产生，此时，机构将失去自由度、原有的运动特性。

4 机构工作空间分析

并联机构的可达工作空间，是指在考虑运动副转角范围、杆长不干涉情况下，末端执行器的工作区域，是衡量并联机器人性能的一个重要指标。本文采用极限边界搜索法对该并联机构的工作空间进行分析，首先，根据杆长设定工作空间的搜索范围，然后，基于位置逆解式(16)~(18)，搜索所有满足约束条件的点，由这些点组成的三维图即为该并联机构的工作空间。

为此，确定空间三维搜索范围：$-500\text{ mm}\leqslant y_0\leqslant 500\text{ mm}$，$0\leqslant z_0\leqslant 800\text{ mm}$，$-\pi/4\leqslant\psi\leqslant\pi/3$（$\psi$ 为搜索角度），搜索范围只需略大于杆件活动范围即可。通过Matlab软件编程，得到该并联机构的三维工作空间如图6a所示，其 XOZ 截面图如图6b所示。

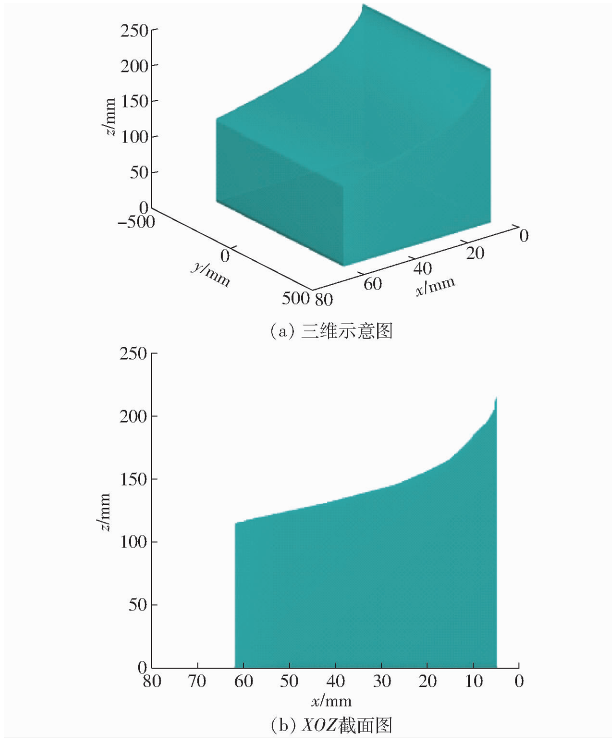


图6 机构1工作空间示意图

Fig. 6 Workspace of PM1

5 速度与加速度分析

5.1 速度、加速度公式推导

将式(17)的3个方程表示为唯一形式：$f(y_0,z_0,\beta)=0$，全微分后可得

$$\boldsymbol{J}_p\begin{bmatrix} \mathrm{d}y_0 \\ \mathrm{d}z_0 \\ \mathrm{d}\beta \end{bmatrix}=\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix} \mathrm{d}y_{A_1} \\ \mathrm{d}y_{A_2} \\ \mathrm{d}y_{A_3} \end{bmatrix} \tag{24}$$

由式(24)可得

$$\boldsymbol{J}_p\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{q}} \tag{25}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{X}}=[\dot{y}_0\quad \dot{z}_0\quad \dot{\beta}]$ $\dot{\boldsymbol{q}}=[\dot{y}_{A_1}\quad \dot{y}_{A_2}\quad \dot{y}_{A_3}]$

当机构不存在奇异位置时，$\boldsymbol{J}_p$ 可逆，则

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{q}} \tag{26}$$

式(26)即为动平台原点 O' 的速度正解公式。

取式(25)对时间 t 求导，可得

$$\boldsymbol{J}_p\begin{bmatrix} \ddot{y}_0 \\ \ddot{z}_0 \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}+\boldsymbol{J}_q\begin{bmatrix} \ddot{y}_{A_1} \\ \ddot{y}_{A_2} \\ \ddot{y}_{A_3} \end{bmatrix}+\boldsymbol{K}_0=0 \tag{27}$$

其中 $\boldsymbol{K}_0=[K_1\quad K_2\quad K_3]$

当机构不存在奇异位置时，$\boldsymbol{J}_p$ 可逆，则

$$\ddot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\ddot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{K}_0 \tag{28}$$

式(28)即为动平台原点 p 的加速度求解公式。

5.2 算例与仿真

取3个驱动副的运动规律分别为

$$\begin{cases} y_{A_1}=38.19-80\sin t \\ y_{A_2}=-121.13-40\sin t \\ y_{A_3}=122.94+20\sin t \end{cases}$$

则其输入速度、加速度的变化规律分别为

$$\dot{\boldsymbol{q}}=[\,-80\cos t \quad -40\cos t \quad 20\cos t\,]$$

$$\ddot{\boldsymbol{q}}=[\,80\sin t \quad 40\sin t \quad -20\sin t\,]$$

将这些已知条件代入式(24)～(28)中，通过 Matlab 编程计算动平台 1 的速度与加速度，并分别得到速度、加速度关于时间 t 的曲线，然后将虚拟样机导入 ADAMS，设定各构件的材料属性、运动副的约束类型、施加竖直向下的重力，选取仿真步长 0.1 s，仿真时间为 10 s，对虚拟样机进行动力学仿真。将 Matlab 计算得到的速度、加速度理论值与 ADAMS 的仿真结果进行对比，结果如图 7 所示。

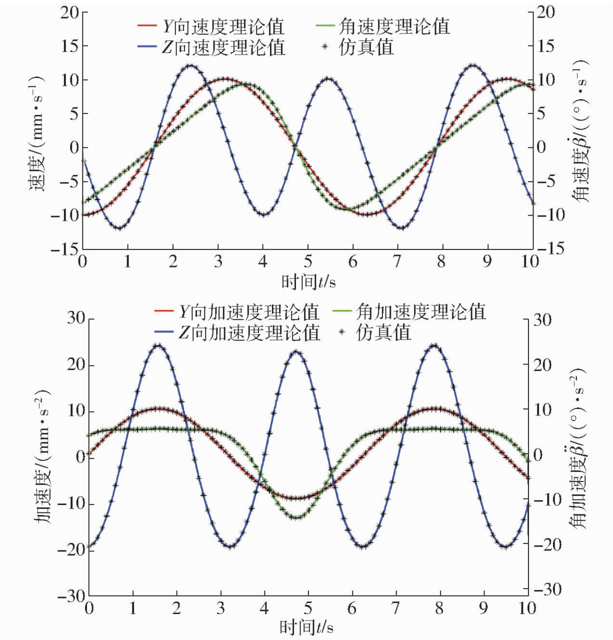


图 7　机构 1 动平台 1 速度、加速度曲线

Fig. 7　Speed and acceleration of moving platform of PM1

由图 7 可知，运用 Matlab 对式(24)～(28)进行编程计算得到的理论曲线，与运用 ADMAS 仿真得到的曲线图基本吻合，其最大相对误差分别为 0.21%、0.58%，从而验证了所推导的速度与加速度公式的正确性。

6　拓扑学与运动学性能比较

6.1　机构 2 的拓扑学性能

(1)机构 2 的混合支链 Ⅰ 仅剩下一个转动副 R_1；比机构 1 少的那个平行轴线的转动副(R_2)转移到了混合支链 Ⅱ 上，其余没变，其 POC 集求解如下：

确定两条混合支链 Ⅰ、Ⅱ 末端构件的 POC 集，由式(1)可得

$$M_{\mathrm{I}}=M_{\mathrm{HSOC}_1}=\begin{bmatrix} t^1(\parallel R_3)\cup t^1(\perp R_3) \\ r^2(\parallel(R_3,R_{32})) \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{II}}=M_{\mathrm{HSOC}_2}=\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_2) \end{bmatrix}$$

确定动平台 POC 集，由式(2)可得

$$M_{Pa}=M_{\mathrm{I}}\cap M_{\mathrm{II}}=\begin{bmatrix} t^2 \\ r^1(\parallel R_2) \end{bmatrix}$$

可见，机构 2 同样可实现动平台的两平移一转动。

(2)因机构 2 与机构 1 两个回路中的运动副类型、数目及其几何轴线关系完全相同，因此，其独立位移方程数不变，即同样为 $\xi_1=3$、$\xi_2=5$，因此，由式(4)、(8)分别计算得的自由度、耦合度，完全与机构 1 相同，即 $F=3$，$\kappa=1$，计算过程略。

6.2　机构 2 的运动学性能

6.2.1　位置正逆解

(1)结构参数

机构 2 坐标系的建立及参数标注如图 8 所示，混合支链 Ⅰ 中 $l_{D_2E_1}=l_7=0$，相对于机构 1 少了一个杆件，降低了后继研究(误差分析、动力学分析、样机研制等)的难度；混合支链 Ⅱ 中，$l_{C_1D_1}=l_9=0$；Loop_2 中只存在动平台姿态角 β(而 $\alpha=0$，见图 2b)。

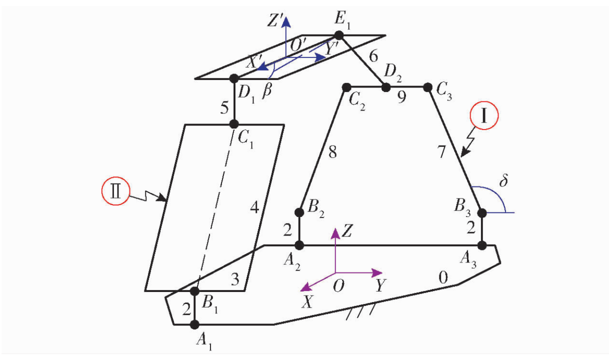


图 8　机构 2 运动学建模

Fig. 8　Kinematics modeling of PM2

(2)位置正解求解

机构 2 中约束度为负的第 2 回路(Loop_2)的求解，具体如下：

在第 2 回路 $A_1-B_1-C_1-D_1-E_1-D_2$ 中，由点 D_2 可求出点 E_1 的坐标为($-l_1, y_{A_3}+l_5\cos\delta-l_6, l_3+l_5\sin\delta$)，$C_1$、$D_1$ 坐标为($x_{E_1}+l_8\cos\beta, y_{E_1}, z_{E_1}+l_8\sin\beta$)。同时，可计算得 O' 点的坐标为

$$\boldsymbol{O}'=\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_{E_1}+\dfrac{l_8\cos\beta}{2} \\ y_{E_1} \\ z_{E_1}+\dfrac{l_8\sin\beta}{2} \end{bmatrix} \tag{29}$$

由几何约束 $l_{B_1C_1}=l_4$ 建立位置方程为

$$(x_{C_1}-x_{B_1})^2+(y_{C_1}-y_{B_1})^2+(z_{C_1}-z_{B_1})^2=l_4^2$$

整理得

$$D\sin\beta+E\cos\beta+F=0$$

令 $\tan(\beta/2)=u$，则有

$$\beta=2\arctan\frac{D\pm\sqrt{D^2+E^2-F^2}}{E-F} \tag{30}$$

其中 $D=2l_5l_8\sin\delta \quad E=-4l_1l_8$

$$F=4l_1^2+l_8^2-l_4^2+(y_{C_1}-y_{A_1})^2+l_5^2\sin^2\delta$$

最后,将式(10)、(30)所求得 δ、β 代入式(29),即可得动平台1上 O' 点的坐标(x_0,y_0,z_0)。

由式(9)可知

$$\delta=f_1(y_{A_2},y_{A_3})$$

由式(30)知

$$\beta=f_2(y_{A_1},y_{A_2},y_{A_3})$$

因此,由式(28)可知

$$\begin{cases}x_0=f_3(y_{A_1},y_{A_2},y_{A_3})\\ y_0=f_4(y_{A_2},y_{A_3})\\ z_0=f_5(y_{A_1},y_{A_2},y_{A_3})\end{cases}$$

即该机构也具有部分输入-输出运动解耦性。

(3)位置逆解求解

求解过程具体如下:

由式(28)可求出

$$x_0=-l_1+\frac{l_8\cos\beta}{2}$$

从而,可求出 C_1、D_1 的坐标为 $\left(x_0+\frac{l_8\cos\beta}{2},y_0,z_0+\frac{l_8\sin\beta}{2}\right)$,$D_2$、$E_1$ 坐标为 $\left(x_0-\frac{l_8\cos\beta}{2},y_0,z_0-\frac{l_8\sin\beta}{2}\right)$。

进一步,求出点 C_2、C_3 的坐标分别为 $\left(x_0-\frac{l_8\cos\beta}{2},y_0-l_6,z_0-\frac{l_8\sin\beta}{2}\right)$,$\left(x_0-\frac{l_8\cos\beta}{2},y_0+l_6,z_0-\frac{l_8\sin\beta}{2}\right)$。

因此,由杆长条件建立位置约束方程为

$$\begin{cases}(x_{C_1}-x_{B_1})^2+(y_{C_1}-y_{B_1})^2+(z_{C_1}-z_{B_1})^2=l_4^2\\ (x_{C_2}-x_{B_2})^2+(y_{C_2}-y_{B_2})^2+(z_{C_2}-z_{B_2})^2=l_5^2\\ (x_{C_3}-x_{B_3})^2+(y_{C_3}-y_{B_3})^2+(z_{C_3}-z_{B_3})^2=l_5^2\end{cases} \tag{31}$$

即可求解 y_{A_i} 为

$$y_{A_i}=y_{C_i}\pm\sqrt{N_i}\quad (i=1,2,3) \tag{32}$$

其中 $N_1=l_4^2-(x_{C_1}-l_1)^2-(z_{C_1}-l_3)^2$

$$N_2=l_5^2-(z_{C_2}-l_3)^2 \quad N_3=l_5^2-(z_{C_3}-l_3)^2$$

综上可知,当动平台1上 O' 的坐标(x_0,y_0,z_0)和姿态角 β 已知时,静平台0上3个点 A_i($i=1,2,3$)移动距离 y_{A_1}、y_{A_2}、y_{A_3} 各有两组解。故逆解数 $2\times2\times2=8$,因此,该机构有8种构型。

(4)正逆解验证

设该并联机构的结构参数为 $l_1=125$ mm、$l_2=175$ mm、$l_3=37.5$ mm、$l_4=180$ mm、$l_5=180$ mm、$l_6=45$ mm、$l_7=0$、$l_8=220$ mm、$l_9=0$。

取静平台0上 A_i($i=1,2,3$)位置分别为 $y_{A_1}=38.19$ mm、$y_{A_2}=-121.13$ mm、$y_{A_3}=122.94$ mm。

将所知条件代入式(10)、(29)、(30)计算,由Matlab计算可解得机构2的位置正解如表3所示,此时所对应的机构装配构型如图9所示。

表3 机构2的位置正解数值

Tab.3 Positive position solutions of PM2

序号	y_0/mm	z_0/mm	β/(°)
1*	0.905 0	205.579 2	2.813 2
2	0.905 0	97.544 8	-68.921

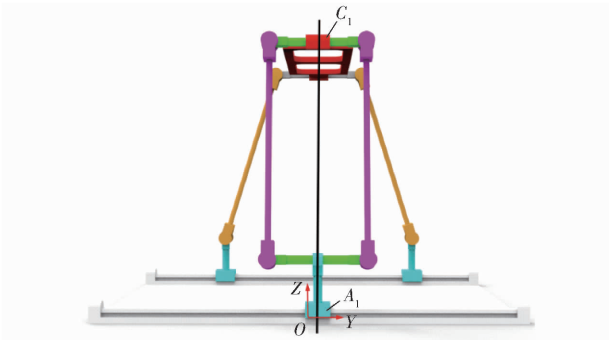


图9 机构2输入奇异位形图

Fig.9 Input singularity of PM2

将表3中第1组正解数值代入式(31)、(32),可得 y_{A_i}($i=1,2,3$)的8组逆解数值,如表4所示。

表4 机构2的位置逆解数值

Tab.4 Inverse position solutions of PM2 mm

序号	y_{A_1}	y_{A_2}	y_{A_3}
1*	38.179 6	-121.134 6	122.944 6
2	38.179 6	-121.134 6	-31.134 6
3	38.179 6	32.944 6	122.944 6
4	38.179 6	32.944 6	-31.134 6
5	-36.369 6	-121.134 6	122.944 6
6	-36.369 6	-121.134 6	-31.134 6
7	-36.369 6	32.944 6	122.944 6
8	-36.369 6	32.944 6	-31.134 6

可见,表4中第1组的逆解数据,和正解求解时给定的3个输入位置 y_{A_i}($i=1,2,3$)一致,从而证明了正、逆解的正确性。结果表明:相比于机构1而言,机构2的结构更为简单紧凑;又在位置分析中无需设中间变量 α,从而简化了机构的运动学分析过程。

6.2.2 奇异性

与机构1的求解过程一致,不同的几个参数如下

$$f_{13}=-2(x_{C_1}-x_{B_1})l_8\sin\beta+(z_{C_1}-z_{B_1})l_8\cos\beta$$

$$f_{23}=f_{33}=-(z_{C_2}-z_{B_2})l_8\cos\beta$$

其中机构2的各类奇异均与机构1相同,其中机构2中满足 A_1 的三维CAD构型如图9所示。

通过与3.2节中机构1的奇异性(图4)对比,可得这两种机构的奇异位形以及出现奇异的条件相同。

6.2.3　工作空间

机构 2 的工作空间分析过程与机构 1 一致，空间三维搜索范围（即 $-500\ \mathrm{mm} \leqslant y_0 \leqslant 500\ \mathrm{mm}$，$0 \leqslant z_0 \leqslant 800\ \mathrm{mm}$，$-\pi/4 \leqslant \psi \leqslant \pi/3$），并通过 Matlab 软件编程，得到机构 2 的三维工作空间如图 10a 所示；其 XOZ 截面图如图 10b 所示。

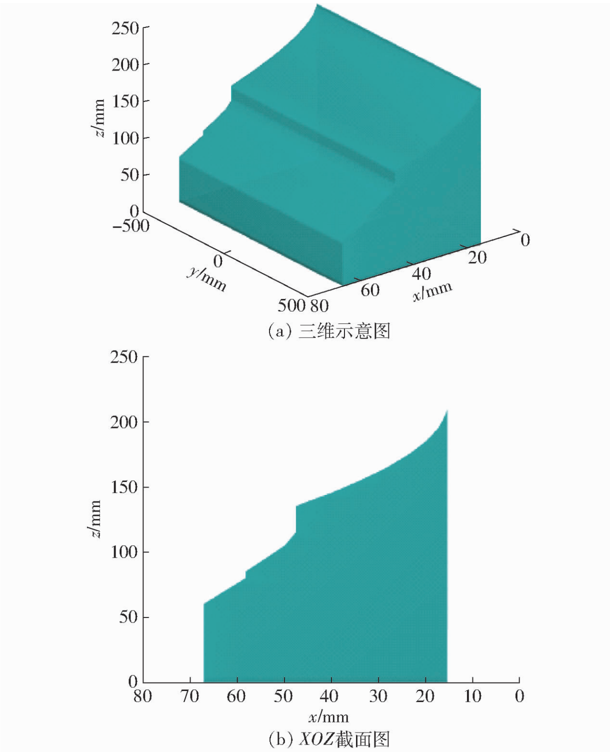


图 10　机构 2 工作空间示意图

Fig. 10　Workspace of PM2

分别对比图 6a 和图 10a，以及图 6b 和图 10b，可知：

（1）两种机构的工作空间连续，且其工作空间均为平行于 XOZ 面的长方体区域。

（2）随着 z 的增加，机构工作空间的 XOZ 面面积在逐渐缩小，且均朝 $x=0$ 的方向缩小。

（3）机构 1 的工作范围位于 X 轴正向，而机构 2 则在 X 轴的反向，这是由于转动副 R_1 的位置变换造成的。

（4）随着 z 的增加，机构 1 的 XOZ 面变化平缓，而机构 2 较为陡峭。

6.2.4　速度和加速度

通过 Matlab 编程计算，得到机构 2 中动平台 1 的速度与加速度曲线，同样将虚拟样机导入到 ADAMS 中进行动力学仿真，继而将 Matlab 计算得到的速度、加速度理论值与 ADAMS 的仿真结果进行对比，结果如图 11 所示。

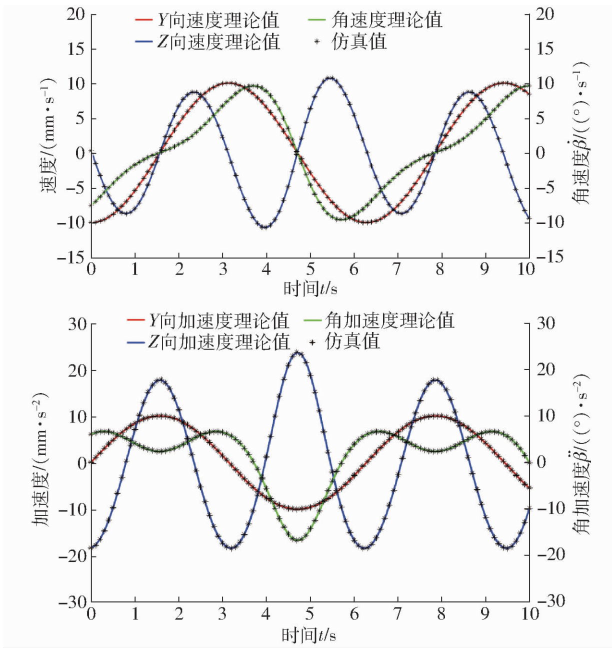


图 11　机构 2 动平台 1 速度、加速度曲线

Fig. 11　Speed and acceleration of moving platform of PM2

由图 11 可知，运用 Matlab 进行编程计算得到的理论曲线，与运用 ADAMS 仿真得到的曲线图基本吻合，其最大相对误差分别为 0.13%、0.46%。

故对两个机构的各项运动对比，见图 12，结果

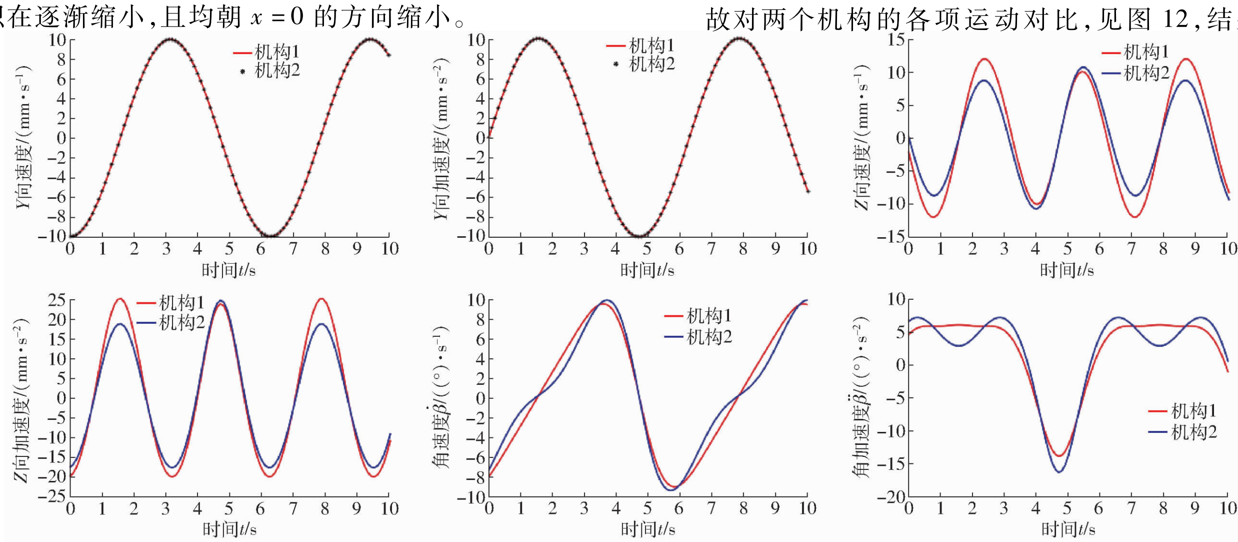


图 12　动平台的运动曲线对比

Fig. 12　Comparison of motion curves of moving platforms

显示，两种机构动平台的各向速度、加速度曲线均呈现相似的周期性变化，尤其是 Y 向曲线基本重合，说明这两个机构具有相似的运动特性，能够实现类似的动平台输出运动。

由图 12 可知，两种机构均具有较好的运动平稳性，仅从速度、加速度难以判断优劣，但机构 2 相对于机构 1 结构更加简单紧凑，整个运动学分析过程更加简单，且将会降低后继研究（误差分析、动力学分析、样机研制等）的难度；另外，其制造、加工更容易些。因此，可认为机构 2 为较优机型。

7 结论

（1）揭示了两种机构的 POC、自由度、耦合度、运动耦合性等重要拓扑特征，为简化其运动学建模与求解奠定了基础。

（2）基于拓扑特征的运动学建模与求解方法，将拓扑特征作为运动学建模与求解的已知条件，简化了求解过程，据此建立了两种机构位置正解的求解模型，并求解了位置正解的解析解。

（3）基于导出的位置反解，分析了两种机构的工作空间及可能存在的奇异位置，并由雅可比矩阵推导出两种机构动平台的速度、加速度变化规律。

（4）机构 1、2 具有相似的运动特性，但机构 2 在结构上制造、加工更容易，同时还会简化运动学性能研究、动力学分析过程等，故选择该机构作为优选机型。

参 考 文 献

[1] 陈海真，邹忠月，郝秀清．一种新型三平移并联机构运动输出及工作空间分析[J]．机床与液压，2010，38(5)：24－26.
CHEN Haizhen, ZOU Zhongyue, HAO Xiuqing. Analysis on output motion and workspace of a novel type 3－RCR parallel mechanism with three translations[J]. Machine Tool & Hydraulics, 2010, 38(5)：24－26. (in Chinese)

[2] 尹小琴，马履中．三平移并联机构 3－RRC 的工作空间分析[J]．中国机械工程，2003，14(18)：1531－1533.
YIN Xiaoqin, MA Lüzhong. Workspace analysis of a 3-DOF translational parallel mechanism 3－RRC[J]. China Mechanical Engineering, 2003, 14(18)：1531－1533. (in Chinese)

[3] GREGORIO R D. Kinematics of a new spherical manipulator with three equal legs: the 3－URC wrist[J]. Robotic System, 2001, 18(5): 213－219.

[4] 于海波，赵铁石，李仕华．空间 3－SPS/S 对顶双锥机构的运动学分析[J]．机械设计，2007，24(2)：11－14.
YU Haibo, ZHAO Tieshi, LI Shihua. Kinematics analysis on the spatial 3－SPS/S opposing vertexes double pyramid mechanism [J]. Journal of Machine Design, 2007, 24(2)：11－14. (in Chinese)

[5] 边辉，刘艳辉，梁志成，等．并联 2－RRR/UPRR 踝关节康复机器人机构及其运动学[J]．机器人，2010，32(1)：6－12.
BIAN Hui, LIU Yanhui, LIANG Zhicheng, et al. A novel 2－RRR/UPRR robot mechanism for ankle rehabilitation and its kinematics[J]. Robot, 2010, 32(1)：6－12. (in Chinese)

[6] 牛雪梅，高国琴，刘辛军，等．三自由度驱动冗余并联机构动力学建模与试验[J]．农业工程学报，2013，29(16)：31－41.
NIU Xuemei, GAO Guoqin, LIU Xinjun, et al. Dynamics modeling and experiments of 3-DOF parallel mechanism with actuation redundancy[J]. Transactions of the CSAE, 2013, 29(16)：31－41. (in Chinese)

[7] 许允斗，胡建华，张东胜，等．一种所有转轴均连续的五自由度混联机器人机构[J]．机械工程学报，2018，54(21)：19－24.
XU Yundou, HU Jianhua, ZHANG Dongsheng, et al. A kind of five degrees of freedom hybrid robot with all rotating shafts continuous[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(21)：19－24. (in Chinese)

[8] 陈淼，张氢，葛韵斐，等．2UPR－RRU 并联机构及其运动学分析[J]．北京航空航天大学学报，2019，45(6)：1145－1152.
CHEN Miao, ZHANG Qing, GE Yunfei, et al. 2UPR－RRU parallel mechanism and its kinematic analysis[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2019, 45(6)：1145－1152. (in Chinese)

[9] WANG J, LIU X J. Analysis of a novel cylindrical 3-DOF parallel robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2003, 42(1)：31－46.

[10] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3-DOF PPR-equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127: 1113－1121.

[11] 杨宁，马履中，艾永强，等．两平移一转动并联机构型综合研究[J]．机械设计与研究，2005，21(5)：29－32.
YANG Ning, MA Lüzhong, AI Yongqiang, et al. Study on structure synthesis of two translations and one ratation parallel mechanism[J]. Machine Design and Research, 2005, 21(5): 29－32. (in Chinese)

[12] REFAAT S, NAHAVANDI S, TRINA A, et al. Asymmetrical three-DOFs rotational-translational parallel-kinematics mechanisms based on Lie group theory[J]. European Journal of Mechanics, A/Solids, 2006, 25(3)：550－558.

[13] 张彦斌，吴鑫，刘宏昭，等．无奇异完全各向同性 2T1R 型并联机构的结构综合[J]．中国机械工程，2008，19(3)：277－281.
ZHANG Yanbin, WU Xin, LIU Hongzhao, et al. Structural synthesis of singularity-free fully-isotropic parallel mechanisms with 2T1R-type[J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(3): 277－281. (in Chinese)

[14] 杨廷力．机器人机构拓扑结构学[M]．北京：机械工业出版社，2004.

[15] 杨廷力，刘安心，罗玉峰，等．机器人机构拓扑结构设计[M]．北京：科学出版社，2012.

[16] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Springer, 2018.

[17] 余顺年，马履中，陈扼西. 新型串并联中医推拿机器人研究[J]. 中国机械工程，2005，16(19):1773－1778.
YU Shunnian, MA Lüzhong, CHEN Exi. Study on a novel series-parallel chinese massage manipulator[J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(19):1773－1778. (in Chinese)

[18] 沈惠平，尹洪波，王振，等. 基于拓扑结构分析的求解 6－SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报，2013，49(21):70－80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6－SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21):70－80. (in Chinese)

[19] 尤晶晶，符周舟，吴洪涛，等. 12－6 台体型 Stewart 冗余并联机构正向运动学研究[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(12):395－402.
YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward kinematics of general 12－6 Stewart redundant parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12):395－402. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no = 20171249&flag = 1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.12.049. (in Chinese)

[20] 沈惠平，朱小蓉，尹洪波，等. 并联机构的结构降耦原理及其设计方法[J]. 机械工程学报，2016, 52(23):102－113.
SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, YIN Hongbo, et al. Principle and design method for structure coupling-reducing of parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(23):102－113. (in Chinese)