

SCARA 并联机构刚度和动力学分析

朱伟¹ 郭倩¹ 马致远¹ 沈惠平¹ 吴广磊²

(1. 常州大学机械工程学院, 常州 213016; 2. 大连理工大学机械工程学院, 大连 116024)

摘要: 阐述了一种由2条RSS支链和2条R(SRS)₂R支链构成,可实现SCARA运动的新型四自由度高速并联机器人机构。首先,采用方位特征理论(POC)分析了该机构的拓扑结构特征,用矢量法求解了位置反解;其次,运用虚拟弹簧法建立了支链的刚度模型,并求解了支链的静力学方程;再次,利用旋量法得到支链中虚拟关节变形到末端变形的微分映射,从而求得机构的笛卡尔刚度矩阵,根据机构的转动和移动刚度性能指标,分别分析了机构在不同工作平面的刚度特性。最后,推导了机构的主动臂、从动臂和动平台速度、加速度方程,并运用虚功原理建立了机构的动力学模型,通过ADAMS三维模型仿真验证了动力学模型的正确性,为该机构的进一步研究及实际应用奠定了理论基础。

关键词: SCARA 并联机构; 虚拟弹簧; 刚度; 动力学

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)10-0375-11

Stiffness and Dynamics Analysis of SCARA Parallel Mechanism

ZHU Wei¹ GUO Qian¹ MA Zhiyuan¹ SHEN Huiping¹ WU Guanglei²

(1. School of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213016, China

2. School of Mechanical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: There is a wide range of industrial applications for the 4-DOF parallel mechanism which can achieve SCARA type output motion (three dimensional translation and one dimensional rotation). A novel four-degree-of-freedom high-speed parallel robot mechanism for SCARA was proposed, which consisted of two RSS branches and two R(SRS)₂R branches. Firstly, the topological structure characteristics such as the POC set of moving platform and mobility were first obtained based on the design theory of position and orientation characteristic (POC) set. Secondly, the virtual spring method was used to establish the stiffness model of the branch and the static of the branch was given. The differential mapping of the virtual joint deformation to the end deformation in the branch was obtained by the spin method and the Cartesian stiffness matrix at the end of the mechanism was obtained according to the static equation. By means of a nondimensionalization of the stiffness matrix, the 6×6 inhomogeneous stiffness matrix was decomposed into two homogeneous sub-matrices, of which two performance indices, corresponding to the translational and rotational stiffnesses, were defined to evaluate the stiffness behaviors of the manipulators. And the stiffness index analysis of the mechanism was carried out, and the stiffness characteristics of the mechanism in different working planes were analyzed. In addition, the dynamic analysis of the mechanism was performed to solve the velocity and acceleration of the active pair, the passive pair and the moving platform of the mechanism. The dynamic equation of the mechanism was established by using the virtual work principle. Finally, the simulation was compared with the ADAMS three-dimensional model simulation to verify the dynamics. The correctness of the modeling laid the foundation for further research and practical application of the organization.

Key words: SCARA parallel mechanism; virtual spring; stiffness; dynamics

0 引言

SCARA 型并联机构具有三平移—转动运动输出特征,由于具有速度快、精度高、操作性能好等优点,受到国内外学者的广泛关注,该型机械手对于完成装配、包装、抓拿及码垛等高速重复性工作具有独特优势^[1]。

文献[2-5]先后发明了一类由 4 条 R-(SS)₂ 支链(其中 R 表示转动副,S 表示球副)和双平台组成的 SCARA 型高速并联机械手,分别称 H4、I4、Par4 和 Heli4。黄田等^[6]在 H4 机构的基础上,设计了一种支链为 2-(2-R(SS)₂)R 的三平移—转动并联机构,用于生产线中高速搬运,称为 Cross—IV 型机器人。刘辛军等^[7]采用 4 条相同支链 R-(SRS)₂-R,得到一种单平台 SCARA 并联机构——X₄,并通过尺寸性能优化,实现了较大角度的转动输出。沈惠平等^[8-9]基于方位特征(POC)理论和机构结构降耦原理,设计了一类非对称低耦合度能实现三平移—转动(3T1R)的 SCARA 并联操作手机构。

机构刚度是描述并联机构抵抗变形能力的重要指标,分析方法有虚拟关节法和虚拟弹簧法。如文献[10-11]根据虚拟关节法,建立支链末端刚度矩阵,进而建立机构的近似整机静刚度解析模型。这种方法应用较广泛,在关节中添加虚拟关节,极大简化了模型,但没有考虑机构空间六自由度的刚度耦合。WU 等^[12]利用虚拟弹簧方法,对 Ragnar 和 Quattro 机器人进行刚度建模,通过对机构末端的笛卡尔刚度矩阵无量纲化,得到机构转动和移动两类刚度指标。这种方法可对支链单独建模,从而可较方便地得到机构的整体刚度性能。

本文提出一种可实现 SCARA 运动的四自由度高速并联机器人机构,由 2 条 R(SRS)₂R 支链和 2 条 RSS 支链构成。分析机构的拓扑结构特征及运动学位置反解,根据虚拟弹簧法建立机构的笛卡尔刚度矩阵,引入 2 个无量纲化性能指标,分别评价机构的平移刚度和旋转刚度性能,并分析机构定位移和定姿态下的刚度分布;根据虚功原理方法建立机构的动力学方程,通过仿真验证动力学模型的正确性。

1 机构运动学分析

1.1 机构描述

机构的 CAD 模型如图 1 所示,由动平台、静平台及 4 条支链组成,原理图如图 2 所示。机构第 1、2

两支链为 R(SRS)₂R 混合支链,记为 HSOC{-R_{i1}-(S_{aj},R_{ej},S_{bj},S_{cj},R_{fi},S_{dj})-R_{i2}-}(i=1,2;j=1,2)。(S_{aj},R_{ej},S_{bj},S_{cj},R_{fi},S_{dj})为平行四边形闭合回路,记为(SRS)₂,其中两转动副 R_{ej}和 R_{fi}的轴线平行且垂直于(S_{aj},S_{bj},S_{cj},S_{dj})所在的平面。转动副 R_{i1}轴线平行于球铰 S_{aj}和 S_{dj}的连线,转动副 R_{i2}轴线垂直于球铰 S_{bj}和 S_{cj}的连线,且 R_{i1}⊥R_{i2}。第 3、4 两支链为 RSS 支链,记为:SOC{-R_{i1}-S_{i2}-S_{i3}-}(i=3,4)。转动副 R₁₂、R₂₂,球副 S₃₃、S₄₃分别位于动平台上,R₁₂和 R₂₂的轴线平行,且垂直于动平台平面;转动副 R₁₁、R₂₁、R₃₁、R₄₁的轴线分别位于静平台的 4 条边,且 R₁₁∥R₃₁,R₂₁∥R₄₁。

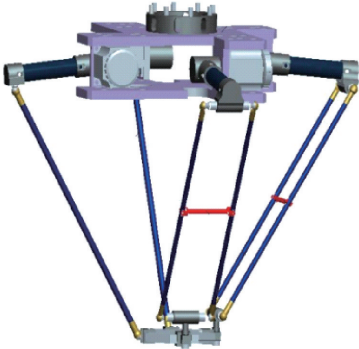


图 1 CAD 模型

Fig. 1 CAD model

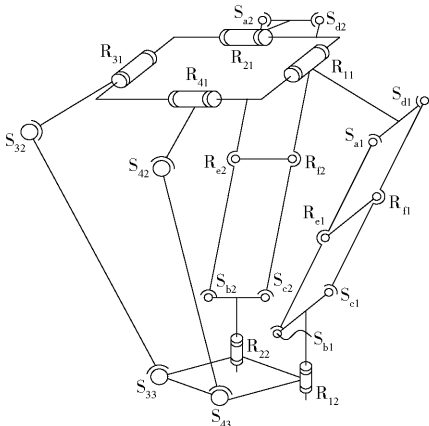


图 2 机构原理图

Fig. 2 Mechanism schematic diagram

1.2 机构拓扑结构

两类支链末端构件的 POC 集^[13]分别为

$$M_{bi} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2 (// (R_{i1}, R_{i2})) \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

$$M_{bi} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \quad (i = 3, 4)$$

则机构动平台的 POC 集为

$$M_{Pa} = M_{b1} \cap M_{b2} \cap M_{b3} \cap M_{b4} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1 \perp (R_{12} R_{22} S_{33} S_{43}) \end{bmatrix}$$

第 1、2 支链($i=1,2$)构成的第 1 个独立回路的独立位移方程数 ξ_{L_1} 为

$$\xi_{L_1} = \dim. \left(M_{b_1} \cup M_{b_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right) = 6$$

由第 1、2 支链组成子并联机构和第 3 支链($i=3$)构成的第 2 个独立回路的独立位移方程数 ξ_{L_2} 为

$$\xi_{L_2} = \dim. \left((M_{b_1} \cap M_{b_2}) \cup M_{b_3} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right) = 6$$

由第 1、2、3 支链组成子并联机构和第 4 支链($i=4$)构成的独立回路的独立位移方程数 ξ_{L_3} 为

$$\xi_{L_3} = \dim. \left((M_{b_1} \cap M_{b_2} \cap M_{b_3}) \cup M_{b_4} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^3 \end{bmatrix} \right) = 6$$

则机构自由度为

$$F = \sum_{i=1}^4 f_i - \sum_{j=1}^3 \xi_{L_j} = (5+5+6+6) - (6+6+6) = 4$$

式中 F ——机构自由度

f_i ——第 i 个运动副自由度

ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路的独立位移方程数

1.3 位置反解

为了便于分析,将机构模型等效为图 3 所示的结构简图。假设动、定平台均为正方形,在定平台的中心 O 点建立静笛卡尔坐标系 $Oxyz$, x 轴沿 OA_1 方向, y 轴沿 OA_2 方向。设 4 条支链的主动臂 A_iC_i 与定平台夹角为 θ_i ($i=1,2,3,4$), l_1 、 l_2 、 l_3 、 e 分别为主动臂 A_iC_i 、从动臂 C_iD_i 、 C_iB_i 、短杆 D_iB_i 的长度, OA_i 的长度为 R , PB_i 的长度为 r , 在动平台的中心 P 点建立动笛卡尔坐标系 $Px'y'z'$, x' 轴沿 PB_1 方向, y' 轴沿 PB_2 方向。

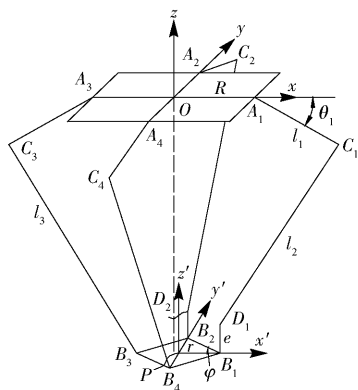


图 3 结构简图

Fig. 3 Structure diagram

由于机构运动输出为三平移—转动,设机构动平台中心 P 点在静坐标系 $Oxyz$ 位置矢量为 $\mathbf{p} = [x_p \ y_p \ z_p]^T$, 动平台绕 z 轴的姿态角为 φ 。

P 点指向 B_i 点的矢量为

$$\mathbf{s}_i = r [c(\varphi + \alpha_i) \ s(\varphi + \alpha_i) \ 0]^T \quad (1)$$

O 点指向 A_i 点的矢量为

$$\mathbf{r}_i = R [c\alpha_i \ s\alpha_i \ 0]^T \quad (2)$$

D_i 点指向 B_i 点的矢量为

$$\mathbf{e}_i = [0 \ 0 \ e]^T \quad (3)$$

主动臂 A_iC_i 的单位矢量为

$$\mathbf{u}_i = [c\theta_i c\alpha_i \ c\theta_i s\alpha_i \ -s\theta_i]^T \quad (4)$$

其中 $\alpha_i = (i-1)\frac{\pi}{2}$ ($i=1,2,3,4$)

式中 s 为正弦函数, c 为余弦函数。

由图 3 可知,各支链满足闭环矢量方程

$$\mathbf{p} + \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i + l_1 \mathbf{u}_i + l_2 \mathbf{v}_i + \mathbf{e}_i \quad (i=1,2) \quad (5)$$

$$\mathbf{p} + \mathbf{s}_i = \mathbf{r}_i + l_1 \mathbf{u}_i + l_3 \mathbf{w}_i \quad (i=3,4) \quad (6)$$

式中 $\mathbf{v}_i$ ——从动臂 C_iD_i 的单位矢量

$\mathbf{w}_i$ ——从动臂 C_iB_i 的单位矢量

由式(5)和式(6)可得

$$(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - l_1 \mathbf{u}_i - \mathbf{e}_i)^2 = (l_2 \mathbf{v}_i)^2 = l_2^2 \quad (i=1,2) \quad (7)$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - l_1 \mathbf{u}_i)^2 = (l_3 \mathbf{w}_i)^2 = l_3^2 \quad (i=3,4) \quad (8)$$

根据式(7)、(8),整理可得

$$E_i s\theta_i + F_i c\theta_i + G_i = 0 \quad (9)$$

其中 $E_1 = E_2 = 2l_1(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - \mathbf{e}_i)^T \hat{\mathbf{z}}$

$$E_3 = E_4 = 2l_1(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T \hat{\mathbf{z}}$$

$$F_1 = F_2 = 2l_1(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - \mathbf{e}_i)^T (c\alpha_i \hat{\mathbf{x}} + s\alpha_i \hat{\mathbf{y}})$$

$$F_3 = F_4 = 2l_1(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T (c\alpha_i \hat{\mathbf{x}} + s\alpha_i \hat{\mathbf{y}})$$

$$G_1 = G_2 = (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - \mathbf{e}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - \mathbf{e}_i) + l_1^2 - l_2^2$$

$$G_3 = G_4 = (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i)^T (\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i) + l_1^2 - l_3^2$$

式中 $\hat{\mathbf{x}}$ 、 $\hat{\mathbf{y}}$ 、 $\hat{\mathbf{z}}$ —— x 轴、 y 轴和 z 轴的单位矢量

依据机构装配模型,由式(9)解得机构的位置反解为

$$\theta_i = 2 \arctan \frac{-E_i - \sqrt{E_i^2 + F_i^2 - G_i^2}}{G_i - F_i} \quad (i=1,2,3,4) \quad (10)$$

2 刚度分析

2.1 弹性静力学模型

并联机构的动、静平台相比支链连杆,具有更好的抗变形能力,故将其动、静平台视为纯刚体,机构整体刚度只和驱动及连杆刚度有关。根据虚拟弹簧法^[14]理论,杆件的弹性变形可通过杆件末端的 n -DOF (n 表示自由度数)的虚拟弹簧表示,而杆件变形与受力的映射矩阵可由 Euler-Bernoulli 梁理论^[15]得到。本机构由 R-S-S 无约束支链和 R-(SRS)₂-R 混合支链组成,分别建立支链的虚拟

刚度模型。

2.1.1 R-S-S 支链刚度模型

采用虚拟弹簧法建立 R-S-S 支链弹性静力学模型,如图 4 所示。

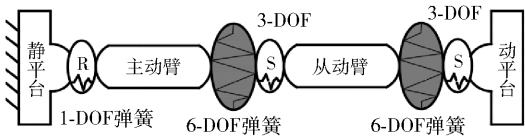


图 4 R-S-S 支链弹性静力学模型

Fig.4 Elastic static model of R-S-S branch

图 4 中,1-DOF 虚拟弹簧表示驱动关节 R 的伺服刚度,6-DOF 虚拟弹簧描述机构中主动臂 A_iC_i 和从动臂 C_iB_i ($i=3,4$) 在空间中的弹性形变量,可分别用 $(\Delta d_1, \Delta d_2, \cdots, \Delta d_6)$ 和 $(\Delta d_7, \Delta d_8, \cdots, \Delta d_{12})$ 表示,3-DOF 的被动关节是考虑静力作用下球铰发生运动对支链刚度的影响,微小变形量可用 $(\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3)$ 表示。

在 R-S-S 支链中建立图 5 所示的局部笛卡尔坐标系 $C_3x_1y_1z_1$ 和 $B_3x_2y_2z_2$, x_1 轴沿 A_3C_3 方向; x_2 轴沿 C_3B_3 方向; y_1 轴和 y_2 轴平行于中心为 A_3 的转动副轴线方向,由于该支链直接连接动平台与静平台,故末端点直接选择动坐标系原点 P 。

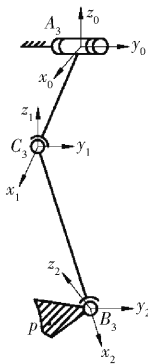


图 5 R-S-S 支链局部坐标系标注

Fig.5 Local coordinate system labeling of R-S-S branch

利用螺旋理论,建立杆件变形和被动关节运动到末端的变形量 ΔT ,可表示为

$$\Delta T = \begin{bmatrix} \Delta t_r \\ \Delta t_t \end{bmatrix} = J_d^i \Delta d^i + J_p^i \Delta p^i \quad (i=3,4) \quad (11)$$

其中

$$J_d^i = [J_{dac}^i \quad J_{dr1}^i \quad J_{dr2}^i]^T \quad (12)$$

$$J_{dac}^i = [\hat{\$}_{d1}^i \quad \hat{\$}_{d2}^i \quad \hat{\$}_{d3}^i \quad \hat{\$}_{d4}^i \quad \hat{\$}_{d5}^i \quad \hat{\$}_{d6}^i]$$

$$J_{dr1}^i = [\hat{\$}_{d7}^i \quad \hat{\$}_{d8}^i \quad \hat{\$}_{d9}^i \quad \hat{\$}_{d10}^i \quad \hat{\$}_{d11}^i \quad \hat{\$}_{d12}^i]$$

$$J_{dr2}^i = [\hat{\$}_{d7}^i \quad \hat{\$}_{d8}^i \quad \hat{\$}_{d9}^i \quad \hat{\$}_{d10}^i \quad \hat{\$}_{d11}^i \quad \hat{\$}_{d12}^i]$$

$$\hat{\$}_{dac}^i = \begin{bmatrix} a_i \\ (r_i - p) \times a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{d1}^i = \begin{bmatrix} u_i \\ (c_i - p) \times u_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{d2}^i = \begin{bmatrix} a_i \\ (c_i - p) \times a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{d3}^i = \begin{bmatrix} g_i \\ (c_i - p) \times g_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{d4}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ u_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{d5}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{d6}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ g_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{d7}^i = \begin{bmatrix} w_i \\ (b_i - p) \times w_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{d8}^i = \begin{bmatrix} a_i \\ (b_i - p) \times a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{d9}^i = \begin{bmatrix} h_i \\ (b_i - p) \times h_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{d10}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ w_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{d11}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{d12}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ h_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

式中 $\Delta t_r, \Delta t_t$ ——支链末端转动和移动变形量
 J_d^i ——第 i 条支链中虚拟弹簧的弹性变形 Δd^i 到末端变形 ΔT 的映射矩阵
 J_p^i ——第 i 条支链中被动关节的变形量 Δp^i 到末端变形 ΔT 的映射矩阵
 J_{dac}^i ——第 i 条支链驱动关节处 1-DOF 虚拟弹簧的变形到末端变形 ΔT 的映射矩阵
 J_{dr1}^i, J_{dr2}^i ——第 i 条支链主动臂 A_iC_i 、从动臂 C_iB_i 末端虚拟弹簧的 6-DOF 弹性变形到末端变形 ΔT 的映射矩阵
 b_i, c_i —— B_i, C_i 在静坐标系的位置矢量
 u_i, a_i, g_i, w_i, h_i —— x_1, y_1, z_1, x_2, z_2 局部坐标轴的方向矢量
消除两球铰间的局部自由度后, J_p^i 可写成为

$$J_p^i = [\hat{\$}_{p1}^i \quad \hat{\$}_{p2}^i \quad \cdots \quad \hat{\$}_{p5}^i]$$

其中

$$\hat{\$}_{p1}^i = \begin{bmatrix} a_i \\ (c_i - p) \times a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{p2}^i = \begin{bmatrix} g_i \\ (c_i - p) \times g_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{p3}^i = \begin{bmatrix} w_i \\ (b_i - p) \times w_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\hat{\$}_{p4}^i = \begin{bmatrix} a_i \\ (b_i - p) \times a_i \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad \hat{\$}_{p5}^i = \begin{bmatrix} h_i \\ (b_i - p) \times h_i \end{bmatrix}_{6 \times 1}$$

假设支链中虚拟弹簧的受力/力矩为 $\tau_i = [\tau_{dac}^i \quad \tau_{dr}^i]^T$, 则驱动关节处弹簧受力/力矩 τ_{dac}^i 和杆件末端弹簧受力/力矩 τ_{dr}^i 可分别表示为

$$\tau_{dac}^i = K_{dac}^i \Delta d_{ac}^i$$

$$\tau_{dr}^i = \begin{bmatrix} \tau_{d1}^i \\ \vdots \\ \tau_{dm}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{d1}^i & 0 \\ 0 & K_{d2}^i \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} \Delta d_1^i \\ \Delta d_2^i \end{bmatrix}$$

式中 K_{dac}^i ——驱动刚度
 Δd_{ac}^i ——第 i 杆件末端变形量
 $\Delta d_1^i, \Delta d_2^i$ ——第 i ($i = 1, 2$) 条支链主动臂和从动臂的变形量

空间中单一连杆采用 6×6 的刚度矩阵来描述其刚度特性, 记作 k_{ij} , 由 Euler - Bernoulli^[15] 梁理论可得矩阵中每一项为

$$k_{11} = \frac{GI_x}{l} \quad k_{22} = \frac{4EI_y}{l} \quad k_{33} = \frac{4EI_z}{l} \quad k_{44} = \frac{EA}{l} \quad k_{55} = \frac{12EI_z}{l^3}$$
$$k_{66} = \frac{12EI_y}{l^3} \quad k_{35} = k_{53} = -\frac{6EI_z}{l^2} \quad k_{26} = k_{62} = \frac{6EI_y}{l^2}$$

式中 l ——杆件长度
 A ——杆件截面积
 I_x ——杆件截面极惯性矩
 I_y, I_z ——截面惯性矩
 E ——材料弹性模量
 G ——材料切变模量

由文献[11]可知, 静力平衡方程为

$$\begin{bmatrix} S_{\text{d}}^i & J_{\text{p}}^i \\ J_{\text{p}}^{iT} & O_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_i \\ \Delta p_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_i \\ O_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中 $S_{\text{d}}^i = J_{\text{d}}^i K_{\text{d}}^{i-1} J_{\text{d}}^{iT}$
式中 $O_{3 \times 3}$ ——零矩阵

由式(13)可得, 支链刚度矩阵 K_i 为

$$\begin{bmatrix} f_i \\ \Delta p_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_i & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta T_i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{\text{d}}^i & J_{\text{p}}^i \\ J_{\text{p}}^{iT} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta T_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

因此, 笛卡尔刚度矩阵 K_i 是支链中虚拟弹簧的变形到末端受力的映射。如果用 f 表示机构末端的受力情况, 则 $f = \sum_{i=1}^4 f_i$, 由式(14)可知 $f_i = K_i \Delta T_i$, 则机构整体刚度矩阵 K 为

$$K = \sum_{i=1}^4 K_i \quad (15)$$

2.1.2 R-(SRS)₂-R 支链刚度模型

对于包含平行四边形结构的复杂支链, 必须先将平行四边形结构作为独立结构进行刚度建模。根据文献[11]将 (SRS)₂ 结构运动特性简化为 R-Pa-R (Pa 为平行四边形) 结构, 并建立弹性静力学模型, 如图 6 所示

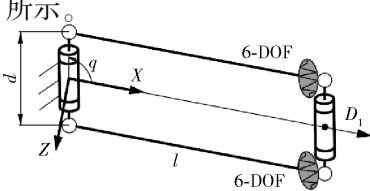


图 6 平行四边形结构
Fig. 6 Parallelogram structure

将两短边杆视作刚体, 两长边杆视作悬臂梁, 根据式(11) ~ (15), 可得在局部坐标系中参考点 D_1 处的刚度矩阵为

$$K_{II} =$$
$$2 \begin{bmatrix} k_{11} + \frac{k_{55} d^2 s^2(q)}{4} & 0 & \frac{k_{55} d^2 s(2q)}{8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_{44} d^2 s^2(q)}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{55} d^2 s(2q)}{8} & 0 & k_{33} + \frac{k_{55} d^2 c^2(q)}{4} & 0 & k_{35} \\ 0 & 0 & 0 & k_{44} & 0 \\ 0 & 0 & k_{35} & 0 & k_{55} \end{bmatrix}_{5 \times 5}$$

式中 d ——长度(图 6) q ——被动副转角
由于平行四边形末端点 D_1 可绕局部坐标系 Y (垂直于 X, Z 轴) 轴转动, 故没有沿 Z 轴方向的线性刚度, 该支链末端以 5 自由度虚拟弹簧来描述其刚度特性。建立 R-(SRS)₂-R 支链的弹性静力学模型如图 7a 所示。

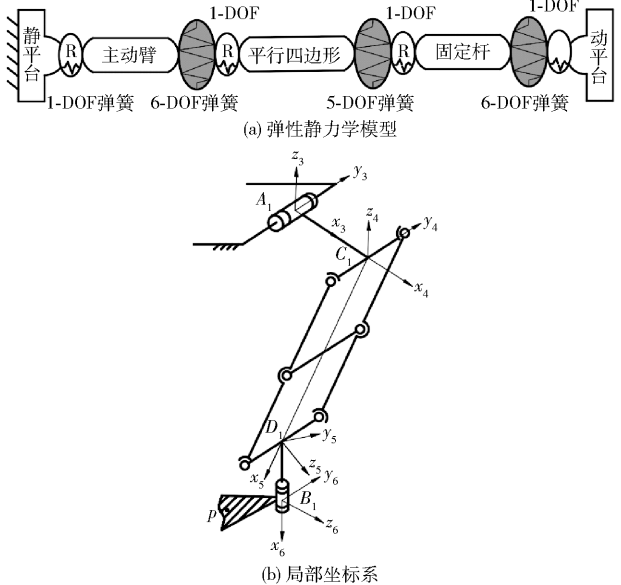


图 7 R-(SRS)₂-R 支链刚度建模
Fig. 7 Stiffness modeling of R-(SRS)₂-R branch

在第 1 条支链中建立图 7b 所示的局部笛卡尔坐标系 $C_1 x_4 y_4 z_4$ 、 $D_1 x_5 y_5 z_5$ 、 $B_1 x_6 y_6 z_6$, 其中 x_4 轴沿 $A_1 C_1$ 方向, x_5 轴沿 $C_1 D_1$ 方向, x_6 轴沿 $D_1 B_1$ 方向, y_4 轴和 y_6 轴平行于中心为 A_1 的转动副轴线方向, z_5 轴垂直于 x_5 轴和 y_5 轴形成的平面。

同 RSS 支链, R-(SRS)₂-R 支链中对应的映射矩阵 J_{d}^i ($i = 1, 2$) 和 J_{p}^i ($i = 1, 2$) 如下

$$\hat{\mathcal{S}}_{\text{dac}} = \begin{bmatrix} w_i \\ (a_i - p) \times w_i \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\text{d1}} = \begin{bmatrix} u_i \\ (c_i - p) \times u_i \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathcal{S}}_{\text{d2}} = \begin{bmatrix} g_i \\ (c_i - p) \times g_i \end{bmatrix} \quad \hat{\mathcal{S}}_{\text{d3}} = \begin{bmatrix} a_i \\ (c_i - p) \times a_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{s}}_{d4} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d5} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{g}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d6} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{d7} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_i \\ (\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d8} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{h}_i \\ (\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{h}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{d9} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_i \\ (\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{q}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d10} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{d11} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{h}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d12} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_i \\ (\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{e}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{d13} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_i \\ (\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{n}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d14} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_i \\ (\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{d15} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{e}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{d16} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{n}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{d17} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} & \hat{\boldsymbol{s}}_{p1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_i \\ (\boldsymbol{c}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix} \\ \hat{\boldsymbol{s}}_{p2} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_i \\ (\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{p}) \times \boldsymbol{w}_i \end{bmatrix}\end{aligned}$$

根据式(14)得到 $\boldsymbol{K}_i(i=1,2)$,由式(15)得到机构整体的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 。

2.2 刚度性能指标

将笛卡尔刚度 $\boldsymbol{K}$ 矩阵拆分为量纲一致的子矩阵

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{mr} & \boldsymbol{K}_{ml} \\ \boldsymbol{K}_{fr} & \boldsymbol{K}_{ft} \end{bmatrix} \tag{16}$$

式中 $\boldsymbol{K}_{mr}、\boldsymbol{K}_{ml}、\boldsymbol{K}_{fr}、\boldsymbol{K}_{ft}$ ——量纲一致的 3×3 子矩阵
用无量纲化参数的方法^[16]对刚度矩阵式(16)进行分析,将外力 $\boldsymbol{f}$ 和力矩 $\boldsymbol{m}$ 分开表示^[17],即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{m} \\ \boldsymbol{f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{mr} & \boldsymbol{K}_{ml} \\ \boldsymbol{K}_{fr} & \boldsymbol{K}_{ft} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\gamma} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{\gamma} = [\delta\gamma_x \quad \delta\gamma_y \quad \delta\gamma_z]^T$
 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = [\delta\varepsilon_x \quad \delta\varepsilon_y \quad \delta\varepsilon_z]^T$

式中 $\Delta\boldsymbol{\gamma}$ ——转动变形量 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ ——移动变形量
将式(17)的子矩阵 $(\boldsymbol{K}_{mr}、\boldsymbol{K}_{ml}、\boldsymbol{K}_{fr}$ 和 $\boldsymbol{K}_{ft})$ 分别在 $\boldsymbol{\beta}$ 空间中定义多个力/力矩椭圆^[11],如 $\|\boldsymbol{f}_\beta\|^2 = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{K}_\beta^T \boldsymbol{K}_\beta \boldsymbol{\beta}$,其中向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是可表示 $\Delta\boldsymbol{\gamma}、\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 的虚拟向量; $\boldsymbol{K}_\beta$ 表示与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 量纲相对应的矩阵。在 $\boldsymbol{\beta}$ 空间中,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由无量纲参数表示为

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{A}_\beta \boldsymbol{p}_\beta \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{A}_\beta$ —— $\boldsymbol{K}_\beta^T \boldsymbol{K}_\beta$ 的特征向量所组成的正交矩阵
 $\boldsymbol{p}_\beta$ ——与向量 $\boldsymbol{\beta}$ 等维的系数向量
在不同矩阵下,用无量纲参数将 $\Delta\boldsymbol{\gamma}、\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\gamma} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_\gamma & \boldsymbol{O}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{O}_{3 \times 3} & \boldsymbol{A}_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_\gamma \\ \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\gamma} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_\gamma & \boldsymbol{O}_{3 \times 3} \\ \boldsymbol{O}_{3 \times 3} & \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_\gamma \\ \boldsymbol{\omega}_\varepsilon \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{A}_\gamma、\boldsymbol{A}_\varepsilon、\boldsymbol{\Omega}_\gamma、\boldsymbol{\Omega}_\varepsilon$ ——二次型矩阵 $\boldsymbol{K}_{mr}^T \boldsymbol{K}_{mr}、\boldsymbol{K}_{ml}^T \boldsymbol{K}_{ml}、\boldsymbol{K}_{fr}^T \boldsymbol{K}_{fr}、\boldsymbol{K}_{ft}^T \boldsymbol{K}_{ft}$ 的特征向量分组成的正交矩阵

$\boldsymbol{\lambda}_\gamma、\boldsymbol{\lambda}_\varepsilon、\boldsymbol{\omega}_\gamma、\boldsymbol{\omega}_\varepsilon$ ——对应的无量纲向量
将式(19)代入式(17)得

$$\begin{cases} \boldsymbol{m} = \boldsymbol{G}_m \boldsymbol{\lambda}^T \\ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{G}_f \boldsymbol{\omega}^T \end{cases} \tag{20}$$

其中 $\boldsymbol{G}_m = [\boldsymbol{K}_{mr} \boldsymbol{A}_\gamma \quad \boldsymbol{K}_{ml} \boldsymbol{A}_\varepsilon]$ $\boldsymbol{\lambda} = [\boldsymbol{\lambda}_\gamma \quad \boldsymbol{\lambda}_\varepsilon]$
 $\boldsymbol{G}_f = [\boldsymbol{K}_{fr} \boldsymbol{\Omega}_\gamma \quad \boldsymbol{K}_{ft} \boldsymbol{\Omega}_\varepsilon]$ $\boldsymbol{\omega} = [\boldsymbol{\omega}_\gamma \quad \boldsymbol{\omega}_\varepsilon]$

式中 $\boldsymbol{G}_m、\boldsymbol{G}_f$ —— $\boldsymbol{m}、\boldsymbol{f}$ 的量纲一致的系数矩阵
用系数矩阵 $\boldsymbol{G}_m$ 和 $\boldsymbol{G}_f$ 的欧几里得范数定义机构在不同位姿下刚度的性能指标 $\kappa_m(\text{N} \cdot \text{m})$ 和 $\kappa_f(\text{N})$,即

$$\begin{cases} \kappa_m = \|\boldsymbol{G}_m\|_2 \\ \kappa_f = \|\boldsymbol{G}_f\|_2 \end{cases} \tag{21}$$

由欧几里得范数的性质可知,指标越大,则机构的刚度性能越好。

2.3 数值算例和分析

机构相关参数如表1所示。

表1 机构参数	
Tab.1 Mechanism parameters	
参数	数值
4条支链主动臂 A_iC_i 杆长 l_1/mm	100
4条支链主动臂 A_iC_i 外径 r_1/mm	8
第 $i(i=1,2)$ 条支链从动臂 C_iD_i 长 l_2/mm	150
第 $i(i=1,2)$ 条支链从动臂 C_iD_i 长 r_2/mm	8
第 $i(i=1,2)$ 条支链从动短杆 D_iB_i 长 e/mm	50
第 $i(i=1,2)$ 条支链从动臂 D_iB_i 外径 r_3/mm	8
第 $i(i=1,2)$ 条支链主、从动臂材料密度 $\rho_1/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	210
第 $i(i=3,4)$ 条支链从动臂 C_iB_i 杆长 l_3/mm	185
第 $i(i=3,4)$ 条支链从动臂 C_iB_i 外径 r_4/mm	8
第 $i(i=3,4)$ 条支链从动臂材料密度 $\rho_2/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	210
动平台密度 $\rho_3/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 801
动平台质量 m_1/kg	0.467 7
动平台外接圆半径 r/mm	50
静平台密度 $\rho_4/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7 801
静平台外接圆半径 R/mm	100
主动臂整体质量 m_2/kg	0.190 2
从动臂整体质量 m_3/kg	0.203 7

为了分析3T1R机构在不同位姿下的刚度性能,分别对动平台在 z 方向的不同高度和不同转角 φ 进行分析。

根据机构运动逆解方程(10),从机构的可达工作空间中取底面半径为100 mm,高为90 mm的圆柱体的工作空间,如图8所示。设定动平台转角 $\varphi=0^\circ$,通过对机构在工作空间中圆柱顶部($z=-100\text{ mm}$)和

底部($z = -230\text{ mm}$)进行刚度分析。

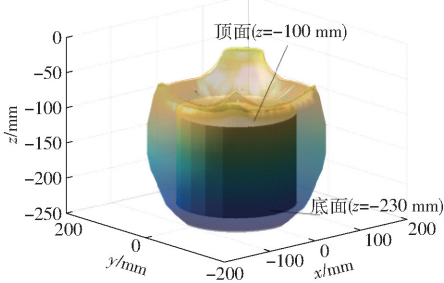


图 8 workspace
Fig. 8 Workspace

计算 κ_m 、 κ_f 指标值如图 9、10 所示。由图 9 可知,动平台在定姿态 $\varphi = 0^\circ$ 时,机构的刚度性能指标值图谱在静坐标系关于 $y = x$ 对称,这一点符合机构结构的对称特征。机构刚度指标的峰值都出现在对称轴两侧,并且在顶部和底部不同高度上,峰值分布差异较大。另外 R-(SRS)₂-R 支链的刚度明显大于 R-S-S 支链,这是由于平行四边形回路具有较大的刚度特性。

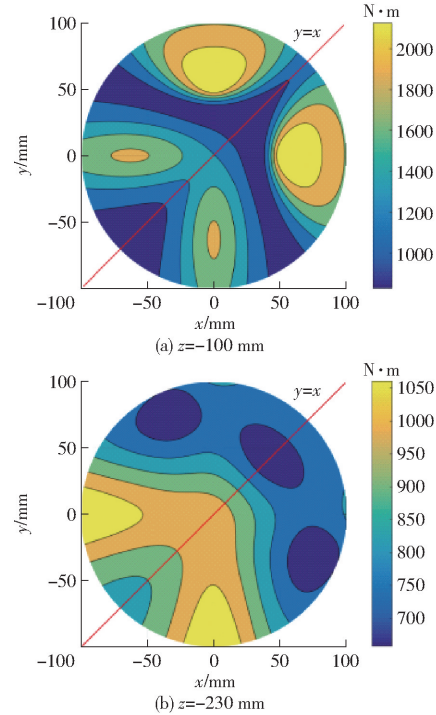


图 9 不同高度下的 κ_m 等高线

对比图 9a、9b 可以发现,在抵抗扭转变形的能力上,工作空间顶部均优于底部,顶部峰值靠近复杂支链 R-(SRS)₂-R 一侧,而在工作空间底部,刚度峰值接近简单支链 RSS;在抵抗力变形的能力上,如图 10 所示,顶部图 10a 和底部图 10b 的刚度性能仍存在明显差异,越接近高度顶部时,机构的抗变形能力越优,当在顶部时,抵抗扭转变形和抵抗力矩变形的性能分布相似。

当动平台转角 $\varphi = \pm 45^\circ$ 时,机构底部在工作空

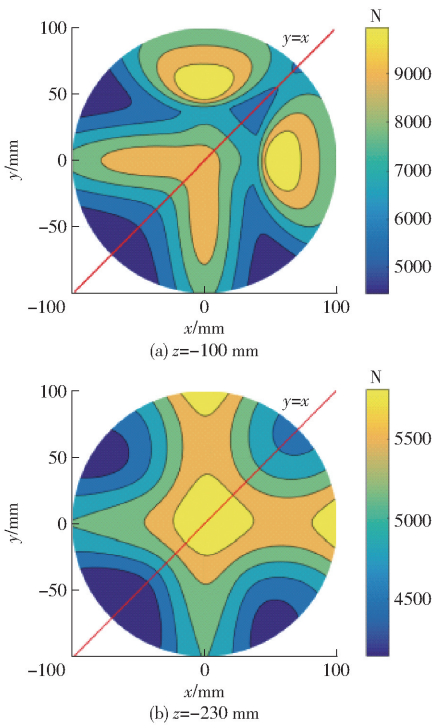


图 10 不同高度下的 κ_f 等高线

Fig. 10 Contours at different heights at $\varphi = 0^\circ$

间中刚度性能的变化如图 11 所示。可见,当转角 $\varphi = \pm 45^\circ$ 时,两种姿态下机构的刚度性能分布也沿 $y = x$ 轴线对称。图形四周的刚度特性变化较大,中心易出现极值。比较指标 κ_m 和 κ_f 的变化趋势,可以发现在底部时,机构扭转刚度和线刚度的变化趋势相似。

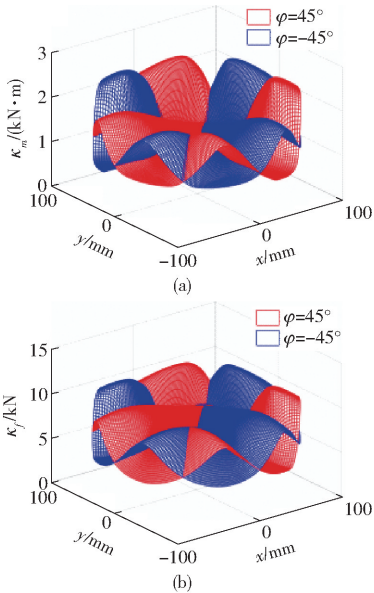


图 11 $\varphi = \pm 45^\circ$ 时刚度指标等高线

Fig. 11 Stiffness index contour line at $\varphi = \pm 45^\circ$

3 动力学分析

3.1 动平台速度、加速度分析

设动平台速度矢量记为 $\dot{\boldsymbol{p}} = (\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p)^T$, 动平

台加速度矢量记为 $\ddot{\mathbf{p}} = (\ddot{x}_p, \ddot{y}_p, \ddot{z}_p)^T$ 。机构输入速度矢量记为 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3, \dot{\theta}_4)^T$, 加速度矢量记为 $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = (\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3, \ddot{\theta}_4)^T$ 。 $\mathbf{v}_i (i=1, 2, 3, 4)$ 为垂直于主动臂 $A_i C_i$ 的角速度单位矢量; $\boldsymbol{\varepsilon}_i (i=1, 2)$ 为从动臂 $C_i D_i$ 角速度矢量, $\boldsymbol{\omega}_i (i=3, 4)$ 为从动臂 $C_i B_i$ 的角速度矢量。由式(5)、(6)、(10)可得从动臂 $C_i D_i$ 和从动臂 $C_i B_i$ 的单位矢量为

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{l_2}(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - l_1 \mathbf{u}_i - \mathbf{e}_i) \quad (i=1, 2) \quad (22)$$

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{l_3}(\mathbf{p} + \mathbf{s}_i - \mathbf{r}_i - l_1 \mathbf{u}_i) \quad (i=3, 4) \quad (23)$$

对式(5)、(6)两边同时对时间求导, 得

$$\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{s}}_i = l_1 \dot{\theta}_i (\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i) + l_2 \boldsymbol{\varepsilon}_i \mathbf{v}_i \quad (i=1, 2) \quad (24)$$

$$\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{s}}_i = l_1 \dot{\theta}_i (\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i) + l_3 \boldsymbol{\omega}_i \mathbf{w}_i \quad (i=3, 4) \quad (25)$$

其中

$$\dot{\mathbf{s}}_i = \mathbf{k}_i \dot{\varphi}$$

$$\mathbf{k}_i = r(-s(\varphi + \alpha_i), c(\varphi + \alpha_i), 0)^T$$

式(24)、(25)两边分别点乘 $\mathbf{v}_i$ 、 $\mathbf{w}_i$, 可得

$$\mathbf{v}_i \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{s}}_i) = l_1 \theta_i \mathbf{v}_i \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i) \quad (26)$$

$$\mathbf{w}_i \cdot (\dot{\mathbf{p}} + \dot{\mathbf{s}}_i) = l_1 \theta_i \mathbf{w}_i \cdot (\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i) \quad (27)$$

由式(26)和式(27)得到机构速度方程为

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1} \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_\theta \quad (28)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J} = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_\theta \quad \dot{\boldsymbol{\theta}} = [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\theta}_3 \quad \dot{\theta}_4]^T$$

$$\dot{\mathbf{X}} = [\dot{\mathbf{p}}^T \quad \dot{\varphi}]^T$$

$$\mathbf{J}_x = l_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T(\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_1) \\ \mathbf{v}_2^T(\mathbf{v}_2 \mathbf{u}_2) \\ \mathbf{v}_3^T(\mathbf{v}_3 \mathbf{u}_3) \\ \mathbf{v}_4^T(\mathbf{v}_4 \mathbf{u}_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 \\ \mathbf{v}_1^T \mathbf{k}_1 & \mathbf{v}_2^T \mathbf{k}_2 & \mathbf{w}_3^T \mathbf{k}_3 & \mathbf{w}_4^T \mathbf{k}_4 \end{bmatrix}^T$$

式中 $\mathbf{J}$ ——机构雅可比矩阵

对式(28)求一阶导, 整理可得机构加速度方程为

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{J}^{-1} \mathbf{f}(\dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{J}^{-1} \ddot{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{X}} \quad (29)$$

$$\text{其中 } \ddot{\mathbf{X}} = [\ddot{\mathbf{p}}^T \quad \ddot{\varphi}]^T \quad \mathbf{f}(\dot{\mathbf{X}}) = [f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4]^T$$

$$f_i = \dot{\mathbf{X}}^T \boldsymbol{\Theta}_i \dot{\mathbf{X}} / l_i^2$$

$$\boldsymbol{\Theta}_i = \frac{1}{\nabla_i} \left[l_1 \mathbf{v}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{C} + \frac{\mathbf{R}_i^T (\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}_i)^T (\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\eta}_i) \boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^T \mathbf{R}_i^T}{\nabla_i^2} + \right. \\ \left. \frac{l_1}{l_2} \mathbf{R}_i^T \left(\mathbf{E}_3 - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}_i) \boldsymbol{\eta}_i^T}{\nabla_i} \right)^T \left(\mathbf{E}_3 - \frac{(\boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{u}_i) \boldsymbol{\eta}_i^T}{\nabla_i} \right) \mathbf{R}_i^T \right] \quad (30)$$

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{cases} \mathbf{v}_i & (i=1, 2) \\ \mathbf{w}_i & (i=3, 4) \end{cases} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_i & (i=1, 2) \\ \boldsymbol{\omega}_i & (i=3, 4) \end{cases}$$

$$\nabla_i = \mathbf{v}_i^T (\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i) \quad \mathbf{R}_i = [\mathbf{E}_3 \quad \mathbf{k}_i]$$

式中 $\mathbf{E}_3$ ——3 阶单位矩阵

$\mathbf{C}$ ——四阶方阵, 且矩阵元素 $C_{44} = 1$, 其余都为 0

3.2 支链及质点速度、角速度分析

设机构第 i 支链上 A_i 点的坐标系为 $\{A_i\}$, C_i 点的坐标系为 $\{C_i\}$, D_i 点的坐标系为 $\{D_i\}$; B_i 点的坐标系为 $\{B_i\}$, 如图 5 和图 7 所示。上述各坐标系 $\{O\}$ 到 $\{A_i\}$ 的旋转变换矩阵记为 ${}^{A_i} \mathbf{R}_O$, 以此类推。

在 $\{A_i\}$ 坐标系下, 主动臂 $A_i C_i$ 质心速度为

$${}^{A_i} \mathbf{v}_{i1} = \frac{1}{2} l_1 \dot{\theta}_i {}^{A_i} \mathbf{R}_O (\mathbf{v}_i \mathbf{u}_i) = \mathbf{J}_{i1} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad (31)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J}_{i1} = \left[\frac{1}{2} l_1 \dot{\theta}_i (\mathbf{v}_{i1} \mathbf{u}_{i1})^T \mathbf{R}_O^T \quad 0 \right]^T \boldsymbol{\Phi}_i$$

$$\boldsymbol{\Phi}_1 = [\hat{\mathbf{x}}^T \quad 0]^T \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = [\hat{\mathbf{y}}^T \quad 0]^T$$

$$\boldsymbol{\Phi}_3 = [\hat{\mathbf{z}} \quad 0]^T \quad \boldsymbol{\Phi}_4 = [0 \quad \hat{\mathbf{z}}]^T$$

式中 $\mathbf{J}_{i1}$ ——主动臂 $A_i C_i$ 质心速度到机构输入角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的映射矩阵

则质心 C_i 速度为

$${}^{A_i} \mathbf{v}_{ci} = 2 {}^{A_i} \mathbf{v}_{i1} \quad (32)$$

在 $\{A_i\}$ 坐标系下, 因为短杆 $D_i B_i (i=3, 4)$ 与动平台保持垂直, 且动平台绕着其法线方向转动, 因此点 D_i 、 B_i 的速度和 $D_i B_i$ 杆的质心点速度相等, 即

$${}^{A_i} \mathbf{v}_{bi} = {}^{A_i} \mathbf{v}_{di} = {}^{A_i} \mathbf{v}_{i3} \quad (i=1, 2) \quad (33)$$

由式(31)和式(33)可得从动臂 $C_i D_i$ 质心点速度为

$${}^{A_i} \mathbf{v}_{i2} = \frac{1}{2} ({}^{A_i} \mathbf{v}_{ci} + {}^{A_i} \mathbf{v}_{di}) = \mathbf{J}_{i2} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=1, 2) \quad (34)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J}_{i2} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{i1} + {}^{A_i} \mathbf{R}_O \mathbf{J}_{Di})$$

式中 $\mathbf{J}_{i2}$ ——主动臂 $C_i D_i$ 质心速度到输入角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 的映射矩阵

在坐标系 $\{A_i\}$ 下, 点 B_i 的速度为

$${}^{A_i} \mathbf{v}_{bi} = {}^{A_i} \dot{\mathbf{p}}_i + {}^{A_i} \dot{\mathbf{s}}_i = ({}^{A_i} \mathbf{R}_O \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}_{si}) \dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_{Bi} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=3, 4) \quad (35)$$

其中

$$\mathbf{J}_{si} = {}^{A_i} \mathbf{R}_O \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^T & \mathbf{k}_2^T & \mathbf{k}_3^T & \mathbf{k}_4^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T [\boldsymbol{\Phi}_1^T \quad \boldsymbol{\Phi}_2^T \quad \boldsymbol{\Phi}_3^T \quad \boldsymbol{\Phi}_4^T]^T \\ \mathbf{J}_{Bi} = {}^{A_i} \mathbf{R}_O \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}_{si}$$

式中 $\mathbf{J}_{Bi}$ —— B_i 点的速度到输入角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 之间的映射矩阵

由式(31)和式(33)得从动臂 $C_i B_i$ 质心点速度为

$${}^{A_i} \mathbf{v}_{i2} = \frac{1}{2} ({}^{A_i} \mathbf{v}_{ci} + {}^{A_i} \mathbf{v}_{bi}) = \mathbf{J}_{i2} \dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=3, 4) \quad (36)$$

$$\text{其中 } \mathbf{J}_{i2} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}_{i1} + \mathbf{J}_{Bi})$$

式中 J_{i2} ——驱动臂 C_iB_i 质心速度到机构输入角速度 $\dot{\theta}$ 的映射矩阵

对式(26)两边同时叉乘 ${}^{A_i}\mathbf{v}_i$, 可得从动臂 C_iD_i ($i=1,2$) 在坐标系 $\{A_i\}$ 的角速度为

$${}^{A_i}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{l_{i2}}\mathbf{U}_i(\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}_{si} - 2\mathbf{J}_{i1})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_{\varepsilon_i}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (37)$$

式中 $\mathbf{U}_i$ —— $\mathbf{u}_{i2}$ 的反对称矩阵

$\mathbf{J}_{\varepsilon_i}$ ——从动臂 C_iD_i 角速度到输入角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 之间的映射矩阵

对式(27)两边同时叉乘 ${}^{A_i}\mathbf{v}_i$, 可得从动臂 C_iB_i ($i=3,4$) 在 $\{A_i\}$ 坐标系的角速度为

$${}^{A_i}\boldsymbol{\omega}_i = \frac{1}{l_2}\mathbf{U}_i(\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}_{si} - 2\mathbf{J}_{i1})\dot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{J}_{\omega_i}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (38)$$

式中 $\mathbf{J}_{\omega_i}$ ——从动臂 C_iB_i 角速度到输入角速度 $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ 之间的映射矩阵

3.3 支链质心加速度、角加速度分析

在坐标系 $\{A_i\}$ 下, 对式(24)两边关于时间求一阶导, 并两边同时叉乘 ${}^{A_i}\mathbf{v}_i$, 化简得从动臂 C_iD_i ($i=1,2$) 的角加速度为

$${}^{A_i}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = \dot{\mathbf{J}}_{\varepsilon_i}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_{\varepsilon_i}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=1,2) \quad (39)$$

在坐标系 $\{A_i\}$ 下, 对式(25)两边关于时间求一阶导, 并两边同时叉乘 ${}^{A_i}\mathbf{v}_i$, 化简得从动臂 C_iB_i ($i=3,4$) 的角加速度为

$${}^{A_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \dot{\mathbf{J}}_{\omega_i}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{J}_{\omega_i}\ddot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=3,4) \quad (40)$$

对式(34)和式(36)求一阶导, 可得从动臂 C_iD_i ($i=1,2$) 和 C_iB_i ($i=3,4$) 质心加速度为

$${}^{A_i}\dot{\mathbf{v}}_{i2} = \mathbf{J}_{i2}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}_{i2}\dot{\boldsymbol{\theta}} \quad (i=1,2,3,4) \quad (41)$$

3.4 动力学方程

设动平台质量为 m_p , 主动臂支链质量为 m_{i1} , R-(SRS)₂-R 支链中平行四边形杆质量为 m_{i2} ($i=1,2$), R-S-S 支链中从动臂 C_iD_i 的质量为 m_{i2} ($i=3,4$), 动平台所受到的外力 $\mathbf{F} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$ 。

3.5 动力学模型

(1) 动平台受力分析

忽略和动平台固连的 D_iB_i 杆, 不考虑摩擦力的影响, 根据达朗贝尔原理可得动平台质心处的惯性力为

$$\mathbf{Q} = m_p g \hat{\mathbf{z}} - m_p \ddot{\mathbf{p}} \quad (42)$$

(2) 主动臂、从动臂受力分析

在坐标系 $\{A_i\}$ 下, 主动臂惯性力和惯性力矩可表示为

$$\begin{bmatrix} {}^{A_i}\mathbf{Q}_{i1} \\ {}^{A_i}\mathbf{T}_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{i1} {}^{A_i}\mathbf{R}_0 \mathbf{g} - m_{i1} {}^{A_i}\dot{\mathbf{v}}_{i1} \\ -\dot{\boldsymbol{\theta}}_i {}^{A_i}\mathbf{I}_{i1} {}^{A_i}\dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\boldsymbol{\theta}}_i^2 \mathbf{v}_i ({}^{A_i}\mathbf{I}_{i1} {}^{A_i}\mathbf{v}_i) \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3,4) \quad (43)$$

同理, 从动臂惯性力和惯性力矩可表示为

$$\begin{bmatrix} {}^{A_i}\mathbf{Q}_{i2} \\ {}^{A_i}\mathbf{T}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{i2} {}^{A_i}\mathbf{R}_0 \mathbf{g} - m_{i2} {}^{A_i}\dot{\mathbf{v}}_{i2} \\ -{}^{A_i}\mathbf{I}_{i2} {}^{A_i}\boldsymbol{\varepsilon}_i - {}^{A_i}\boldsymbol{\varepsilon}_i ({}^{A_i}\mathbf{I}_{i2} {}^{A_i}\boldsymbol{\varepsilon}_i) \end{bmatrix} \quad (i=1,2) \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A_i}\mathbf{Q}_{i2} \\ {}^{A_i}\mathbf{T}_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{i2} {}^{A_i}\mathbf{R}_0 \mathbf{g} - m_{i2} {}^{A_i}\dot{\mathbf{v}}_{i2} \\ -{}^{A_i}\mathbf{I}_{i2} {}^{A_i}\dot{\boldsymbol{\omega}}_i - {}^{A_i}\boldsymbol{\omega}_i ({}^{A_i}\mathbf{I}_{i2} {}^{A_i}\boldsymbol{\omega}_i) \end{bmatrix} \quad (i=3,4) \quad (45)$$

式中 ${}^{A_i}\mathbf{Q}_{i1}$ 、 ${}^{A_i}\mathbf{Q}_{i2}$ ——主动臂和从动臂在坐标系 $\{A_i\}$ 下的惯性力

${}^{A_i}\mathbf{T}_{i1}$ 、 ${}^{A_i}\mathbf{T}_{i2}$ ——主动臂和从动臂在坐标系 $\{A_i\}$ 下的惯性力矩

在不同坐标系下, 惯性张量矩阵的变换是矩阵的二次型变换^[18], 即

$$\begin{aligned} {}^{A_i}\mathbf{I}_{i1} &= {}^{A_i}\mathbf{R}_{C_i} \mathbf{I}_{i1} {}^{A_i}\mathbf{R}_{C_i}^T \quad (i=1,2,3,4) \\ {}^{A_i}\mathbf{I}_{i2} &= \begin{cases} {}^{A_i}\mathbf{R}_{D_i} \mathbf{I}_{i2} {}^{A_i}\mathbf{R}_{D_i}^T & (i=1,2) \\ {}^{A_i}\mathbf{R}_{B_i} \mathbf{I}_{i2} {}^{A_i}\mathbf{R}_{B_i}^T & (i=3,4) \end{cases} \end{aligned}$$

式中 ${}^{A_i}\mathbf{I}_{i1}$ ——主动臂 A_iC_i 在坐标系 $\{A_i\}$ 下的惯性张量矩阵

$\mathbf{I}_{i1}$ ——主动臂 A_iC_i 在坐标系 $\{C_i\}$ 下的惯性张量矩阵

${}^{A_i}\mathbf{I}_{i2}$ ——从动臂 C_iD_i 和 C_iB_i 在坐标系 $\{A_i\}$ 下的惯性张量矩阵

$\mathbf{I}_{i2}$ ——从动臂 C_iD_i 和 C_iB_i 在 $\{D_i\}$ ($i=1,2$)、 $\{B_i\}$ ($i=3,4$) 坐标系下的惯性张量矩阵

(3) 动力学模型

根据虚功原理^[19-20], 机构动力学方程为

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}^T \delta \boldsymbol{\theta} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{X} + \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{X} + \\ &\sum_{i=1}^4 ({}^{A_i}\mathbf{Q}_{i1}^T \delta^i \mathbf{X}_{i1} + {}^{A_i}\mathbf{T}_{i1}^T \delta^i \boldsymbol{\theta}_{i1}) + \\ &\sum_{i=1}^4 ({}^{A_i}\mathbf{Q}_{i2}^T \delta^i \mathbf{X}_{i2} + {}^{A_i}\mathbf{T}_{i2}^T \delta^i \boldsymbol{\theta}_{i2}) = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

其中 $\mathbf{M} = [M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad M_4]^T$
 $\delta \mathbf{X} = [\delta x \quad \delta y \quad \delta z]^T$

式中 $\mathbf{M}$ ——驱动力矩矢量

$\delta \mathbf{X}$ 、 $\delta \boldsymbol{\theta}$ ——动平台质心处的虚位移和虚转角位移矢量

$\delta^i \mathbf{X}_{i1}$ 、 $\delta^i \mathbf{X}_{i2}$ ——驱动臂、从动臂在坐标系 $\{A_i\}$ 下的虚位移矢量

$\delta^i \boldsymbol{\theta}_{i1}$ 、 $\delta^i \boldsymbol{\theta}_{i2}$ ——驱动臂、从动臂在坐标系 $\{A_i\}$ 下的虚转角位移矢量

$$\begin{cases} \delta \mathbf{X} = \mathbf{J} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta^i \mathbf{X}_{i1} = \mathbf{J}_{i1} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta^i \mathbf{X}_{i2} = \mathbf{J}_{i2} \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta^i \boldsymbol{\theta}_{i2} = \mathbf{J}_{\varepsilon_i} \delta \boldsymbol{\theta} \end{cases} \quad (47)$$

将式(47)代入式(46),整理得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} = & \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^2 m_{ij} \boldsymbol{J}_{ij}^{\text{T} A_i} \boldsymbol{R}_0 - m_p \boldsymbol{J}^{\text{T}} \hat{\boldsymbol{z}} \right) \boldsymbol{g} + \\ & \left[\sum_{i=1}^4 m_{i2} (\boldsymbol{J}_{i2}^{\text{T}} \dot{\boldsymbol{J}}_{\omega_i} \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{i2}^{\text{T}} \boldsymbol{J}_{\omega_i} \dot{\boldsymbol{J}}) + \boldsymbol{J}_{\omega_i}^{\text{T} A_i} \boldsymbol{I}_{i2} (\dot{\boldsymbol{J}}_{\omega_i} \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{\omega_i} \dot{\boldsymbol{J}}) - \right. \\ & \left. m_{i1} (\boldsymbol{J}_{i1}^{\text{T}} \dot{\boldsymbol{J}}_{i1} \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{i1}^{\text{T}} \boldsymbol{J}_{i1} \dot{\boldsymbol{J}}) + \theta_i^{A_i} \boldsymbol{I}_{i1} (\dot{\boldsymbol{J}}_{i1} \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_{i1} \dot{\boldsymbol{J}}) \right] \dot{\boldsymbol{X}} + \\ & \left[\theta_i^{A_i} \boldsymbol{I}_{i1} \boldsymbol{J}_{i1} \boldsymbol{J} - m_{i1} \boldsymbol{J}_{i1}^{\text{T}} \boldsymbol{J}_{i1} \boldsymbol{J} + m_{i2} \boldsymbol{J}_{i2}^{\text{T}} \boldsymbol{J}_{\omega_i} \boldsymbol{J} + \right. \\ & \left. \boldsymbol{J}_{\omega_i}^{\text{T} A_i} \boldsymbol{I}_{i2} \boldsymbol{J}_{\omega_i} \boldsymbol{J} \right] \ddot{\boldsymbol{X}} \end{aligned} \quad (48)$$

3.6 算例仿真

假设动平台所受到的外力为 $\boldsymbol{F} =$

$[0 \ 0 \ -5]^{\text{T}}$,4 条支链主动臂的运动输入分别为

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_3 = \frac{\pi}{15} \sin(0.2\pi t) \\ \theta_2 = \theta_4 = -\frac{\pi}{15} \sin(0.2\pi t) \end{cases} \quad (49)$$

根据动力学模型式(48)可计算出 4 条主动臂的输入转矩,将计算所得的驱动力和 ADAMS 模型仿真所得的进行比较,如图 12 所示。由图 12 可得,两者结果相差不大,表明动力学方程式(48)的正确性。仿真误差主要是由于 ADAMS 模型中没有考虑机构重力的影响造成的,且惯性参数设置误差和质

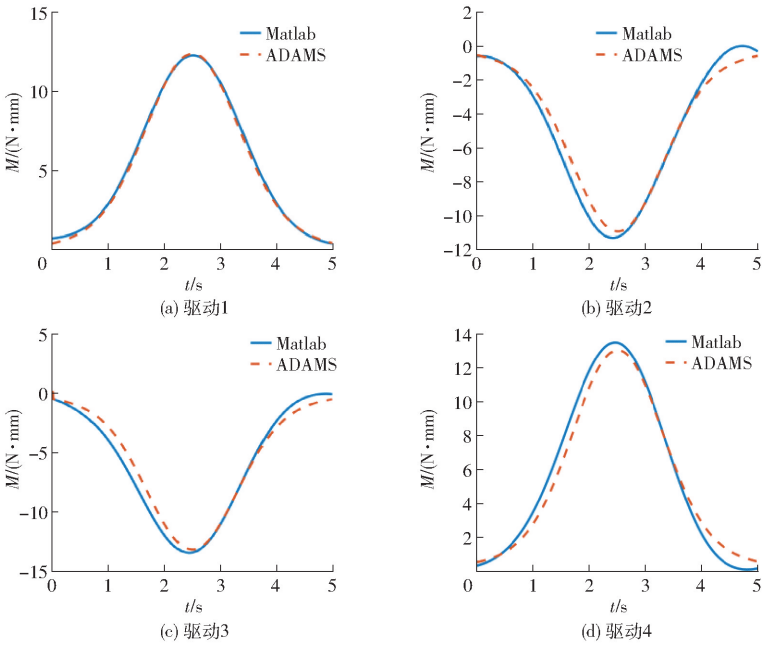


图 12 仿真结果对比
Fig.12 Comparison of simulation results

量参数的估算误差也是原因之一。

4 结论

(1)运用虚拟弹簧法对 3T1R 机构进行了刚度建模,得到了机构笛卡尔空间的刚度矩阵。针对机构的转动和移动刚度性能指标,分别分析了机构在不同工作平面的刚度特性,结果表明,动平台

越往上,工作高度越高,刚度性能越好,且刚度性能指标值分布关于 $y = x$ 轴对称,符合机构结构特点。

(2)推导了机构动平台和各支链的速度、加速度和受力方程;基于虚功原理建立了机构的动力学方程,并通过 ADAMS 模型仿真结果进行了对比,验证了动力学模型的正确性。

参 考 文 献

[1] 袁山. SCARA 机器人——依然快捷和可靠[J]. 机器人技术与应用, 2005(5):31-33.
YUAN Shan. SCARA robot—still fast and reliable[J]. Robotics Technology and Application, 2005(5): 31-33. (in Chinese)
[2] PIERROT F, COMPANY O. H4: a new family of 4-DOF parallel robots [C] // IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics, 1999:508-513.
[3] KRUT S, COMPANY O, BENOIT M, et al. I4: a new parallel mechanism for SCARA motions[C] //2003 IEEE International Conference on Robotics & Automation, 2003,2:03CH37422.
[4] NABAT V, RODRIGUEZ M D L O, COMPANY O, et al. Par4: very high speed parallel robot for pick-and-place[C] //IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems, 2005:1202-1207.
[5] SHIH H, TORNG P, LIN C. Heli4: a parallel robot for scara motions with a very compact traveling plate and a symmetrical design[C] //IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots & Systems, 2007.

- [6] 黄田,赵学满,梅江平,等. 一种具有三维平动一维转动的并联机构;201220007884. X[P]. 2012-11-14.
- [7] 刘辛军,谢福贵,王立平,等. 一种可实现 SCARA 运动的四自由度单动平台并联机构;201210435375.1[P]. 2013-02-13.
- [8] 沈惠平,尹洪贺,邵国为,等. 低耦合度 3T1R 并联操作手设计与运动学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2017,48(5): 410-417.
SHEN Huiping, YIN Honghe, SHAO Guowei, et al. Design and kinematics analysis of low coupling 3T1R parallel manipulator [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(5): 410-417. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20170552&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.05.052. (in Chinese)
- [9] 李菊,曾氢菲,沈惠平,等. SCARA 并联机构拓扑分析与其低耦合度机型设计[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(11): 405-416.
LI Ju, ZENG Qingfei, SHEN Huiping, et al. Topological analysis of SCARA parallel mechanism and its low coupling model design[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(11): 405-416. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20171150&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.11.050. (in Chinese)
- [10] GOSSELIN C. Stiffness mapping for parallel manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6: 377-382.
- [11] QUENNOUELLE C, GOSSELIN C M. Stiffness matrix of compliant parallel mechanisms[M]//LENARČIĆ, WENGER P. Advances in robot kinematics: analysis and design. Dordrecht: Springer, Dordrecht, 2008: 331-341.
- [12] WU G, BAI S, PREBEN H. On the stiffness of three/four degree-of-freedom parallel pick-and-place robots with four identical limbs[C]//IEEE International Conference on Robotics & Automation. IEEE, 2016.
- [13] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社, 2012.
- [14] PASHKEVICH A, CHABLAT D, WENGER P. Stiffness analysis of overconstrained parallel manipulators[J]. Mechanism & Machine Theory, 2009, 44(5):966-982.
- [15] 夏拥军,陆念力. 梁杆结构稳定性分析的高精度 Euler-Bernoulli 梁单元[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2006, 22(3): 362-366.
XIA Yongjun, LU Nianli. High-precision Euler-Bernoulli beam element for stability analysis of beam-beam structures[J]. Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science Edition), 2006, 22(3): 362-366. (in Chinese)
- [16] KÖVECSES J, EBRAHIMI S. Parameter analysis and normalization for the dynamics and design of multibody systems[J]. Journal of Computational & Nonlinear Dynamics, 2009, 4(3):340-341.
- [17] TAGHVAEIPOUR A, ANGELES J, LESSARD L. On the elastostatic analysis of mechanical systems[J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 58:202-216.
- [18] 李元宗,王耀国. 机器人转动惯性张量的坐标变换[J]. 机器人,1992(2):31-35.
LI Yuanzong, WANG Yaoguo. Coordinate transformation of rotating inertia tensor of robot[J]. Robot,1992(2):31-35. (in Chinese)
- [19] SHARIFZADEH M, TALE M M, KALHOR A, et al. An experimental dynamic identification & control of an overconstrained 3-DOF parallel mechanism in presence of variable friction and feedback delay[J]. Robotics & Autonomous Systems, 2018, 102:27-43.
- [20] 胡波,王安东,李周斌,等. 一种基于新型 4-UPS+PSPR 并联机构的动感座椅运动学和动力学分析[J]. 燕山大学学报, 2018, 42(1):11-21.
HU Bo, WANG Andong, LI Zhoubin, et al. Kinematics and dynamics analysis of a dynamic seat based on a new 4-UPS+PSPR parallel mechanism[J]. Journal of Yanshan University, 2018, 42(1): 11-21. (in Chinese)