doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.10.045

# 基于唯一域方法的机器人逆向运动学求解

李　光　肖　帆　杨加超　章晓峰　马祺杰
(湖南工业大学机械工程学院, 株洲 412007)

**摘要**: 针对机器人的逆运动学多解问题,提出一种基于唯一域求解的新方法。利用机器人的雅可比矩阵行列式等于0确定的边界,将机器人的关节空间划分为与逆运动学多解数目一致的唯一域;各唯一域的边界作为约束条件,将唯一域内的逆运动学求解转换为CMA-ES算法的有约束寻优;利用佳点集均匀分布性的特点,优化唯一域中CMA-ES算法求解的初始均值点。通过求6R工业机器人的逆运动学多解,阐述了该方法的应用,并以机械臂逆解数值法为参照,在钱江一号6R工业机器人和KUKA仿人机械臂上进行了2个仿真实验对比。仿真结果表明,本文所提方法在满足精度要求的前提下,平均求解时间更短。实验1中,CMA-ES算法求解一组逆解的平均速度约为5.1 ms/次,数值法求解的平均速度约为7.5 ms/次;实验2中,一组逆解的求解平均速度约为18.9 ms/次,数值法求解的平均速度约为54.8 ms/次;CMA-ES算法对两款机器人的位置跟踪精度均稳定在$10^{-6}$ mm数量级。

**关键词**: 工业机器人; 唯一域; 逆运动学解; 雅可比矩阵; CMA-ES算法
**中图分类号**: TP242.2　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2019)10-0386-09

# Solution of Inverse Kinematics of Robots Based on Unique Domain Method

LI Guang　XIAO Fan　YANG Jiachao　ZHANG Xiaofeng　MA Qijie
(*College of Mechanical Engineering*, *Hunan University of Technology*, *Zhuzhou* 412007, *China*)

**Abstract**: The inverse robot kinematics problem has been extensively studied by many workers, but still some problems related to the complexity and strong nonlinear of the inverse kinematics process need suitable heuristic and adhoc techniques and simplifications. A novel method based on uniqueness domains notion was proposed. With using the boundary confirmed by robot's Jacobian matrix determinant equal to zero, the joint space of the robot was divided into uniqueness domains with the same number of solutions as the inverse kinematics, and the boundary of each uniqueness domain was used as a constraint condition. Then the inverse kinematics solution in the uniqueness domain was transformed into the constrained optimization of the CMA-ES algorithm, the initial mean points of the CMA-ES algorithm in the uniqueness domain were optimized by using the characteristics of the uniform distribution of the good point set. The application of the presented method was described in detail by solving the inverse kinematics multiple solution of the 6R industrial robot, and comparing with the numerical method on Qianjiang No. 1 industrial robot and the KUKA humanoid manipulator. The simulation results showed that under the precondition of accuracy requirement, the proposed method had a faster solution speed. For the industrial 6R robot, the average solution time of CMA-ES algorithm was about 5.1 ms/time, and that of numerical method was about 7.5 ms/time, and KUKA humanoid manipulator, the average solution time of inverse solutions was about 18.9 ms/time, and the average solution time of numerical method was about 54.8 ms/time. The presented CMA-ES algorithm stabilized the position tracking accuracy of both robots at $10^{-6}$ mm level.

**Key words**: industrial robot; uniqueness domain; inverse kinematics solution; Jacobian matrix; CMA-ES algorithm

收稿日期: 2019-03-19　修回日期: 2019-05-29
**基金项目**: 国家自然科学基金项目(11602082)和湖南省自然科学基金项目(2018JJ4079)
**作者简介**: 李光(1963—),男,教授,博士,主要从事机器人智能控制研究,E-mail: liguang@hut.edu.cn

## 0　引言

机器人逆运动学求解是机器人离线编程、轨迹规划、控制算法设计等其他课题研究的基础[1]。逆运动学求解的实质是完成机器人工作空间到关节空间的映射，逆运动学方程组具有高维、非线性的特点，求解复杂且不易求出[2]。很多学者在该领域做了大量研究，提出了许多理论与方法。传统方法有代数法[3]、几何法[4]和数值法[5]等。代数法主要以消元的方式，将机器人位置反解中的高维方程组简化为低维方程组，从而求得所有逆运动学解。该方法需要进行大量的三角代换，简化过程十分复杂，HUSTY 等[6]认为求解非线性代数方程往往需要靠直觉甚至运气才能获得。几何法针对机器人的某些特殊结构进行简化，再进行求解，一般无法单独使用，甚至根本无法使用[7]。数值法的求解速度与初始值相关。

随着计算机技术的快速发展，许多学者将智能优化方法应用于机器人逆运动学问题[8-11]。文献[8-11]的方法均属于进化算法的范畴，其迭代过程中不受梯度和初始值的影响，具有通用性，但无法有效求得机器人所有逆运动学解。文献[12-13]将关节空间划分为多个子空间，采用多神经网络的方式，分别求得了平面 2R 机械手和空间 3R 机械手的逆运动学多解，但是均未提出一种划分关节空间的通用方式。

RASTEGAR 等[14]提出利用 $\det(\boldsymbol{J})=0$（$\boldsymbol{J}$ 为雅可比矩阵）方程，将非冗余机器人关节空间划分为与逆解数目相同的唯一域，再在每个唯一域中用数值法迭代求解，进而求得所有逆运动学解。其思路可行，因 MANOCHA 等[15]举例说明在某种情况下 6 自由度机器人的逆解问题有 16 个实数解，并确定解的数目上限为 16；WENGER[16-17]进一步完善了利用 $\det(\boldsymbol{J})=0$ 划分唯一域的条件。

在 $\det(\boldsymbol{J})=0$ 划分唯一域的理论指导下，MOULIANITIS 等[18]使用 48 个多层感知器近似求解了 KUKA 7 自由度仿人臂前 6 个关节的逆运动学多解（文中所提的 KUKA 机器人为该款机器人）；周枫林等[19]用多模块 RBF 神经网络求解了 PUMA560 机械手前 3 个关节的逆运动学多解。然而，神经网络需要大量的样本进行训练，无法保证求解的实时性；同时，样本的数量和分布会影响训练好的神经网络的泛化精度，并且位于奇异点附近的样本，神经网络无法直接训练。

本文将方程 $\det(\boldsymbol{J})=0$ 作为划分 6 自由度机器人关节空间的依据，将各个唯一域的边界作为约束条件，采用协方差自适应矩阵进化策略（Covariance matrix adaptation evolution stategy，CMA-ES）[20]对 6 自由度机器人进行有约束寻优；使用佳点集方法产生初始搜索点，从而求得所有逆运动学解。在钱江一号 6R 工业机器人和 KUKA 仿人机械臂上进行仿真实验。

## 1　6R 机器人唯一域的确定

文献[17]将非冗余机器人分为了尖面机器人（Cuspidal robot）和非尖面机器人（Noncuspidal robot），在非尖面机器人中可以直接采用 $\det(\boldsymbol{J})=0$ 方程划分唯一域。图 1 为非尖面 6 自由度机器人划分唯一域求逆解的方法流程图，$Q_n$ 为唯一域中的逆运动学解，其中 $n\leqslant16$。

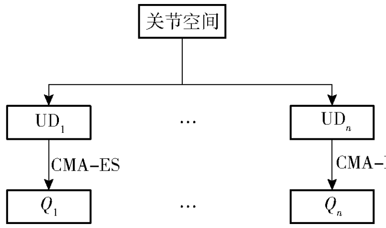


图 1　非尖面 6R 机器人逆运动学求解流程图

Fig. 1　Flow chart for solving inverse kinematics of noncuspidal 6-DOF robot

由于非尖面 6 自由度机器人的结构不同，最终划分唯一域的方法也会有所差异。为了能详细地阐述本文所提的方法，以工业 6R 机器人为例进行详细说明。

### 1.1　6R 工业机器人正向运动学及适应度函数

图 2 是钱江一号 6R 工业机器人[21]以 D-H 法建立的连杆坐标系，表 1 是其 D-H 参数，其中 $a_1=150$ mm，$a_2=550$ mm，$a_3=160$ mm，$d_4=594$ mm，机器人零位是关节 3 以括号内的角度旋转后所得。

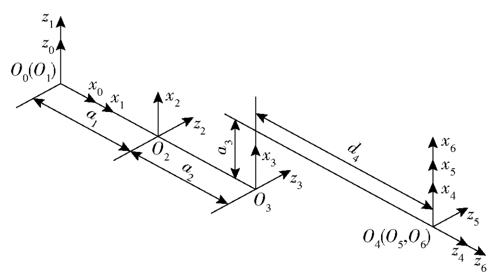


图 2　钱江一号机器人连杆坐标系

Fig. 2　Linkage coordinate system of Qianjiang No. 1 robot

机器人连杆 $\{i\}$ 坐标系相对于 $\{i-1\}$ 坐标系的变换矩阵为

$$
{}^{i-1}_{\ i}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}
\mathrm{c}\theta_i & -\mathrm{s}\theta_i & 0 & a_{i-1}\\
\mathrm{s}\theta_i\mathrm{c}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\theta_i\mathrm{s}\alpha_{i-1} & -\mathrm{s}\alpha_{i-1} & -\mathrm{s}\alpha_{i-1}d_i\\
\mathrm{s}\theta_i\mathrm{s}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\theta_i\mathrm{c}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\alpha_{i-1} & \mathrm{c}\alpha_{i-1}d_i\\
0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{1}
$$

表 1　钱江一号机器人的关节参数

Tab. 1　Joint parameters of Qianjiang No. 1 robot

| 连杆 $i$ | 关节角 $\theta_i/(°)$ | 扭角 $\alpha_{i-1}/(°)$ | 长度 $a_{i-1}$ | 偏置 $d_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\theta_1(0)$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $\theta_2(0)$ | -90 | $a_1$ | 0 |
| 3 | $\theta_3(-90)$ | 0 | $a_2$ | 0 |
| 4 | $\theta_4(0)$ | -90 | $a_3$ | $d_4$ |
| 5 | $\theta_5(0)$ | 90 | 0 | 0 |
| 6 | $\theta_6(0)$ | -90 | 0 | 0 |

其中，$s\theta_i$、$c\theta_i$、$s\alpha_{i-1}$ 和 $c\alpha_{i-1}$ 为 $\sin\theta_i$、$\cos\theta_i$、$\sin\alpha_{i-1}$ 和 $\cos\alpha_{i-1}$ 的简写形式。已知机器人的关节向量 $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4,\theta_5,\theta_6)$，根据式(1)和表 1 中的 D - H 参数，得到机器人腕部相对于基坐标系的位姿矩阵

$$
{}^0_6\boldsymbol{T}={}^0_1\boldsymbol{T}(\theta_1){}^1_2\boldsymbol{T}(\theta_2){}^2_3\boldsymbol{T}(\theta_3){}^3_4\boldsymbol{T}(\theta_4){}^4_5\boldsymbol{T}(\theta_5){}^5_6\boldsymbol{T}(\theta_6)=\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}
$$

机器人手腕的位置由前 3 个关节可以完全确定，其姿态最终由后 3 个关节确定，所以采用臂腕分离的方式建立适应度函数

$$
f_{\text{itness1}}=\|\boldsymbol{p}_{\text{des}}-\boldsymbol{p}_{\text{cur}}\| \tag{3}
$$

$$
f_{\text{itness2}}=\|\boldsymbol{a}_{\text{des}}-\boldsymbol{a}_{\text{cur}}\| \tag{4}
$$

式中　$f_{\text{itness1}}$——目标位置 $\boldsymbol{p}_{\text{des}}$ 与实际位置 $\boldsymbol{p}_{\text{cur}}$ 之间的误差

$f_{\text{itness2}}$——目标接近矢量 $\boldsymbol{a}_{\text{des}}$ 与实际接近矢量 $\boldsymbol{a}_{\text{cur}}$ 的误差

其中接近矢量与 $\theta_6$ 无关，如需要求解的机器人不能臂腕分离求解，则适应度函数可参照文献[7]，用位置误差和姿态误差加权和的形式表达。由于姿态是建立在前 3 个关节基础上得到的，所以可以先用式(3)求解 $\theta_1$、$\theta_2$、$\theta_3$，然后代入式(4)求 $\theta_4$、$\theta_5$。$\theta_6$ 可将求得的前 5 个关节角作为已知条件，联立 $o_z$、$n_z$ 求解，即

$$
\theta_6=\operatorname{atan2}\left(\frac{Ao_z-Bn_z}{A^2+B^2},-\frac{An_z+Bo_z}{A^2+B^2}\right) \tag{5}
$$

其中

$$
A=s23\sin\theta_5-c23\cos\theta_4\cos\theta_5
$$

$$
B=c23\sin\theta_4
$$

式中 c23、s23 分别表示 $\cos(\theta_2+\theta_3)$、$\sin(\theta_2+\theta_3)$。

### 1.2　唯一域划分

通过微分法[22]在 Matlab 中计算，求得机器人的雅可比矩阵行列式为

$$
\det(\boldsymbol{J})=P_{n1}P_{n2}P_{n3} \tag{6}
$$

其中

$$
P_{n1}=a_2\sin\theta_5
$$

$$
P_{n2}=a_3\cos\theta_3-d_4\sin\theta_3
$$

$$
P_{n3}=a_1+d_4c23+a_3s23+a_2\cos\theta_2
$$

由式(6)可以看出，工业机器人的奇异性只与关节 2、3、5 有关。

$P_{n1}$ 和 $P_{n2}$ 分别只与 $\theta_3$、$\theta_5$ 有关，可直接求出 $\theta_3$、$\theta_5$ 的值作为边界：$\theta_3$ 的边界分别为 -2.940 8 rad、0、3.342 4 rad；$\theta_5$ 的边界分别为 $-\pi$、0、$\pi$。$P_{n3}$ 不方便求解，可直接作为非线性约束条件。根据 1.1 节中适应度函数的构造，$\theta_2$ 和 $\theta_3$ 所划分的唯一域只与 $f_{\text{itness1}}$ 有关，令 $f=P_{n2}P_{n3}$，可在 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 组成的平面内进一步研究 $f=0$ 时唯一域的划分。

图 3 中绿色线为 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 平面内的奇异轨迹线，在上半区 $\theta_3\in[0.200\,8,3.342\,4]$ rad，$P_{n3}\leqslant0$ 的部分组成了 $\text{UD}_1$，$P_{n3}\geqslant0$ 的部分组成了 $\text{UD}_3$；在下半区 $\theta_3\in[-2.940\,8,0.200\,8]$ rad，$P_{n3}\leqslant0$ 的部分组成了 $\text{UD}_2$，$P_{n3}\geqslant0$ 的部分组成了 $\text{UD}_4$。如果没有限制 $\theta_2$，则沿 $\theta_2$ 轴的方向上，每个唯一域都会有无数种解，因为根据三角函数知识，$\theta_2$ 与 $2k\pi+\theta_2(k\in\boldsymbol{Z})$ 对应的三角函数值相等，所以选择唯一域时，可以根据图 3 适当调整 $\theta_2$ 的边界，使得边界内包含一个完整的 $\text{UD}_i(i=1,2,3,4)$ 即可，如图 4 红色区域，图中各区域的边界条件见表 2。

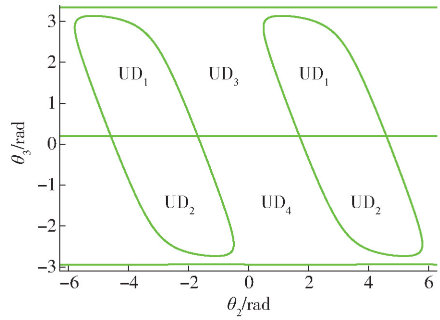


图 3　唯一域划分

Fig. 3　Uniqueness domains division

又因为 $\theta_5$ 将 $[-\pi,\pi]$ 以 0 为界划分成了 2 个唯一域，与 $\text{UD}_i(i=1,2,3,4)$ 可以组合得到 8 个唯一域，记为 $\text{UD}_{ij}(j=1,2)$，如图 5 所示，图中“+”表示组合。

## 2　基于 CMA - ES 算法的逆运动学求解

### 2.1　CMA - ES 算法原理

CMA - ES 算法的本质属于进化策略类算法。经典进化策略算法主要依赖于突变来寻找最优解，而突变方向需要依据经验设置，以该方法调整会导致无效的突变，进而浪费计算成本。为克服经典进化策略的局限性，CMA - ES 采用多维正态分布 $N(\boldsymbol{m},\boldsymbol{C})$ 产生搜索种群，$\boldsymbol{m}$ 代表种群分布的中心；$\boldsymbol{C}$ 是协方差矩阵且对称正定，对其特征分解可得 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BDB}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}$ 的列向量由 $\boldsymbol{C}$ 的特征向量正

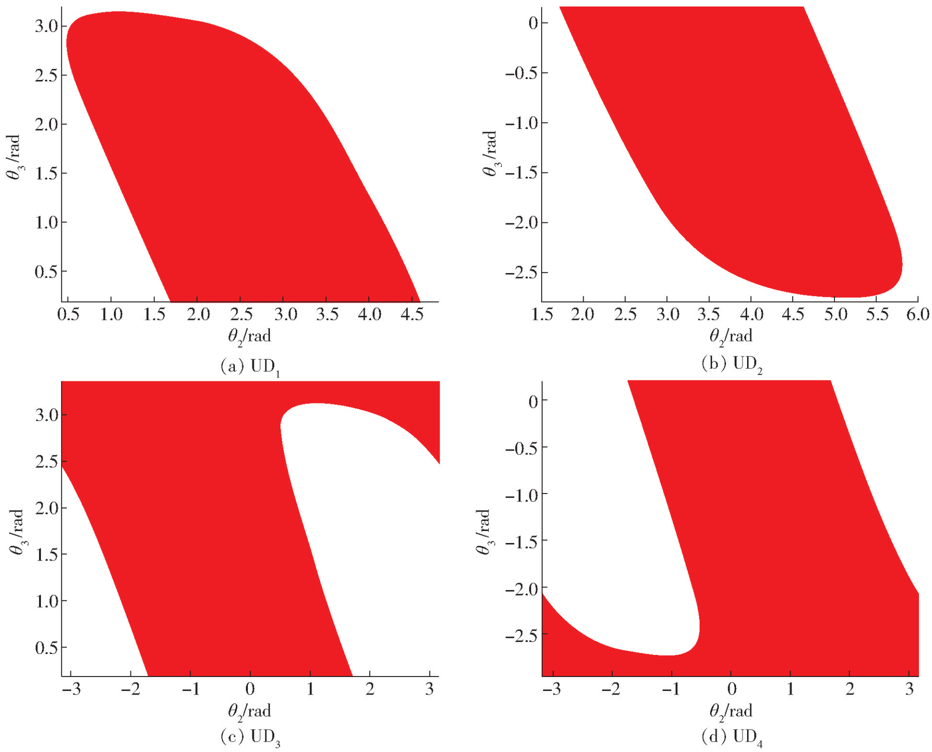


图 4　$\theta_2$和 $\theta_3$间的唯一域划分

Fig. 4　Uniqueness domains partition between $\theta_2$ and $\theta_3$

交基组成,$\boldsymbol{D}$ 为对角阵,对角元素是 $\boldsymbol{C}$ 矩阵特征值的平方根。

**表 2　各唯一域确定条件**

**Tab. 2　Uniqueness domains determination conditions**

| 唯一域 | $\theta_2$/rad | $\theta_3$/rad | $P_{n3}$ |
|---|---|---|---|
| $UD_1$ | [0.45,4.6] | [0.2008,3.3424] | ≤0 |
| $UD_2$ | [1.6,5.9] | [−2.9408,0.2008] | ≤0 |
| $UD_3$ | [−π,π] | [0.2008,3.3424] | ≥0 |
| $UD_4$ | [−π,π] | [−2.9408,0.2008] | ≥0 |

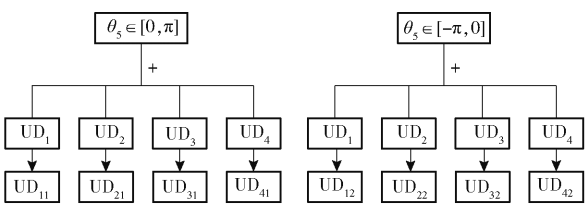


图 5　8 组唯一域组合方式

Fig. 5　Eight groups of uniqueness domains combinations

CMA－ES 算法实现步骤如下[23－25]:

(1)参数设置及初始化。静态参数:种群大小 $\lambda$,父代个体数为 $\mu<\lambda$,重组权值 $\omega_i(i=1,2,\cdots,\mu)$,以及自适应调整时所需的常量 $c_\sigma$、$d_\sigma$、$c_c$、$c_1$、$c_\mu$、$\mu_{eff}$,最大迭代次数为 $G$。动态参数:初始分布均值 $\boldsymbol{m}\in\mathbf{R}^N$($N$ 是问题维数),全局步长 $\sigma\in\mathbf{R}_+$,进化路径 $\boldsymbol{p}_\sigma=0$,$\boldsymbol{p}_c=0$,协方差矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}$,迭代次数 $g=0$。静态参数的计算公式见文献[25]。

(2)抽样。通过对多元正态分布进行抽样生成搜索种群,抽样公式为

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{BD}N(0,\boldsymbol{I})\sim N(0,\boldsymbol{C}) \tag{7}$$

$$\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{m}+\sigma\boldsymbol{y}_k\sim N(\boldsymbol{m},\sigma^2\boldsymbol{C}) \tag{8}$$

式中　$\boldsymbol{x}_k$——种群的第 $k$ 个个体

$\boldsymbol{y}_k$——均值为 0 的多元正态分布

(3)优选重组,即均值更新,具体计算公式为

$$\langle\boldsymbol{y}_k\rangle_\omega=\sum_{i=1}^{\mu}\omega_i\boldsymbol{y}_{i:\lambda} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{m}\leftarrow\boldsymbol{m}+\sigma\langle\boldsymbol{y}\rangle_\omega=\sum_{i=1}^{\mu}\omega_i\boldsymbol{x}_{i:\lambda} \tag{10}$$

其中　$$\sum_{i=1}^{\mu}\omega_i=1\quad(\omega_1\geqslant\cdots\geqslant\omega_\mu\geqslant0)$$

$$\boldsymbol{y}_{i:\lambda}=\frac{\boldsymbol{x}_{i:\lambda}-\boldsymbol{m}}{\sigma}$$

式中　$\boldsymbol{x}_{i:\lambda}$——种群排名第 $i$ 的个体

对于最小化问题,其排名由目标函数从小到大的排序决定。

(4)步长控制。首先更新步长进化路径 $\boldsymbol{p}_\sigma$,即

$$\boldsymbol{p}_\sigma\leftarrow(1-c_\sigma)\boldsymbol{p}_\sigma+\sqrt{c_\sigma(2-c_\sigma)\mu_{eff}}\boldsymbol{C}^{-\frac{1}{2}}\langle\boldsymbol{y}\rangle \tag{11}$$

式中　$\mu_{eff}$——方差有效选择质量,且 $1\leqslant\mu_{eff}\leqslant\mu$

步长 $\sigma$ 的更新公式为

$$\sigma\leftarrow\sigma\exp\left(\frac{c_\sigma}{d_\sigma}\left(\frac{\|\boldsymbol{p}_\sigma\|}{E\|N(0,\boldsymbol{I})\|}-1\right)\right) \tag{12}$$

式中　$d_\sigma$——接近 1 的阻尼系数

$E\|N(0,\boldsymbol{I})\|$——正态分布随机向量范数的期望

(5)协方差矩阵调整。更新进化路径

$$\boldsymbol{p}_c \leftarrow (1-c_c)\boldsymbol{p}_c + h_\sigma \sqrt{c_c(2-c_c)\mu_{eff}}\langle \boldsymbol{y} \rangle_\omega \tag{13}$$

式中 $h_\sigma$是 Heaviside 函数,可以在 $\|\boldsymbol{p}_\sigma\|$ 较大时使 $\boldsymbol{p}_c$更新停顿,从而避免协方差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 在线性环境中轴线过快增长。协方差矩阵的调整公式为

$$\boldsymbol{C} \leftarrow (1-c_1-c_\mu)\boldsymbol{C} + c_1(\boldsymbol{p}_c\boldsymbol{p}_c^{\mathrm{T}} + \delta(h_\delta)\boldsymbol{C}) + c_\mu \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \boldsymbol{y}_{i:\lambda}\boldsymbol{y}_{i:\lambda}^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

其中 $\delta(h_\sigma) = (1-h_\sigma)c_c(2-c_c)$

式中 $c_1$——$\boldsymbol{C}$ 的秩为 1 的更新学习率

$c_\mu$——$\boldsymbol{C}$ 的秩为 $\mu$ 的更新学习率

(6)终止判断。若 $g<G$,令 $g=g+1$ 并转步骤(2),否则算法结束。

步骤(5)中,协方差矩阵 $\boldsymbol{C}$ 结合了秩 $\mu$、秩 1 更新率,前者可以充分利用当前代的信息,后者利用了代与代之间的信息,二者的有机结合,避免了算法求解精度上对种群大小的过分依赖,以及进化过程中种群“早熟”的问题;同时引入进化路径来引导种群的寻优搜索,提高了算法的寻优效率和可靠性。$\boldsymbol{C}$ 的更新机制,使得算法在寻优过程中具有确定性。

图 6 为 CMA-ES 算法的进化过程,其中“★”表示种群的均值,“● ○”表示种群中所有个体,“●”表示种群中前 $\mu$ 个优秀个体,“▲”表示最优值,虚线为种群分布形状。可以看出种群的进化过程随着优秀个体的引导接近最优值。

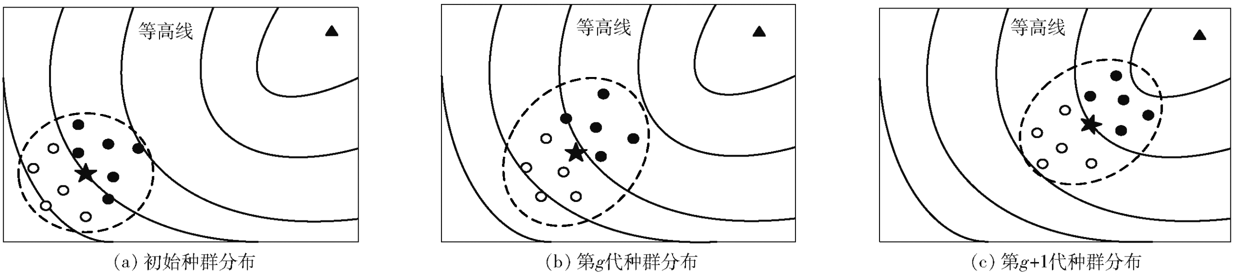


图 6 CMA-ES 进化过程简示图

Fig. 6 Simplified diagram of evolution process of CMA-ES

## 2.2 初始均值确定

原始的 CMA-ES 算法初始均值点随机产生,从第 1 节唯一域的划分可以获知,随机产生的均值点,可能不在需要求解的唯一域内。同时在每个唯一域内适应度函数都是单峰函数,如果均值点在每个要求解的唯一域内,并且接近峰值,则可以大大地缩小算法的搜索时间。实现初始均值点的产生步骤如下:

(1)采用佳点集[26]方法获得分布于唯一域边界条件内的均匀点集,记为 $\boldsymbol{P}_b$。

(2)如果求 $f_{\mathrm{itness1}}$,则将 $\boldsymbol{P}_b$ 中的 $\theta_2$ 和 $\theta_3$ 代入第 1 节中的 $P_{n3}$,根据 $P_{n3}$ 大于(或小于)0 筛选符合唯一域内的点集,并记为 $\boldsymbol{P}_U$;如果是求 $f_{\mathrm{itness2}}$,则跳过此步骤。

(3)如果求 $f_{\mathrm{itness1}}$,将 $\boldsymbol{P}_U$ 代入适应度函数,选择其中使得适应度最小的点作为初始均值点;如果求 $f_{\mathrm{itness2}}$,则将本步骤中方法的 $\boldsymbol{P}_U$ 改为 $\boldsymbol{P}_b$。

佳点集计算公式[27]为

$$r_k = \mathrm{e}^k \quad (1 \leqslant k \leqslant t) \tag{15}$$

$$\boldsymbol{P}_{bi}(k) = \{\{r_1 i\},\{r_2 i\},\cdots,\{r_t i\}, i=1,2,\cdots,n\} \tag{16}$$

式中 $t$——维数

$\{r_k i\}$——$r_k i$ 的小数部分

$\boldsymbol{P}_{bi}(k)$ 中每个维度都在[0,1]内,可以映射至搜索空间,即

$$x_i(k) = (x_k^{\max} - x_k^{\min})\{r_k i\} + x_k^{\min} \tag{17}$$

式中 $x_k^{\min}$——第 $i$ 个点的第 $k$ 维度的最小值

$x_k^{\max}$——第 $i$ 个点的第 $k$ 维度的最大值

## 2.3 逆解处理

从表 2 可看出,$\theta_2$ 和 $\theta_3$ 不全部位于$[-\pi,\pi]$之间,可对求得的逆运动学解进行转换:如 $\theta_i>\pi$,则 $\theta_i = 2\pi - \theta_i$;如 $\theta_i < -\pi$,则 $\theta_i = 2\pi + \theta_i$;否则 $\theta_i$ 不变,$i=1,2,\cdots,6$。

# 3 仿真算例

将进行两个仿真算例,算例 1 求本文所提的工业机器人的 8 组逆解;算例 2 求文献[18]中仿人臂前 6 个关节组成的 6R 机械臂的 8 组逆解。每个案例中都将用本文所提方法与文献[5]所提的数值法进行比较。

用于仿真的计算机配置如下:操作系统为 64 位 Windows 7 专业版,处理器为 IntelCore i3-6100,CPU 速度为 3.70 GHz,安装内存为 8.00 GB;仿真计算软件为 Matlab 2016a。

## 3.1 算例 1

先在工业机器人唯一域 $UD_{31}$ 中,利用式(3)与 CMA-ES 算法分别对奇异点和非奇异点求逆解;然后将求得的非奇异位置作为已知条件,用式(4)与

CMA－ES 算法求解 $\theta_4$和 $\theta_5$；最后求出所有唯一域中的逆运动学解。数值法采用 CMA－ES 算法的初始值进行迭代，直接求 $UD_{31}$非奇异位置的 6 个关节角。

### 3.1.1　参数设置

$\theta_1$、$\theta_4$、$\theta_6$的取值范围均设为[$-\pi,\pi$]。佳点集的点数 $n$ 设为 800，CMA－ES 算法中的种群数 $\lambda=100$，优秀个体数 $\mu=50$，初始步长 $\sigma=0.1$，终止条件为 $G=100$，或者 $f_{itness1}$（$f_{itness2}$）$<10^{-5}$ mm；数值法的步长 $\alpha=0.95$，终止条件 $G=100$，或者位姿误差和 $E_{err}<10^{-5}$ mm。

### 3.1.2　$UD_{31}$中仿真结果

分别取非奇异位置的关节角 $Q_1=[1,-1.2,2.2,0.5,-1,2]$ rad 和奇异位置关节角 $Q_2=[1,-2.465\,226\,450\,132\,348,1.564\,034\,453\,319\,104,0.5,-1,2]$ rad，代入正向运动学式（2），得到位姿 $T_1$、$T_2$，然后在唯一域条件下，分别用 CMA－ES 算法对 $T_1$、$T_2$的位置单独求解 1 000 次。

图 7 和表 3 是 CMA－ES 算法对位置求解的结果，可以看出 CMA－ES 算法在奇异位置和非奇异位置上的求解误差和速度总体相差不大，适应度函数几乎呈线性收敛。

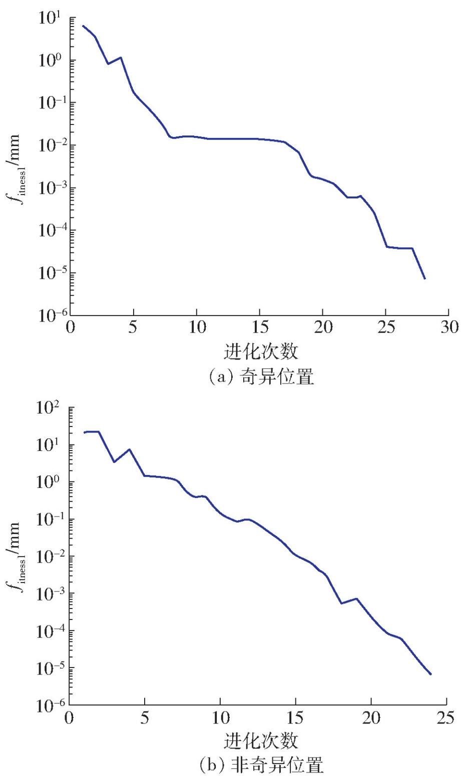


图 7　$UD_{31}$中 CMA－ES 单次求解进化过程

Fig. 7　Single-time evolution of CMA－ES in $UD_{31}$

图 8 和表 4 为求出的 $T_1$前 3 个关节角作为已知条件求解 $UD_{31}$的 $\theta_4$和 $\theta_5$，由于只搜索两个关节角，所以算法收敛迅速，求解速度比位置求解快将近一倍。$\theta_6$是代数公式求解，其速度为 $10^{-4}$ ms/次，可以忽略不计。

**表 3　$UD_{31}$中 CMA－ES 独立运行 1 000 次的 $f_{itness1}$结果**

**Tab. 3　$f_{itness1}$ results for CMA－ES running independently 1 000 times in $UD_{31}$**

| $f_{itness1}$ | 非奇异位置/mm | 奇异位置/mm |
|---|---|---|
| 最小值 | $4.497\,1\times10^{-7}$ | $9.446\,9\times10^{-7}$ |
| 最大值 | $9.988\,7\times10^{-6}$ | $9.990\,3\times10^{-6}$ |
| 平均值 | $6.370\,6\times10^{-6}$ | $6.243\,2\times10^{-6}$ |
| 标准差 | $2.222\,6\times10^{-6}$ | $2.235\,6\times10^{-6}$ |
| 求解速度/(s·次$^{-1}$) | 0.003 1 | 0.003 3 |

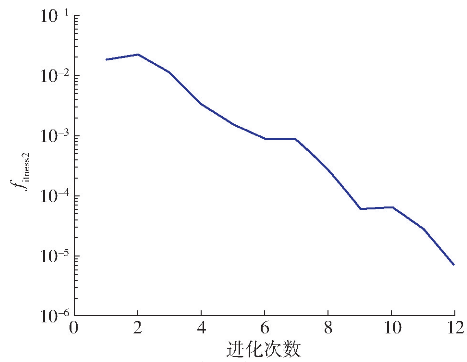


图 8　CMA－ES 单次求解 $\theta_4$和 $\theta_5$进化过程

Fig. 8　Single solution of $\theta_4$ and $\theta_5$ evolutionary processes by CMA－ES

**表 4　CMA－ES 独立运行 1 000 次的 $f_{itness2}$结果**

**Tab. 4　$f_{itness2}$ results for CMA－ES running independently 1 000 times**

| $f_{itness2}$ | 最小值/mm | 最大值/mm | 平均值/mm | 标准差/mm | 求解速度/(s·次$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 非奇异位置 | $2.001\,6\times10^{-7}$ | $9.988\,7\times10^{-6}$ | $5.455\,2\times10^{-6}$ | $2.499\,3\times10^{-6}$ | 0.001 8 |

图 9 是数值法求 $T_1$逆解的迭代过程图，从图中可以看出，收敛速度很快，并且每次求解都收敛于 $7.08\times10^{-7}$，独立运行 1 000 次测出的求解速度为 7.5 ms/次。

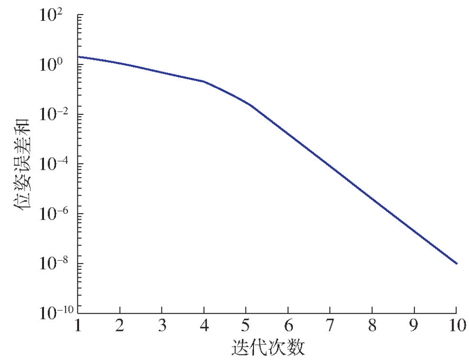


图 9　数值法迭代过程

Fig. 9　Numerical method iterative process

从数据对比可以看出，在 6R 工业机器人逆运动学求解中，CMA－ES 算法的求解稳定性与精度比数

值法稍微逊色，但求解时间优于数值法，CMA - ES 算法求一组逆运动学平均求解时间约 5.1 ms/次。

### 3.2 算例 2

对文献[18]中 KUKA 机器人的前 6 个关节求逆运动学多解。通过该机器人的雅可比奇异方程，可以直接求出 $\theta_2$、$\theta_4$和 $\theta_5$(表 5)，所以唯一域可以直接由边界的方式划分，划分方法参照第 1 节。CMA - ES 的适应度函数为位置与姿态的加权和[7]，位置误差的加权系数为 0.004，姿态误差的加权系数为 1，$\theta_1$、$\theta_3$和 $\theta_6$的取值范围均为$[-\pi,\pi]$ rad。将 $Q_3=[0.5,\pi/4,0.25,-\pi/4,\pi/4,1]$ rad 代入式(2)得到目标位姿 $T_3$。

在唯一域 $UD_1$中对 CMA - ES 和数值法进行求解对比，结果见表 6。

**表 5 KUKA 机器人的唯一域**

**Tab. 5 Uniqueness domains of KUKA robot** rad

| 唯一域 | $\theta_2$ | $\theta_4$ | $\theta_5$ |
|---|---|---|---|
| $UD_1$ | $[-\pi,0]$ | $[-\pi,0]$ | $[-\pi/2,\pi/2]$ |
| $UD_2$ | $[-\pi,0]$ | $[-\pi,0]$ | $[\pi/2,3\pi/2]$ |
| $UD_3$ | $[-\pi,0]$ | $[0,\pi]$ | $[-\pi/2,\pi/2]$ |
| $UD_4$ | $[-\pi,0]$ | $[0,\pi]$ | $[\pi/2,3\pi/2]$ |
| $UD_5$ | $[0,\pi]$ | $[-\pi,0]$ | $[-\pi/2,\pi/2]$ |
| $UD_6$ | $[0,\pi]$ | $[-\pi,0]$ | $[\pi/2,3\pi/2]$ |
| $UD_7$ | $[0,\pi]$ | $[0,\pi]$ | $[-\pi/2,\pi/2]$ |
| $UD_8$ | $[0,\pi]$ | $[0,\pi]$ | $[\pi/2,3\pi/2]$ |

从表 6 可以看出，在 KUKA 机器人逆运动学求解中，CMA - ES 算法的稳定性与精度同样稍逊于数值法，求解速度却快了将近 3 倍。表 7、8 为两款机器人的 8 组逆解，各关节角均转换至$[-\pi,\pi]$。

**表 6 $UD_1$中 CMA - ES 独立运行 1 000 次的绝对位置误差**

**Tab. 6 Absolute position error for CMA - ES running independently 1 000 times in $UD_1$**

| 方法 | 最小值/mm | 最大值/mm | 平均值/mm | 标准差/mm | 求解速度/(s·次$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| CMA - ES 算法 | $6.8987\times10^{-7}$ | $9.9666\times10^{-6}$ | $6.3099\times10^{-6}$ | $2.2609\times10^{-6}$ | 0.0189 |
| 数值法 | $6.5291\times10^{-7}$ | $6.5291\times10^{-7}$ | $6.5291\times10^{-7}$ | $6.5291\times10^{-7}$ | 0.0548 |

**表 7 工业机器人的 8 组逆运动学解**

**Tab. 7 Eight solutions of inverse kinematics of industry robot** rad

| $\theta_i$ | $UD_{11}$ | $UD_{21}$ | $UD_{31}$ | $UD_{41}$ | $UD_{12}$ | $UD_{22}$ | $UD_{32}$ | $UD_{42}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | -2.141 592 65 | -2.141 592 63 | 0.999 999 98 | 0.999 999 96 | -2.141 592 65 | -2.141 592 63 | 0.999 999 98 | 0.999 999 96 |
| $\theta_2$ | 2.491 263 91 | -2.358 157 33 | -1.200 000 02 | 1.006 801 32 | 2.491 263 91 | -2.358 157 33 | -1.200 000 02 | 1.006 801 32 |
| $\theta_3$ | 1.529 773 15 | -1.128 182 02 | 2.199 999 99 | -1.798 408 85 | 1.529 773 15 | -1.128 182 02 | 2.199 999 99 | -1.798 408 85 |
| $\theta_4$ | 2.641 965 23 | 1.004 858 44 | -2.641 580 21 | -0.529 768 79 | -0.499 637 81 | -2.136 650 81 | 0.500 013 05 | 2.611 852 92 |
| $\theta_5$ | 1.001 022 27 | 0.498 266 09 | 1.000 003 84 | 0.924 550 38 | -1.001 039 69 | -0.498 269 99 | -0.999 985 12 | -0.924 538 70 |
| $\theta_6$ | 2.573 361 99 | -1.799 242 87 | -1.141 598 77 | 2.626 049 05 | -0.568 224 29 | 1.342 278 03 | 1.999 993 30 | -0.515 562 54 |

**表 8 KUKA 机器人的 8 组逆运动学解**

**Tab. 8 Eight solutions of inverse kinematics of KUKA robot** rad

| $\theta_i$ | $UD_1$ | $UD_2$ | $UD_3$ | $UD_4$ | $UD_5$ | $UD_6$ | $UD_7$ | $UD_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\theta_1$ | -2.641 592 86 | 2.680 435 40 | 2.680 435 10 | -2.641 592 67 | 0.500 000 10 | -0.461 157 49 | -0.461 157 68 | 0.499 999 73 |
| $\theta_2$ | -0.785 398 16 | -0.683 858 24 | -0.683 858 16 | -0.785 398 14 | 0.785 398 19 | 0.683 858 24 | 0.683 858 20 | 0.785 398 05 |
| $\theta_3$ | -2.891 592 80 | 2.603 175 07 | -0.538 417 76 | 0.249 999 94 | 0.250 000 11 | -0.538 417 66 | 2.603 174 86 | -2.891 592 82 |
| $\theta_4$ | -0.785 398 06 | -0.785 398 04 | 0.785 398 10 | 0.785 398 09 | -0.785 398 24 | -0.785 398 14 | 0.785 398 20 | 0.785 397 92 |
| $\theta_5$ | 0.785 398 48 | 2.356 194 12 | -0.785 398 06 | -2.356 194 40 | 0.785 397 99 | 2.356 194 37 | -0.785 397 87 | -2.356 194 16 |
| $\theta_6$ | 0.999 999 84 | 0.508 946 66 | 0.508 946 44 | 0.999 999 86 | 1.000 000 07 | 0.508 946 48 | 0.508 946 48 | 0.999 999 83 |

### 3.3 结果分析

从两个算例可以看出，在满足精度要求的前提下，CMA - ES 算法的求解速度明显优于文献[5]所提的数值法。

KUKA 机器人中的逆运动学求解速度比工业机器人求解速度慢，主要因为该机器人无法臂腕分离，从而增加了算法的搜索维度，进而增加了求解过程中的时间消耗。经测算，CMA - ES 算法中 68% ~ 74% 的时间消耗用于适应度函数计算，如果可以加快该算法适应度函数的计算，则其求解速度将会得到显著提高。同时，CMA - ES 算法的原理导致其进化过程中，会向不可行域探索，从而在进化中产生无效搜索，如果在这一方面也进行改进，则求解速度将会有所提高。

## 4 结论

（1）利用 det($\boldsymbol{J}$) = 0 及图像可视化方法，将钱江一号 6R 工业机器人的关节空间划分为 8 个唯一域，缩小了 CMA - ES 算法的搜索空间；结合其臂腕分离的特点，分别对手腕位置和接近矢量建立了适应度函数，降低了算法的搜索维度。

（2）利用 CMA - ES 算法在唯一域中进行有约束寻优；采用佳点集算法均匀分布的特点，优化了算法的初始均值点；应用同样的逆解唯一域划分方法和算法，求解了一类 KUKA 仿人机械臂前 6 个关节的 8 组逆解。

（3）在满足精度要求的前提下，与数值法相比，本文提出的算法平均求解时间更短：在工业机器人中，CMA - ES 算法平均求解速度约为 5.1 ms/次，数值法平均求解速度约为 7.5 ms/次；在 KUKA 机器人中，CMA - ES 算法平均求解速度约为 18.9 ms/次，数值法平均求解速度约为 54.8 ms/次。CMA - ES 算法在两款机器人中逆解的位置精度均能稳定在 $10^{-6}$ mm 数量级。

### 参 考 文 献


[1] 熊超，张鹏超，冯博琳，等. 基于并行 RBF 神经网络的机器人逆运动求解[J]. 组合机床与自动化加工术，2017(10)：34 - 36，41.
XIONG Chao, ZHANG Pengchao, FENG Bolin, et al. Solution to inverse kinematics of robot based on parallel RBF neural networks[J]. Combined Machine Tool and Automatic Machining, 2017(10): 34 - 36, 41. (in Chinese)

[2] 韩兴国，宋小辉，殷鸣，等. 6R 焊接机器人逆解算法与焊接轨迹误差分析[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(8)：384 - 390，412.
HAN Xingguo, SONG Xiaohui, YIN Ming, et al. Solution of inverse kinematics and welding trajectory error analysis for 6R welding robot[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(8): 384 - 390, 412. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20170846& journal_id = jcsam. DOI: 10.6041 /j.issn.1000-1298.2017.08.046. (in Chinese)

[3] 姜宏超，刘士荣，张波涛. 六自由度模块化机械臂的逆运动学分析[J]. 浙江大学学报(工学版)，2010，44(7)：1348 - 1354.
JIANG Hongchao, LIU Shirong, ZHANG Botao. Inverse kinematics analysis for 6 degree-of-freedom modular manipulator[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Edition), 2010, 44(7): 1348 - 1354. (in Chinese)

[4] 王英石. 冗余机器人的运动学及轨迹规划的研究[D]. 天津：南开大学，2014.
WANG Yingshi. Research on the kinematics and trajectory planning of redundant roborts[D]. Tianjin: Nankai University, 2014. (in Chinese)

[5] 房立金，高瑞. 一般 6R 机器人逆运动学算法的改进[J]. 机械科学与技术，2018，37(9)：1325 - 1330.
FANG Lijin, GAO Rui. Modified inverse kinematics algorithm for general 6-DOF robots[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2018, 37(9): 1325 - 1330. (in Chinese)

[6] HUSTY M L, PFURNER M, SCHROCKER H. A new and efficient algorithm for the inverse kinematics of a general serial 6R manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(1): 66 - 81.

[7] 王俊龙，张国良，敬斌，等. 一种新的六自由度机械臂运动学反解方法研究[J]. 计算机工程与应用，2013，49(22)：266 - 270.
WANG Junlong, ZHANG Guoliang, JING Bin, et al. Research on way of inverse kinematic solution of six-dof manipulator[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(22): 266 - 270. (in Chinese)

[8] 林阳，赵欢，丁汉. 基于多种群遗传算法的一般机器人逆运动学求解[J]. 机械工程学报，2017，53(3)：1 - 8.
LIN Yang, ZHAO Huan, DING Han. Solution of inverse kinematics for general robot manipulators based on multiple population genetic algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017, 53(3): 1 - 8. (in Chinese)

[9] 王淑青，王亚洲，许琛，等. 改进粒子群算法在机器人位置逆解上的应用[J]. 湖北工业大学学报，2017，32(1)：46 - 50.
WANG Shuqing, WANG Yazhou, XU Chen, et al. Robot position inverse kinematics based on improved PSO[J]. Journal of Hubei University of Technology, 2017, 32(1): 46 - 50. (in Chinese)

[10] 谢宏，向启均，陈海滨，等. 机器人逆运动学差分自适应混沌粒子群求解[J]. 计算机工程与应用，2017，53(8)：126 - 131，185.
XIE Hong, XIANG Qijun, CHEN Haibin, et al. Inverse kinematics solution algorithm of robot based on differential algorithm and adaptive chaotic particle swarm optimization[J]. Computer Engineering and Applications, 2017, 53(8): 126 - 131, 185. (in Chinese)

[11] 任子武，王振华，李娟. 基于混合类电磁机制算法的机械臂逆运动学解[J]. 机械工程学报，2012，48(17)：21 - 28.
REN Ziwu, WANG Zhenhua, LI Juan, et al. Inverse kinematics solution for robot manipulator based on hybrid electromagnetism-like mechanism algorithm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(17): 21 - 28. (in Chinese)

[12] DAYA B, KHAWANDI S, AKOUM M. Applying neural network architecture for inverse kinematics problem in robotics[J]. Journal of Software Engineering and Applications, 2010, 3(3): 230.

[13] RAHEEM F A, KAREEM A R, HUMAIDI A J. Inverse kinematics solution of robot manipulator end-effector position using

multi-neural networks[J]. Engineering and Technology Journal, 2016, 34(7): 1360 - 1368.
[14] RASTEGAR J, DERAVI P. Methods to determine workspace, its subspaces with different numbers of configurations and all the possible configurations of a manipulator[J]. Mechanism and Machine Theory, 1987, 22(4): 343 - 350.
[15] MANOCHA D, CANNY J F. Efficient inverse kinematics for general 6R manipulators[J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1994, 5(10):648 - 657.
[16] WENGER P. A new general formalism for the kinematic analysis of all nonredundant manipulators[C]//Proceedings 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation. IEEE, 1992: 442 - 447.
[17] WENGER P. Cuspidal robots[M]//Singular configurations of mechanisms and manipulators. Springer, Cham, 2019: 67 - 99.
[18] MOULIANITIS V, VOGIATZIEF D, ASPRAGATHOS N. A constructive method for the approximation of the multiple inverse kinematics solutions of noncuspidal 6-dof manipulators[M]//New Trends in Mechanism and Machine Science. Springer, Cham, 2017: 493 - 502.
[19] 周枫林,游雨龙,李光.空间3R机械臂逆向运动学的奇异轨迹线方法研究[J].机械科学与技术,2019,38(3):365 - 372.
ZHOU Fenglin, YOU Yulong, LI Guang. A solving method for inverse kinematics of space 3R manipulator based on singulartrajectory theory[J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 2019, 38(3):365 - 372. (in Chinese)
[20] HANSEN N. The CMA evolution strategy: a comparing review[M]//Towards a new evolutionary computation. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006: 75 - 102.
[21] 刘华山,朱世强,吴剑波,等.基于向量内积的机器人实时逆解算法[J].农业机械学报,2009,40(6):212 - 216,207.
LIU Huashan, ZHU Shiqiang, WU Jianbo, et al. Real-time inverse kinematics algorithm based on vector dot product[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(6):212 - 216, 207. (in Chinese)
[22] 李诚,谢志江,倪卫,等.六自由度装校机器人雅可比矩阵的建立及奇异性分析[J].中国机械工程,2012,23(10):1165 - 1169,1174.
LI Cheng, XIE Zhijiang, NI Wei, et al. Establishment of Jacobian matrix and singularity analysis of 6-dof installing-calibrating robot[J]. China Mechanical Engineering, 2012, 23(10):1165 - 1169, 1174. (in Chinese)
[23] 黄亚飞,梁昔明,陈义雄.求解全局优化问题的正交协方差矩阵自适应进化策略算法[J].计算机应用,2012,32(4):981 - 985.
HUANG Yafei, LIANG Ximing, CHEN Yixiong. Hybrid orthogonal CMAES for solving global optimization problems[J]. Journal of Computer Applications, 2012, 32(4):981 - 985. (in Chinese)
[24] 程沙沙. 结构动力优化设计的进化策略方法[D].南宁:广西大学,2012.
CHENG Shasha. Evolution strategy method for structural dynamic optimization[D]. Nanning: Guangxi University, 2012. (in Chinese)
[25] 陈海兵. 基于CMA - ES算法的太赫兹人工电磁材料设计[D].南京:东南大学,2016.
CHEN Haibing. Design of Terahertz metamateria based on the covariance matrix adaptation evolutionary strategy[D]. Nanjing: Southeast University, 2016. (in Chinese)
[26] 龙秀萍. 类电磁机制算法研究[D].西安:西安电子科技大学,2012.
LONG Xiuping. Research on electron magnetism-like mechanism algorithm[D]. Xi'an: Xidian University, 2012. (in Chinese)
[27] 肖赤心. 高维优化进化算法及其应用研究[D].长沙:中南大学,2009.
XIAO Chixin. Research on evolutionary algorithms for high dimensional optimization and their applications[D]. Changsha: Central South University, 2009. (in Chinese)