

串并混联四足仿生机器人动力学建模与分析

王晓磊^{1,2} 金振林¹ 李晓丹² 刘 祥²

(1.燕山大学机械工程学院,秦皇岛 066004; 2.辽宁工业大学机械工程与自动化学院,锦州 121001)

摘要: 对一种可快速行走、承载能力大及侧向解耦较好的串并混联四足仿生机器人进行动力学建模与分析。阐述了腿部机构的布局,进行了运动学分析,建立了具有显式的线速度雅可比矩阵,并推导了各构件的速度与末端线速度的显式表达式。采用 Lagrange 方程建立了显式的腿部机构动力学方程,推导了腿部机构的逆动力学方程。通过实例对腿部机构的逆动力学方程进行验证,分析了步长对驱动液压缸最大输出力的影响规律;依据逆动力学方程建立了仿生机器人的移动能耗性能指标,并对仿生机器人的移动能耗进行了分析。实例与分析表明,动力学方程理论推导正确;在腿部足端着地的瞬间各驱动液压缸产生最大输出力,与抬腿高度无关;在直线行走和侧向行走时,随着步长的增加,液压缸输出力单调增大;在腿部机构侧向行走时,3 个驱动缸中侧摆缸输出力最大。

关键词: 串并混联机械腿; 动力学分析; 能耗性能指标; 四足仿生机器人; Lagrange 方程

中图分类号: TP242 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)04-0401-12

Dynamic Modeling and Analysis of Serial-parallel Hybrid
Quadruped Bionic Robot

WANG Xiaolei^{1,2} JIN Zhenlin¹ LI Xiaodan² LIU Xiang²

(1. College of Mechanical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China

2. College of Mechanical Engineering and Automation, Liaoning University of Technology, Jinzhou 121001, China)

Abstract: The dynamic modeling and analysis of a new kind of bionic robot which had the characteristics of large capacity, fast walking and good lateral decoupling was carried out. Firstly, the layout of the leg mechanism was introduced, the kinematics analysis was carried out, the explicit linear velocity Jacobi was established, and the explicit expressions of each component's velocity and terminal linear velocity were derived, which laid a foundation for dynamic modeling. Then, the explicit dynamic equation of leg mechanism was established by using Lagrange equation, and the inverse dynamics of leg mechanism was deduced. Finally, the inverse dynamics equation of the leg mechanism was verified by an example, and the effect of the asynchronous length on the maximum output force of the hydraulic cylinder was analyzed. The moving energy consumption of bionic robot was analyzed according to the inverse dynamic equation. An example showed that the theoretical derivation of dynamic equation was correct. At the moment when the feet landed on the ground, each drive hydraulic cylinder produced the maximum output force, which was independent of the lift height of the leg. When walking in straight and lateral direction, the output force of hydraulic cylinder was increased monotonously with the increase of step length. When walking in the lateral direction of leg mechanism, the maximum output force of the three driving cylinders was lateral swing cylinder, which laid a foundation for the design of buffer structure and dynamic parameters. By analyzing the influence of different gait parameters on energy consumption index of the whole machine, the method of reducing energy consumption was summarized, which provided basis for the gait parameter optimization and trajectory planning of the quadruped robot.

Key words: serial-parallel hybrid mechanical legs; dynamic analysis; energy consumption indicators; quadruped robot; Lagrange equation

收稿日期: 2018-10-22 修回日期: 2018-12-09

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863 计划)项目(2011AA040900)、机械系统与振动国家重点实验室课题项目(MSV201506)和辽宁省高等学校科学技术研究项目(JL201615402)

作者简介: 王晓磊(1979—),男,博士生,辽宁工业大学副教授,主要从事并联机构理论及应用研究,E-mail: wxlgxy@126.com

通信作者: 金振林(1962—),男,教授,博士生导师,主要从事并联机构理论及应用研究,E-mail: zljn@ysu.edu.cn

0 引言

由于仿生足式机器人通过对爬行动物运动机理分析进行结构模仿设计^[1],因此,仿生足式机器人在复杂环境下行走具有良好的地形适应能力,受到世界各研究机构的广泛关注。美国波士顿动力学公司设计了多种液压驱动串联腿部机构的四足仿生机器人^[2-4],燕山大学设计、开发多款并联、串并混联腿部结构的多足仿生机器人^[5-8],山东大学^[9-10]、国防科学技术大学^[11]、北京理工大学^[12]、哈尔滨工业大学^[13]等高校团队对串联腿部机构的四足仿生机器人进行深入研究,上海交通大学高峰团队采用并联结构机械腿研制了多足仿生机器人^[14-15]。上述仿生机器人的腿部机构大多是由纯并联机构或由简单的杆件串联机构组成。纯并联结构承载能力大,但不适于快速行走;串联结构行走速度快,承载能力没并联机构好。

对于仿生机器人来说,动力学分析可为系统动力参数选取提供依据,同时还可对机器人承载时轨迹规划奠定基础,因此对仿生机器人的动力学研究非常重要^[16]。目前,对仿生机器人腿部机构的动力学分析较少,文献[17-20]均对腿部机构的动力学进行了研究,但都只是对仿生机器人腿部机构的伺服参数进行预估,而没有对整个机器人在行走过程的动力学及移动能耗进行分析。本文研究一种串并混联仿生机械腿,针对该四足机器人的腿部机构进行动力学建模,并进行验证、动力学分析及移动能耗分析,为动力参数与缓冲结构设计及轨迹规划奠定基础。

1 运动学分析

运动学分析是研究动力学的基础,包括位置分析、速度分析及加速度分析。本文主要对腿部结构的位置和速度进行分析。

1.1 腿部模型

与上海交通大学联合开发的四足机器人整体样机及腿部机构简图如图 1 所示。该四足机器人由 4 条相同的腿部机构组成,每条腿部机构均具有 3 个自由度。该腿部机构由平面并联五杆机构 $OABCD$ 驱动双菱形行程放大机构实现并联驱动,两个直线驱动副的伸缩实现足端抬起和前后摆动。同时串联部分有直线副驱动的四杆机构 $MKNQ$,实现五杆机构及双菱形机构沿 MP 轴的侧摆运动,实现侧向解耦。通过这两种机构的组合实现了腿部机构的前后迈步和侧向迈步。由于本文研究的机器人属于高性能四足仿生机器人,要求具有快速移动、承受高负载

性能。因此,系统中直线驱动均采用伺服液压缸驱动,使系统具有高动态性、大负载能力^[21]。由于腿部机构由并联五杆机构与双菱形行程放大机构组成,因此,直线驱动器只需移动很小的距离,就能获得很大的工作空间,可实现快速行走;由于该腿部结构采用了串并混联机构,较传统的串联机械腿相比,具有更大的承载能力,且转向灵活。

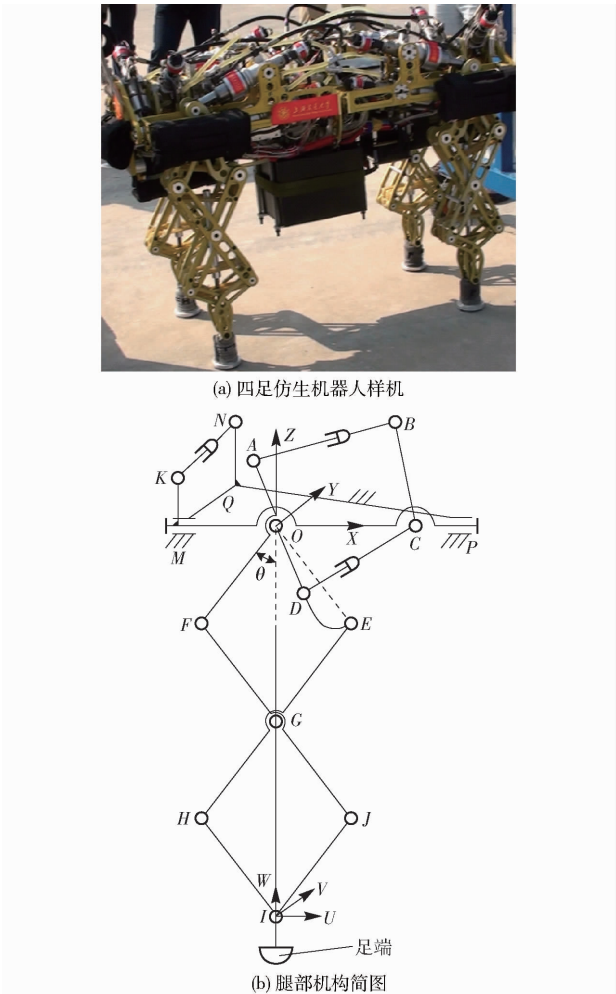


图 1 四足机器人整体样机及腿部机构简图
Fig. 1 Whole prototype and leg mechanism schematics of quadruped robot

1.2 位置分析

为了便于分析,建立图 1b 所示的固定坐标系 $OXYZ$ 和动坐标系 $IUVW$ 。 O 为固定坐标系原点, X 轴沿 OC 方向,且在 OMP 平面内, Z 轴垂直于 OMP 平面向上, Y 轴由右手螺旋法则确定。平面四杆机构 $MKNQ$ 平行于 YOZ 平面。设 I 为动坐标系原点, W 轴沿 IO 方向, U 轴垂直 W 轴,向右, V 轴由右手螺旋法则确定。设结构参数 $\parallel OA \parallel = l_1, \parallel AB \parallel = l_2, \parallel BC \parallel = l_3, \parallel CD \parallel = l_4, \parallel OD \parallel = l_5, \parallel OC \parallel = l_6, \parallel MK \parallel = l_7, \parallel KN \parallel = l_8, \parallel NQ \parallel = l_9, \parallel QM \parallel = l_{10}$, 双菱形 $OFGE$ 和 $GHIJ$ 边长均为 l , OF 与 OG 夹角为 θ 。由图 1b 可知,该腿部机构具有沿 X 、 Y 轴转动和

沿 Z 向移动的自由度,所以在位置分析时,可先分析平面机构末端位置的变化,再沿 X 轴旋转 φ 得到,同时设平面机构末端绕 Y 轴旋转为 ϕ 。

结合图 1b,参考点 I 的位置可以写成

$$\begin{cases} p_x = -4l\cos\theta\sin\phi \\ p_y = 4l\cos\theta\cos\phi\sin\varphi \\ p_z = -4l\cos\theta\cos\phi\cos\varphi \end{cases} \quad (1)$$

根据式(1)可得

$$\begin{cases} \varphi = \arctan \frac{-p_y}{p_z} \\ \theta = \arccos \frac{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}{4l} \\ \phi = \arcsin \frac{-p_x}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \end{cases} \quad (2)$$

为了便于分析,将总的腿部结构简图分为 2 个平面图,如图 2 所示。图 2a 为平面并联机构简图,为未绕 X 轴旋转时平面机构的姿态,图 2b 为四杆机构 $MKNQ$ 在 YOZ 面的投影图。在图 2a 中, AOF 为一构件,其中 OF 杆与 X 轴的夹角为 β , OA 与 OF 夹角为 γ' 。 OE 与 X 轴夹角为 α ,为了避免干涉, OE 杆件不是直线,而是使 OD 与 OE 线有一夹角为 γ 。图 2b 中, MK 与 Y 轴夹角为 θ_6 , KN 与 Y 轴夹角为 θ_7 。

图 2 中的 C_i 为各液压缸缸体、活塞杆、杆件及支架的质心,其中 C_1 、 C_3 、 C_{13} 为活塞杆质心, C_2 、 C_4 、 C_{12} 为液压缸缸体质心, C_9 为杆件 AOF 的质心, C_{10} 为杆件 ODE 的质心, C_7 、 C_8 为 HI 和 JI 质心,并在杆件的中心点, C_5 、 C_6 为杆件 FJ 和 EH 质心,与 G 点重合, C_{11} 为腿部支架质心, C_{14} 为足端及导向杆组件的质心,各质心点处的杆件空间角速度为 ω_i ,速度为 v_{Ci} 。

结合图 2a,根据结构约束条件可得到

$$\begin{cases} \alpha = \theta_5 + \gamma \\ \beta = \theta_1 + \gamma' \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \theta = \frac{\alpha - \beta}{2} \\ \phi = \frac{3}{2}\pi - (\beta + \theta) \end{cases} \quad (4)$$

根据式(4)得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3}{2}\pi - (\phi - \theta) \\ \beta = \frac{3}{2}\pi - (\phi + \theta) \end{cases} \quad (5)$$

将式(3)代入式(5)得

$$\begin{cases} \theta_5 = \frac{3}{2}\pi - (\phi - \theta) - \gamma \\ \theta_1 = \frac{3}{2}\pi - (\phi + \theta) - \gamma' \end{cases} \quad (6)$$

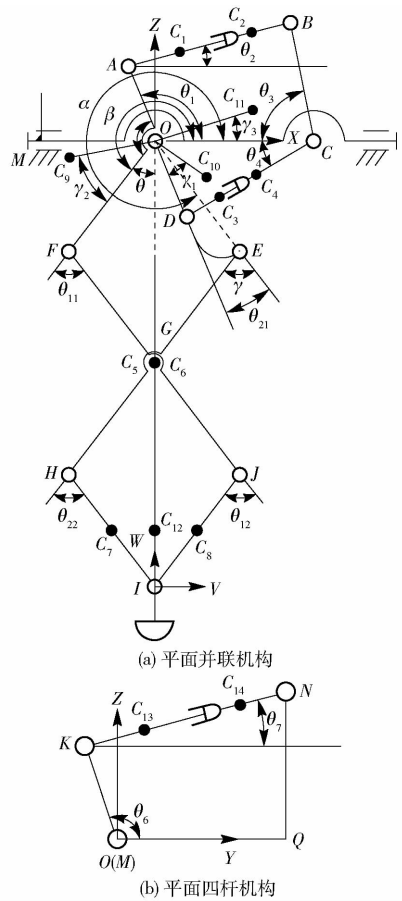


图 2 整体腿部结构拆分图

Fig. 2 Breakdown diagrams of overall leg structure

同理根据结构约束条件可知, $OABC$ 、 ODC 均为一个矢量环,可写成

$$\begin{cases} l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 + l_3\cos\theta_3 = l_6 \\ l_1\sin\theta_1 + l_2\sin\theta_2 = l_3\sin\theta_3 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} -l_5\sin\theta_5 = l_4\sin\theta_4 \\ l_5\cos\theta_5 + l_4\cos\theta_4 = l_6 \end{cases} \quad (8)$$

结合图 2b,同理由结构约束条件得到

$$\varphi = \theta_6 - \frac{\pi}{2} \quad (9)$$

$$\begin{cases} l_7\sin\theta_6 + l_8\sin\theta_7 = l_9 \\ l_7\cos\theta_6 + l_8\cos\theta_7 = l_{10} \end{cases} \quad (10)$$

若已知该腿部机构末端 I 的位置,根据式(1)、(2)即可求出 φ 、 θ 、 ϕ ,再根据式(5)求出 θ_5 、 θ_1 ,根据式(7)、(8)在平面机构中即可求出 l_2 、 l_4 ;根据式(9)求得 θ_6 ,根据式(10)求得 l_8 ,即为腿部机构的位置反解。

1.3 运动工作空间

给定结构参数 $l = 260\text{ mm}$, $l_1 = l_5 = 50\text{ mm}$, $\gamma = 15^\circ$, $\gamma' = 135^\circ$, $l_3 = 155\text{ mm}$, $l_6 = 305\text{ mm}$, $\theta_3 = 75^\circ$ 。设约束条件为 $15^\circ \leq \theta \leq 75^\circ$, $-15^\circ \leq \varphi \leq 15^\circ$, $255\text{ mm} \leq (l_2, l_4, l_8) \leq 340\text{ mm}$ 。根据位置方程与约束条件,通过 Matlab 绘制腿部机构的工作空间,如图 3 所示。

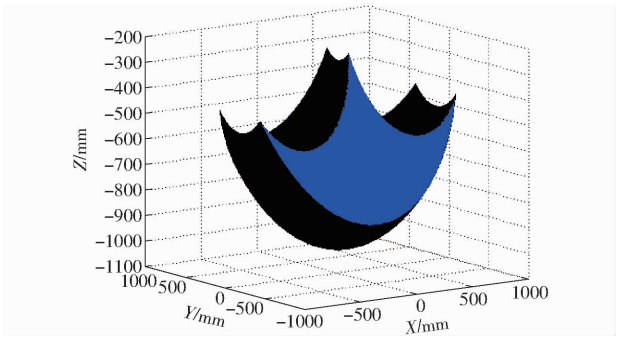


图 3 腿部机构工作空间

Fig. 3 Workspace of leg mechanism

从图 3 可以看出,杆长变化量在 0 ~ 85 mm 内,沿 X 轴的长度可达 1 000 mm,沿 Z 轴的工作空间高度最大可达 450 mm。由此可知,该机构驱动杆通过双菱形机构将末端行程放大,且随位置的不同,放大倍数不同,越处于下部放大倍数越大。

1.4 线速度

为了进行腿部结构的动力学分析,需要推导输入与输出的线速度映射关系。

分别对式(3)、(4)求导整理得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}_5 - \dot{\theta}_1}{2} \\ \dot{\phi} = -\frac{\dot{\theta}_5 + \dot{\theta}_1}{2} \end{cases} \quad (11)$$

对式(7)进行求导得

$$\begin{cases} -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \dot{l}_2 \cos \theta_2 = 0 \\ l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \dot{l}_2 \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

消去 $\dot{\theta}_2$ 得

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{l}_2}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \quad (13)$$

对式(8)求导得

$$\begin{cases} -l_5 \dot{\theta}_5 \cos \theta_5 = \dot{l}_4 \sin \theta_4 + l_4 \dot{\theta}_4 \cos \theta_4 \\ -l_5 \dot{\theta}_5 \sin \theta_5 + \dot{l}_4 \cos \theta_4 - l_4 \dot{\theta}_4 \sin \theta_4 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

消去 $\dot{\theta}_4$ 得

$$\dot{\theta}_5 = \frac{\dot{l}_4}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \quad (15)$$

对式(9)、(10)求导得

$$\dot{\varphi} = \dot{\theta}_6 \quad (16)$$

$$\begin{cases} l_7 \dot{\theta}_6 \cos \theta_6 + l_8 \dot{\theta}_7 \cos \theta_7 + \dot{l}_8 \sin \theta_7 = 0 \\ -l_7 \dot{\theta}_6 \sin \theta_6 - l_8 \dot{\theta}_7 \sin \theta_7 + \dot{l}_8 \cos \theta_7 = 0 \end{cases} \quad (17)$$

消去 $\dot{\theta}_7$ 得

$$\dot{\theta}_6 = \dot{\varphi} = \frac{\dot{l}_8}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} \quad (18)$$

将式(13)、(15)分别代入式(11)可得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\dot{l}_4}{2l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} - \frac{\dot{l}_2}{2l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \\ \dot{\phi} = -\frac{\dot{l}_4}{2l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} - \frac{\dot{l}_2}{2l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \end{cases} \quad (19)$$

对式(1)求导得

$$v_x = 4l \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi - 4l \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \quad (20)$$

$$v_y = -4l \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \sin \varphi - 4l \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \sin \varphi + 4l \dot{\varphi} \cos \theta \cos \phi \cos \varphi \quad (21)$$

$$v_z = 4l \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi \cos \varphi + 4l \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \cos \varphi + 4l \dot{\varphi} \cos \theta \cos \phi \sin \varphi \quad (22)$$

将式(22)乘 $\cos \varphi$ 加上式(21)乘 $\sin \varphi$,整理得

$$\dot{\varphi} = \frac{v_y \cos \varphi + v_z \sin \varphi}{4l \cos \theta \cos \phi} \quad (23)$$

将式(23)代入式(18),可得

$$\dot{l}_8 = \frac{v_y \cos \varphi + v_z \sin \varphi}{4l \cos \theta \cos \phi} l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7) = av_y + bv_z \quad (24)$$

其中

$$a = \frac{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7) \cos \varphi}{4l \cos \theta \cos \phi}$$
$$b = \frac{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7) \sin \varphi}{4l \cos \theta \cos \phi}$$

将式(20)乘 $\cos \phi \sin \varphi$ 加上式(21)乘 $\sin \phi$ 得

$$\dot{\phi} = dv_x + ev_y + fv_z \quad (25)$$

$$\text{其中 } d = \frac{\sin \phi}{4l \cos \theta} \quad e = \frac{-\sin \phi \sin \varphi}{4l \cos \theta} \quad f = \frac{\sin \phi \cos \varphi}{4l \cos \theta}$$

由式(20)得

$$\dot{\theta} = \frac{v_x + 4l \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi}{4l \cos \theta \sin \phi} = gv_x + hv_y + kv_z \quad (26)$$

其中

$$g = \frac{1}{4l \cos \theta \sin \phi} \quad h = \frac{\cos \varphi}{4l \cos \theta \sin \phi}$$
$$k = \frac{\sin \varphi}{4l \cos \theta \sin \phi}$$

由式(11)、(25)、(26)得

$$\dot{\theta}_1 = -(\dot{\theta} + \dot{\phi}) = -(d + g)v_x - (e + h)v_y - (f + k)v_z \quad (27)$$

$$\dot{\theta}_5 = \dot{\theta} - \dot{\phi} = (g - d)v_x + (h - e)v_y + (k - f)v_z \quad (28)$$

将式(27)、(28)分别代入式(13)、(15)得

$$\dot{l}_2 = l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) [(g - d)v_x + (h - e)v_y + (k - f)v_z] \quad (29)$$

$$\dot{l}_4 = l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4) [(g - d)v_x + (h - e)v_y + (k - f)v_z] \quad (30)$$

将式(29)、(30)、(24)写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{l}_2 \\ \dot{l}_4 \\ \dot{l}_8 \end{bmatrix} = \mathbf{G}_v \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{31}$$

其中
$$\mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)(g-d) & l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)(h-e) & l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)(k-f) \\ l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)(g-d) & l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)(h-e) & l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)(k-f) \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

同时可得
$$\dot{\theta} = \begin{bmatrix} g & h & k \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{G}_\theta \mathbf{v} \tag{32}$$

$$\dot{\phi} = \begin{bmatrix} d & e & f \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{G}_\phi \mathbf{v} \tag{33}$$

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \end{bmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{G}_\varphi \mathbf{v} \tag{34}$$

1.5 杆件角速度

根据式(18)、(34)、(31)得图 2a 平面机构的下液压缸角速度为

$$\dot{\theta}_4 = \mathbf{G}_{4P} \mathbf{v} \tag{35}$$

其中
$$\mathbf{G}_{4P} = \frac{-l_5 \sin \theta_5}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4) + \cos \theta_4} \mathbf{G}_{v2},$$

式中 $\mathbf{G}_{v2}$ —— $\mathbf{G}_v$ 中第 2 行元素

根据式(12)、(27)、(31)可得在图 2a 平面机构的上液压缸角速度为

$$\dot{\theta}_2 = \mathbf{G}_{2P} \mathbf{v} \tag{36}$$

其中
$$\mathbf{G}_{2P} = \frac{-l_1 \sin \theta_1}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_2} \mathbf{G}_{v1},$$

式中 $\mathbf{G}_{v1}$ —— $\mathbf{G}_v$ 中第 1 行元素

同理,平面机构中下液压缸在空间的角速度可通过角速度叠加原理及式(35)得到

$$\omega_i = \mathbf{G}_i \mathbf{v} \quad (i = 3, 4) \tag{37}$$

其中
$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\varphi & \cos \varphi \mathbf{G}_{4P} & \sin \varphi \mathbf{G}_{4P} \end{bmatrix}^T$$

平面机构中上液压缸在空间的角速度可通过角速度叠加原理及式(36)得到

$$\omega_i = \mathbf{G}_i \mathbf{v} \quad (i = 1, 2) \tag{38}$$

其中
$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\varphi & \cos \varphi \mathbf{G}_{2P} & \sin \varphi \mathbf{G}_{2P} \end{bmatrix}^T$$

根据图 2a 平面机构图的几何约束可知

$$\theta_{11} = -\theta_{12} = 2\theta \tag{39}$$

$$-\theta_{21} = \theta_{12} = 2\theta \tag{40}$$

对式(39)、(40)求导可得

$$\dot{\theta}_{11} = -\dot{\theta}_{12} = 2\dot{\theta} \tag{41}$$

$$-\dot{\theta}_{21} = \dot{\theta}_{12} = 2\dot{\theta} \tag{42}$$

FGJ 杆、*EGH* 杆在空间的角速度可通过角速度叠加原理及式(31)、(33)、(13)、(15)、(41)、(42)、(30)得

$$\omega_5 = \mathbf{G}_5 \mathbf{v} \tag{43}$$

$$\omega_6 = \mathbf{G}_6 \mathbf{v} \tag{44}$$

其中
$$\mathbf{G}_5 = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{G}_{v3}}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} & 2 \cos \varphi \mathbf{G}_\theta + \frac{\cos \varphi \mathbf{G}_{v1}}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} & 2 \sin \varphi \mathbf{G}_\theta + \frac{\sin \varphi \mathbf{G}_{v1}}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G}_6 = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} \mathbf{G}_{v3}, & \frac{\cos \varphi}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \mathbf{G}_{v1}, & \frac{\sin \varphi}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \mathbf{G}_{v1} \end{bmatrix}^T$$

式中 $\mathbf{G}_{v3}$ —— $\mathbf{G}_v$ 中第 3 行元素

对于 *JI* 杆、*EI* 杆空间角速度通过角速度叠加原理及式(31)、(33)、(13)、(15)、(30)、(43)、(44)得

$$\omega_8 = \mathbf{G}_8 \mathbf{v} \tag{45}$$

$$\omega_7 = \mathbf{G}_7 \mathbf{v} \tag{46}$$

其中
$$\mathbf{G}_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} \mathbf{G}_{v3}, & \frac{\cos \varphi}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \mathbf{G}_{v1}, & \frac{\sin \varphi}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \mathbf{G}_{v1} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G}_7 = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} \mathbf{G}_{v3}, & \frac{\cos \varphi}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \mathbf{G}_{v2}, & \frac{\sin \varphi}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \mathbf{G}_{v2} \end{bmatrix}^T$$

对于只存在转动 *AOF* 杆在空间的角速度通过角速度叠加原理与式(13)、(31)得

$$\omega_9 = \mathbf{G}_9 \mathbf{v} \tag{47}$$

其中
$$\mathbf{G}_9 = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} \mathbf{G}_{v3}, & \frac{\cos \varphi}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \mathbf{G}_{v1}, & \frac{\sin \varphi}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \mathbf{G}_{v1} \end{bmatrix}^T$$

对于 *ODE* 杆空间角速度通过角速度叠加原理及式(15)、(30)得

$$\omega_{10} = \mathbf{G}_{10} \mathbf{v} \tag{48}$$

其中
$$\mathbf{G}_{10} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_7 \sin(\theta_6 - \theta_7)} \mathbf{G}_{v3}, & \frac{\cos \varphi}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \mathbf{G}_{v2}, & \frac{\sin \varphi}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \mathbf{G}_{v2} \end{bmatrix}^T$$

支架角速度即为绕 *X* 轴的角速度,即
$$\omega_{11} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{G}_{11} \mathbf{v} \tag{49}$$

其中
$$\mathbf{G}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

足端的角速度通过角速度叠加原理得

$$\omega_{12} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \text{Rot}(X, \varphi) \begin{bmatrix} 0 & \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \cos \varphi \dot{\phi} & \sin \varphi \dot{\phi} \end{bmatrix}^T \tag{50}$$

将式(34)代入式(50)得
$$\omega_{12} = \mathbf{G}_{12} \mathbf{v} \tag{51}$$

其中
$$\mathbf{G}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\varphi & \cos \varphi \mathbf{G}_\phi & \sin \varphi \mathbf{G}_\phi \end{bmatrix}^T$$

根据式(16)、(17)、(31)可得摆动液压缸角速度

$$\dot{\theta}_7 = \mathbf{G}_{7P} \mathbf{v} \tag{52}$$

其中
$$\mathbf{G}_{7P} = \frac{-l_7 \sin \theta_6 \mathbf{G}_\varphi + \mathbf{G}_{v3} \cos \theta_7}{l_8 \sin \theta_7}$$

侧摆液压缸在空间的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_i = [\dot{\theta}_7 \quad 0 \quad 0]^T = \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{v} \quad (53)$$

其中 $\boldsymbol{G}_i = [\boldsymbol{G}_{7P} \quad 0 \quad 0]^T \quad (i = 13, 14)$
即得到了机构中所有杆件的角速度。

1.6 杆件质心的位置及速度

上液压缸活塞杆及缸体质心在空间矢量可分别表示为

$$\boldsymbol{P}_{C_1} = \text{Rot}(X, \varphi) \boldsymbol{l}_{oc_1} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta_1 + l_{AC_1} \cos \theta_2 \\ -\sin \varphi (l_1 \sin \theta_1 + l_{AC_1} \sin \theta_2) \\ \cos \varphi (l_1 \sin \theta_1 + l_{AC_1} \sin \theta_2) \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\boldsymbol{P}_{C_2} = \text{Rot}(X, \varphi) \boldsymbol{l}_{oc_2} = \begin{bmatrix} l_6 - l_3 \cos \theta_3 - l_{BC_2} \cos \theta_2 \\ -\sin \varphi (l_3 \sin \theta_3 - l_{BC_2} \sin \theta_2) \\ \cos \varphi (l_3 \sin \theta_3 + l_{BC_2} \sin \theta_2) \end{bmatrix} \quad (55)$$

式中 $\boldsymbol{l}_{oc_1}、\boldsymbol{l}_{oc_2}$ ——平面机构中的矢量
同时对式(54)、(55)求导得

$$\boldsymbol{v}_{C_1} = \boldsymbol{G}_{1G} [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\varphi}]^T \quad (56)$$

$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \boldsymbol{G}_{2G} [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2 \quad \dot{\varphi}]^T \quad (57)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{1G} = & \begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta_1 & -l_{AC_1} \sin \theta_2 & 0 \\ -l_1 \sin \varphi \cos \theta_1 & -l_{AC_1} \sin \varphi \cos \theta_2 & -\cos \varphi (l_1 \sin \theta_1 + l_{AC_1} \sin \theta_2) \\ l_1 \cos \varphi \cos \theta_1 & l_{AC_1} \cos \varphi \cos \theta_2 & -\sin \varphi (l_1 \sin \theta_1 + l_{AC_1} \sin \theta_2) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{G}_{2G} = & \begin{bmatrix} 0 & l_{BC_2} \sin \theta_2 & 0 \\ 0 & -l_{BC_2} \sin \varphi \cos \theta_2 & -\cos \varphi (l_3 \sin \theta_3 - l_{BC_2} \sin \theta_2) \\ 0 & l_{BC_2} \cos \varphi \cos \theta_2 & -\sin \varphi (l_3 \sin \theta_3 + l_{BC_2} \sin \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将式(12)、(13)、(30)、(33)代入式(56)、(57)
得

$$\boldsymbol{v}_{C_1} = \boldsymbol{G}_{C_1} \boldsymbol{v} \quad (58)$$

$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \boldsymbol{G}_{C_2} \boldsymbol{v} \quad (59)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{C_1} = \boldsymbol{G}_{1G} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{v1:} & \boldsymbol{G}_{2P} & \boldsymbol{G}_{\varphi} \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{G}_{C_2} = \boldsymbol{G}_{2G} & \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{G}_{2P} & \boldsymbol{G}_{\varphi} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

同理,下液压缸活塞杆及缸体的质心矢量可表示为

$$\boldsymbol{P}_{C_3} = \begin{bmatrix} l_5 \cos \theta_5 + l_{DC_3} \cos \theta_4 \\ -\sin \varphi (l_5 \sin \theta_5 + l_{DC_3} \sin \theta_4) \\ l_5 \sin \theta_5 + l_{DC_3} \sin \theta_4 \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\boldsymbol{P}_{C_4} = \begin{bmatrix} l_6 - l_{CC_4} \cos \theta_4 \\ -\sin \varphi (-l_{CC_4} \sin \theta_4) \\ \cos \varphi (-l_{CC_4} \sin \theta_4) \end{bmatrix} \quad (61)$$

对式(60)、(61)求得

$$\boldsymbol{v}_{C_3} = \boldsymbol{G}_{3G} [\dot{\theta}_5 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\varphi}]^T \quad (62)$$

$$\boldsymbol{v}_{C_4} = \boldsymbol{G}_{4G} [0 \quad \dot{\theta}_4 \quad \dot{\varphi}]^T \quad (63)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{3G} = & \begin{bmatrix} -l_5 \sin \theta_5 & -l_{CC_2} \sin \theta_4 & 0 \\ -l_5 \sin \varphi \cos \theta_5 & -l_{DC_5} \sin \varphi \cos \theta_4 & -\cos \varphi (l_5 \sin \theta_5 + l_{DC_5} \sin \theta_4) \\ l_5 \cos \varphi \cos \theta_5 & l_{DC_5} \cos \varphi \cos \theta_4 & -\sin \varphi (l_5 \sin \theta_5 + l_{DC_5} \sin \theta_4) \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{G}_{4G} = & \begin{bmatrix} 0 & l_{CC_4} \sin \theta_4 & 0 \\ 0 & l_{CC_4} \sin \varphi \cos \theta_4 & \cos \varphi l_{CC_4} \sin \theta_4 \\ 0 & -l_{CC_4} \cos \varphi \cos \theta_4 & \sin \varphi l_{CC_4} \sin \theta_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

将式(14)、(15)、(30)、(33)代入式(62)、(63)
得

$$\boldsymbol{v}_{C_3} = \boldsymbol{G}_{C_3} \boldsymbol{v} \quad (64)$$

$$\boldsymbol{v}_{C_4} = \boldsymbol{G}_{C_4} \boldsymbol{v} \quad (65)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{C_3} = \boldsymbol{G}_{3G} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{v2:} & \boldsymbol{G}_{4P} & \boldsymbol{G}_{\varphi} \end{bmatrix}^T \\ \boldsymbol{G}_{C_4} = \boldsymbol{G}_{4G} & \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{G}_{4P} & \boldsymbol{G}_{\varphi} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

杆EGH与杆FGH均是对称结构,设其质心均在G点,线速度为末端速度的一半,即

$$\boldsymbol{v}_{C_5} = \boldsymbol{v}_{C_6} = \boldsymbol{G}_{C_5} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{G}_{C_6} \boldsymbol{v} = 0.5 \boldsymbol{v} \quad (66)$$

由于杆EGH与杆FGH在机构中间部位,其质心位置在G点,则位置矢量为

$$\boldsymbol{P}_{C_5} = \boldsymbol{P}_{C_6} = 0.5 \boldsymbol{p} \quad (67)$$

在空间中杆HI、JI质心的位置可分别通过矢量叠加得

$$\boldsymbol{P}_{C_7} = \begin{bmatrix} l \cos \alpha + 2.5 l \cos (-2\theta) \\ -\sin \varphi (l \sin \alpha + 1.5 l \sin (-2\theta)) \\ \cos \varphi (l \sin \alpha + 1.5 l \sin (-2\theta)) \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$\boldsymbol{P}_{C_8} = \begin{bmatrix} l \cos \beta + 2.5 l \cos (2\theta) \\ -\sin \varphi (l \sin \beta + 1.5 l \sin (2\theta)) \\ \cos \varphi (l \sin \beta + 1.5 l \sin (2\theta)) \end{bmatrix} \quad (69)$$

对式(68)、(69)求导可得

$$\boldsymbol{v}_{C_7} = \boldsymbol{G}_{7G} [\dot{\theta}_5 \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}]^T \quad (70)$$

$$\boldsymbol{v}_{C_8} = \boldsymbol{G}_{8G} [\dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta} \quad \dot{\varphi}]^T \quad (71)$$

其中

$$\boldsymbol{G}_{7G} = \begin{bmatrix} -l \cos \alpha & 5 l \sin (-2\theta) & 0 \\ -l \sin \varphi \cos \alpha & 3 l \sin \varphi \sin (-2\theta) & -\cos \varphi (l \sin \alpha + 1.5 l \sin (-2\theta)) \\ l \cos \varphi \cos \alpha & -3 l \cos \varphi \cos (-2\theta) & -\sin \varphi (l \sin \alpha + 1.5 l \sin (-2\theta)) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{8G} = \begin{bmatrix} -l\cos\beta & -5l\sin(2\theta) & 0 \\ -l\sin\varphi\cos\beta & -3l\sin\varphi\sin(2\theta) & -\cos\varphi(l\sin\beta + 1.5l\sin(2\theta)) \\ l\cos\varphi\cos\beta & 3l\cos\varphi\cos(2\theta) & -\sin\varphi(l\sin\beta + 1.5l\sin(2\theta)) \end{bmatrix}$$

将式(13)、(15)、(30)~(32)代入式(70)、(71)得

$$\mathbf{v}_{c_7} = \mathbf{G}_{c_7} \mathbf{v} \quad (72)$$

$$\mathbf{v}_{c_8} = \mathbf{G}_{c_8} \mathbf{v} \quad (73)$$

其中

$$\mathbf{G}_{c_7} = \mathbf{G}_{7G} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{G}_{v_{12}}}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} & \mathbf{G}_\theta & \mathbf{G}_\varphi \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{G}_{c_8} = \mathbf{G}_{8G} \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{G}_{v_{11}}}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} & \mathbf{G}_\theta & \mathbf{G}_\varphi \end{bmatrix}^T$$

杆 AOF 及杆 ODE 重心的位置矢量可表示为

$$\mathbf{P}_{c_9} = \begin{bmatrix} \cos(\beta - \gamma_2) \\ -\sin\varphi\sin(\beta - \gamma_2) \\ \cos\varphi\sin(\beta - \gamma_2) \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$\mathbf{P}_{c_{10}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_5 + \gamma_1) \\ -\sin\varphi\sin(\theta_5 + \gamma_1) \\ \cos\varphi\sin(\theta_5 + \gamma_1) \end{bmatrix} \quad (75)$$

对式(74)、(75)求导得

$$\mathbf{v}_{c_9} = \mathbf{G}_{9G} [\dot{\varphi} \quad 0 \quad \dot{\theta}]^T \quad (76)$$

$$\mathbf{v}_{c_{10}} = \mathbf{G}_{10G} [\dot{\varphi} \quad 0 \quad \dot{\theta}_5]^T \quad (77)$$

其中

$$\mathbf{G}_{9G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\beta - \gamma_2) \\ -\cos\varphi(\beta - \gamma_2) & 0 & -\sin\varphi\cos(\beta - \gamma_2) \\ -\sin\varphi\sin(\beta - \gamma_2) & 0 & \cos\varphi\cos(\beta - \gamma_2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{10G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta_5 + \gamma_1) \\ -\cos\varphi\sin(\theta_5 + \gamma_1) & 0 & -\sin\varphi\cos(\theta_5 + \gamma_1) \\ -\sin\varphi\sin(\theta_5 + \gamma_1) & 0 & \cos\varphi\cos(\theta_5 + \gamma_1) \end{bmatrix}$$

将式(33)、(13)、(15)、(30)代入式(76)、(77)得

$$\mathbf{v}_{c_9} = \mathbf{G}_{c_9} \mathbf{v} \quad (78)$$

$$\mathbf{v}_{c_{10}} = \mathbf{G}_{c_{10}} \mathbf{v} \quad (79)$$

其中 $\mathbf{G}_{c_9} = \mathbf{G}_{9G} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\varphi & 0 & \frac{\mathbf{G}_{v_{11}}}{l_1 \cos(\theta_1 + \theta_2)} \end{bmatrix}^T$

$$\mathbf{G}_{c_{10}} = \mathbf{G}_{10G} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_\varphi & 0 & \frac{\mathbf{G}_{v_{12}}}{l_5 \sin(\theta_5 - \theta_4)} \end{bmatrix}^T$$

架体为对称结构,中心的位置矢量为

$$\mathbf{P}_{c_{11}} = \begin{bmatrix} \cos\gamma_3 \\ -\sin\varphi\sin\gamma_3 \\ \cos\varphi\sin\gamma_3 \end{bmatrix} \quad (80)$$

由于此件只做纯转动,在计算动能时已计算转动动能,故可认为 $\mathbf{v}_{c_{11}} = 0$ 。

足端位置矢量为

$$\mathbf{P}_{c_{12}} = \begin{bmatrix} -(4l\cos\theta - l_{OC_{12}})\sin\phi \\ (4l\cos\theta - l_{OC_{12}})\cos\phi\sin\varphi \\ -(4l\cos\theta - l_{OC_{12}})\cos\phi\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbf{v}_{c_{12}} = \mathbf{G}_{c_{12}} \mathbf{v} \quad (82)$$

式中 $\mathbf{G}_{c_{12}}$ ——单位矩阵

摆动缸活塞杆质心位置及缸筒质心空间位置矢量为

$$\mathbf{P}_{c_{13}} = [0 \quad l_{KC_{13}}\cos\theta_7 + l_{MK}\cos\theta_6 \quad l_{KC_{13}}\sin\theta_7 + l_{MK}\sin\theta_6]^T \quad (83)$$

$$\mathbf{P}_{c_{14}} = [0 \quad l_{OQ} - l_{NC_{14}}\cos\theta_7 \quad l_{QN} - l_{NC_{14}}\sin\theta_6]^T \quad (84)$$

对式(83)求导得

$$\mathbf{v}_{c_{13}} = [0 \quad (\dot{l}_8 + l_{KC_{13}}\dot{\theta}_7)\cos\theta_7 \quad (\dot{l}_8 + l_{KC_{13}}\dot{\theta}_7)\sin\theta_7]^T \quad (85)$$

将式(30)代入式(85)得

$$\mathbf{v}_{c_{13}} = \mathbf{G}_{c_{13}} \mathbf{v} \quad (86)$$

其中

$$\mathbf{G}_{c_{13}} = [0 \quad (\mathbf{G}_{v_{13}} + l_{KC_{13}}\mathbf{G}_7)\cos\theta_7 \quad (\mathbf{G}_{v_{13}} + l_{KC_{13}}\mathbf{G}_7)\sin\theta_7]^T$$

由于此件只作纯转动,在计算动能时已计算转动动能,故可认为 $\mathbf{v}_{c_{14}} = 0$ 。

2 动力学建模

为了简化腿部机构动力学建模,需要假设整个机器人都是由金属材料构成,各构件认为是刚体,弹性变形忽略不计;各转轴质量较小、且转动惯量较小,认为是构件一部分,且没有绕轴线的自转;活塞及活塞杆认为是一个整体,也无绕活塞杆轴线的自转,足端导向套、足端和弹簧视为一个整体。

2.1 广义力与驱动力的映射

为方便构建动力学方程,选择腿部机构末端参考点 I 作为腿部机构的广义坐标 $\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad p_3]^T = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$ 来描述该串并混联机械腿的运动,则对应腿部末端的广义速度为 $\mathbf{v} = [\dot{p}_1 \quad \dot{p}_2 \quad \dot{p}_3]^T = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$ 。设腿部机构对应的 3 个液压缸的驱动力为 $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \tau_3]^T$,末端参考点对应的广义力为 $\mathbf{F} = [F_1 \quad F_2 \quad F_3]^T = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T$,根据虚功原理,可得

$$\dot{\boldsymbol{\tau}}^T \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{F}^T \mathbf{v} \quad (87)$$

将式(30)代入式(87)得

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}_v^T \boldsymbol{\tau} \quad (88)$$

2.2 各构件能量

腿部机构能量主要由各构件的动能和势能组

成。对于单个腿部机构的构件主要有 3 个液压缸缸体、3 个液压缸缸体活塞杆、腿部支架、杆 EGH 、杆 FGH 、杆 AOE 、杆 ODF 、杆 EJ 与杆 FH 及足端。

对于组成机械腿机构的所有构件相对于固定坐标系的动能为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{\omega}_n^T \boldsymbol{I}_n \boldsymbol{\omega}_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}_{C_n}^T \boldsymbol{m}_n \boldsymbol{v}_{C_n} \quad (89)$$

式中 $\boldsymbol{I}_n$ ——腿部机构各构件绕其质心的惯量矩阵
 $\boldsymbol{m}_n$ ——腿部机构各构件的质量矩阵
 $\boldsymbol{v}_{C_n}$ ——腿部机构各构件质心处的速度矢量
 $\boldsymbol{\omega}_n$ ——腿部机构各构件质心处角速度矢量

依据运动学分析,将 $\boldsymbol{\omega}_n$ 、 $\boldsymbol{v}_{C_n}$ 对应于广义速度 $\boldsymbol{v}$ 的表达式代入式(89)整理得

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{I}_G^* \boldsymbol{v} \quad (90)$$

其中 $\boldsymbol{I}_G^* = \boldsymbol{G}_n^T \boldsymbol{I}_n \boldsymbol{G}_n + \boldsymbol{G}_{C_n}^T \boldsymbol{m}_n \boldsymbol{G}_{C_n}$

组成机械腿机构的所有构件相对于固定坐标系的势能为

$$U = g \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{m}_n \boldsymbol{P}_{C_n} \quad (91)$$

2.3 腿部机构动力学方程

建立动力学方程的方法有拉格朗日法^[22]、虚功原理法^[23]、凯恩法^[24]等。由于拉格朗日方法从能量的角度出发,得到的动力学方程形式相对简单^[22],所以采用拉格朗日法建立腿部机构的动力学方程,其方程形式为

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (92)$$

其中 $L = T - U$

式中 L ——拉格朗日函数

p_i ——腿部参考点 I 的广义坐标

f_i ——未考虑外部负载的足端力

将式(89)、(91)代入式(92)可得

$$f_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \quad (93)$$

由于势能不是速度的函数^[25],所以整理式(93)得

$$f_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i} \quad (94)$$

将式(90)对 $\dot{p}_i$ 求导,且 $\boldsymbol{I}_G^*$ 与 $\dot{p}_i$ 无关得^[25]

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}^T}{\partial \dot{p}_1} \right) \boldsymbol{I}_G^* \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{I}_G^* \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{p}_1} \right) = \sum_{n=1}^{14} \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}^T}{\partial \dot{p}_1} \right) \boldsymbol{I}_G^* \boldsymbol{v} = \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{d}_1 \boldsymbol{I}_G^* \boldsymbol{v} \quad (95)$$

其中 $\boldsymbol{d}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{v}^T}{\partial \dot{p}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

对式(95)时间求导

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_1} \right) = \boldsymbol{d}_1 \left(\sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{I}_G^* \dot{\boldsymbol{v}} + \sum_{n=1}^{14} \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial t} \boldsymbol{v} \right) \quad (96)$$

将式(90)对 p_1 求导

$$\frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial p_1} \boldsymbol{v} \quad (97)$$

将式(91)对 p_1 求导可得

$$\frac{\partial U}{\partial p_1} = g \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{m}_n \frac{\partial \boldsymbol{P}_{C_n}}{\partial p_1} = W_{g1} \quad (98)$$

将式(95)~(97)代入式(94)整理得

$$f_1 = \boldsymbol{D}_1 \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{v} + W_{g1} \quad (99)$$

其中 $\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{d}_1 \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{I}^* \boldsymbol{G} \dot{\boldsymbol{v}}$

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{d}_1 \sum_{n=1}^{14} \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial p_1}$$

$$W_{g1} = g \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{m}_n \frac{\partial \boldsymbol{P}_{C_n}}{\partial p_1}$$

同理可求得

$$f_2 = \boldsymbol{D}_2 \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{H}_2 \boldsymbol{v} + W_{g2} \quad (100)$$

$$f_3 = \boldsymbol{D}_3 \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{H}_3 \boldsymbol{v} + W_{g3} \quad (101)$$

其中

$$\boldsymbol{D}_2 = \boldsymbol{d}_2 \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{I}^* \boldsymbol{G} \dot{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{d}_2 \sum_{n=1}^{14} \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial p_2}$$

$$W_{g2} = g \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{m}_n \frac{\partial \boldsymbol{P}_{C_n}}{\partial p_2}$$

$$\boldsymbol{d}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{v}^T}{\partial \dot{p}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{D}_3 = \boldsymbol{d}_3 \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{I}^* \boldsymbol{G} \dot{\boldsymbol{v}}$$

$$\boldsymbol{H}_3 = \boldsymbol{d}_3 \sum_{n=1}^{14} \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{v}^T \frac{\partial \boldsymbol{I}_G^*}{\partial p_3}$$

$$W_{g3} = g \sum_{n=1}^{14} \boldsymbol{m}_n \frac{\partial \boldsymbol{P}_{C_n}}{\partial p_3}$$

$$\boldsymbol{d}_3 = \frac{\partial \boldsymbol{v}^T}{\partial \dot{p}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

整理式(99)~(101)写成矩阵

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D} \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{H} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{W}_g \quad (102)$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 & \boldsymbol{H}_2 & \boldsymbol{H}_3 \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{W}_g = \begin{bmatrix} W_{g1} & W_{g2} & W_{g3} \end{bmatrix}^T$$

式中 $\boldsymbol{D}$ ——腿部机构的广义惯性矩阵

$\boldsymbol{H}$ ——腿部机构的离心力和哥氏力系数

$\boldsymbol{W}_g$ ——腿部机构的重力项

上述动力学方程建立的过程没有考虑腿部机构承受的外负载,设腿部机构承受的外负载为 $\boldsymbol{Q}$ 。因

此,当考虑足端外负载时,动力学方程变为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{Q} \quad (103)$$

在仿生机器人行走过程中,腿部机构需要具备摆动相和支撑相。摆动相是指在机器人行走过程中腿部机构向前端或侧面迈步,足端离开地面,不受外部的负载,则 $\boldsymbol{Q}$ 为零。支撑相是指腿部足端着地,支撑躯体向前或侧面行走,此时在足端承受外负载 $\boldsymbol{Q}$ 为足端与地面的接触力。

通过式(88)可以得出腿部机构的刚体逆动力学方程为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{F} \quad (104)$$

其中 $\boldsymbol{J}=\left(\boldsymbol{G}_v^T\right)^{-1}$
式中 $\boldsymbol{J}$ ——驱动力的雅可比矩阵

当腿部结构确定后,各杆件的质量、转动惯量均可由三维软件得到;当腿部机构末端运动轨迹函数确定后,即可求出末端速度、加速度,根据式(104)即可得到对应关节的驱动力。

3 动力学模型验证与分析

3.1 动力学模型验证

对于四足机器人的行走一般采用对角步态,对角两条腿同时处于摆动相或者支撑相。由于抛物线适应能力强,所以 X 向或 Y 向的运动轨迹可以写成

$$x(y)(t)=\left\{\begin{array}{l} \frac{2 \lambda}{T_0^2} t^2 \\ \frac{\lambda}{2}+\frac{2 \lambda}{T_0}\left(t-\frac{T_0}{2}\right)-\frac{2 \lambda}{T_0^2}\left(t-\frac{T_0}{2}\right)^2 \end{array}\right. \quad\left\{\begin{array}{l} 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{T_0}{2}<t \leq T_0 \end{array}\right. \quad (105)$$

式中 λ ——步长,mm
 T_0 ——周期,s

对于 Z 向,为了减少冲击与实现跨越障碍,采取正弦曲线,其轨迹为

$$Z(t)=\left\{\begin{array}{l} -\frac{H}{2 \pi} \sin \left(\frac{2 \pi}{T_0} t\right)+\frac{2 H}{T_0} t \\ \frac{H}{2 \pi} \sin \left(\frac{2 \pi}{T_0}\left(2 t-T_0\right)\right)-\frac{2 H}{T_0} t+2 H \end{array}\right. \quad\left\{\begin{array}{l} 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \\ \frac{T_0}{2}<t \leq T_0 \end{array}\right. \quad (106)$$

式中 H ——抬腿高度,mm

为了同时得到 3 个液压缸的力,选取腿部机构侧摆步态,此时需要 3 个液压缸同时协调运动才能完成。设定侧摆步长为 100 mm,抬腿高度 200 mm;设定机器人每条腿部的运动周期为 2 s,前 1 s 为摆动相,后 1 s 为支撑相,根据式(105)、(106)得到足

端的末端轨迹。通过对末端轨迹的求导,可得到末端的速度;由于足端为球面,因此设定腿部机构足端与地面的接触力 $\boldsymbol{Q}=[0 \quad 0 \quad 1200]^T \text{ N}$ 。根据动力模型式(104)可计算出 3 个液压缸的理论作用力。

为了验证模型的正确性,首先根据动力模型通过 Matlab 编程得到的 3 个液压缸理论力的变化曲线。然后将所建立的样机模型导入到 ADAMS 中,并将同样的步态通过运动学反解推导出 3 个液压缸的运动变化曲线,分别施加在相应的液压缸上,同时在末端在 1~2 s 间施加 1 200 N 的力,通过 ADAMS 软件仿真得到 3 个液压缸力的变化曲线。最后将两条曲线拟合,如图 4a 所示;并绘制出图 4b 理论力与 ADAMS 仿真力在各时刻的误差。从图 4 可以看出,二者曲线变化基本一致,误差在 $-1.731 \sim 1.774 \text{ N}$ 之间,验证了理论推导模型的正确性。

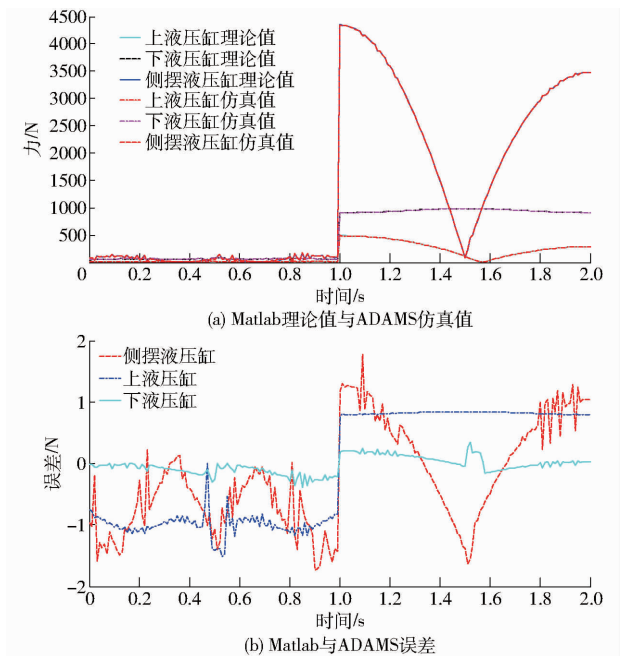


图 4 验证曲线

Fig.4 Verified curves

由图 4 可知,一条腿上 3 个液压缸的最大输出力均在腿部机构着地瞬间产生,与抬腿高度无关;此时对地面冲击力较大,所以在足端加了弹簧缓冲装置,避免冲击力过大,导致机构损坏;3 个液压缸中最大输出力为侧摆液压缸,因为此液压缸与平面并联机构串联,且为行程放大机构,属于费力杠杆。

3.2 步长对驱动缸最大输出力的影响规律分析

通过以上分析可知,各驱动液压缸的最大输出力产生在腿部机构着地的瞬间,所以各驱动缸在相同步态函数、相同周期下,只与步长有关。在机器人直线行走时,此时侧摆缸输出力为 0。设此种步态下,机器人最大步长为 900 mm、抬腿高度为 150 mm 时,不同步长的平面机构液压缸最大输出力规律如

图 5a 所示。机器人侧向移动时,侧摆步长不能太大,过大会产生拌腿或侧翻。此时设抬腿高度为 200 mm 时,步长最大值为 250 mm 时,在不同步长时侧摆缸最大出力规律如图 5b 所示。

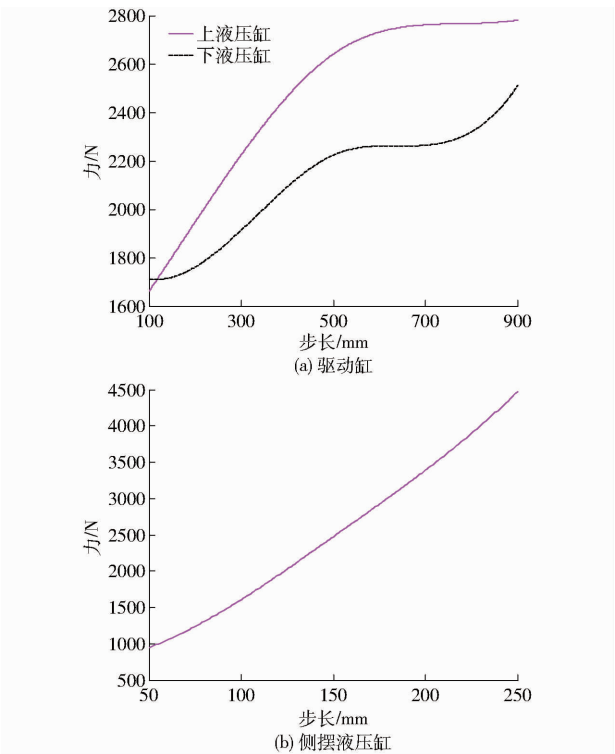


图 5 步长对驱动缸最大出力影响规律
Fig. 5 Effect of step length on maximum output force of drive cylinder

从图 5a 可以看出,在直线行走时,并联机构的两个液压缸输出最大力总体呈递增趋势,位于并联机构上方的液压缸最大出力逐渐增大,达 700 ~ 900 mm 趋于平缓;位于下方的液压缸相对上缸变化稍有平缓,但也在逐渐增大的。从图 5b 可以看出,在侧向行走时,侧摆缸输出最大力随侧摆步长的增加接近直线递增,说明侧摆对侧摆液压缸的最大出力影响较大。确定系统的最大压力时,应由侧摆缸的最大出力决定,侧摆缸最大出力的确定为系统的动力参数及腿部机构缓冲结构设计提供依据。

3.3 基于腿部动力学的能耗分析

3.3.1 能耗指标建立

多足步行机器人能耗的影响因素有很多,如机器人结构参数、步态参数等。由于周期不同、步态参数不同、承载不同,机器人消耗的能量也不同。为了评价步行机器人在移动过程消耗能量,需要建立机器人能耗性能指标。设定四足机器人的行走周期为 1 s,设定机器人的能耗性能评价指标为

$$\eta = \frac{P_E}{mgL_1} \tag{107}$$

其中 $P_E = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 P_{Eij} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \int_0^T \tau_{ij} v_{ij} dt$ (108)
式中 P_E ——一个周期内机器人在移动过程中所有关节消耗的总能量
 m ——机器人自身质量与外负载质量之和
 g ——重力加速度
 L_1 ——1 s 内机器人移动的步长
 P_{Eij} ——第 i 条腿的第 j 个驱动缸输出能量
 τ_{ij} —— t 时刻第 i 条腿第 j 个驱动缸输出力
 v_{ij} —— t 时刻第 i 条腿第 j 个驱动缸输出速度

该性能指标是移动单位步长、单位质量机器人能耗的总和,且该值越小越好,代表能量利用率高。

3.3.2 能耗指标分析

由于机器人已经完成设计,结构参数不变,步态函数采用式(105)、(106),也不变,故不考虑这两种因素对能耗的影响,本文重点考虑步态参数对能耗的影响。由于前文已设定步态周期为 1 s,所以只考虑步态参数的步长、抬腿高度对移动能耗指标的影响。在行走过程中,主要分析包括直线行走和侧向行走 2 种步态。

(1) 当直线行走时,设定步高为 100 mm,步长在 100 ~ 900 mm 之间变化,根据式(107)可计算出直线行走过程中不同步长的能耗性能指标,并绘制出如图 6a 所示的变化规律曲线。当设定步长为 600 mm,抬腿高度在 50 ~ 300 mm 之间,根据式(107)可计算出直线行走过程中不同抬腿高度的能耗性能指标,并绘制出如图 6b 所示的变化规律曲线。

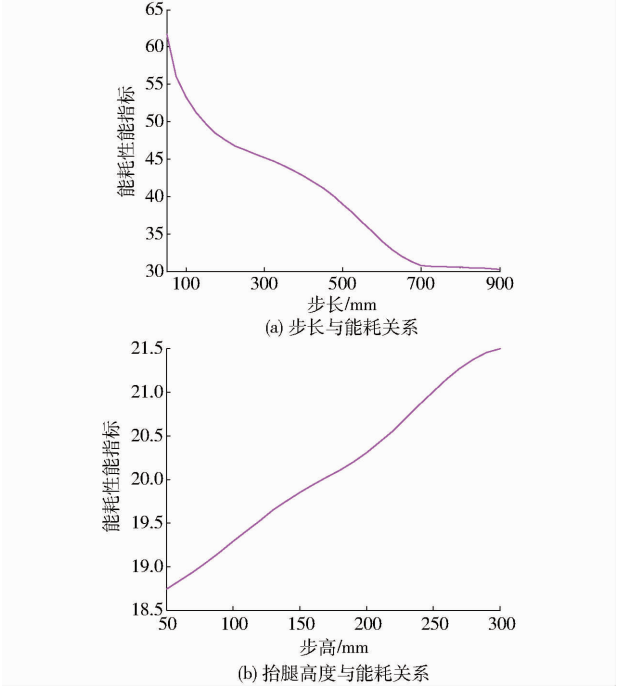


图 6 直行步态参数与能耗指标关系
Fig. 6 Relationship between walking gait parameters and energy consumption indicators

从图 6a 可看出,随着步长的增加,能耗指标单调递减,到达 700 ~ 900 mm 后能耗指标基本保持稳定。表明随着步长的增加,能量利用率越来越好。从图 6b 可以看出,随着抬腿高度的增加,能耗指标呈单调递增的趋势,说明能量利用率越来越低。因此,在直线行走时,若要节约能源,应该采取大步伐、小步高的轨迹规划策略。在满足要求条件下,步长在 700 ~ 900 mm 为好。

(2) 当机器人侧向行走时,设定步高为 50 mm,步长在 50 ~ 250 mm 变化,绘制的能耗性能指标与步长的变化规律如图 7a 所示。当步长一定,步高在 50 ~ 250 mm 时,绘制的能耗性能指标与抬腿高度的变化规律曲线如图 7b 所示。从图 7a 可以看出,机器人侧向移动时,能耗指标在步长 50 ~ 100 mm 之间随着侧向步长增加而减小,但超过 100 mm 时随着步长增加而单调递增,说明消耗的能量越大,在步长为 100 mm 能耗指标最优。从图 7b 可以看出,随着侧向抬腿高度的增加,能耗指标呈单调递增的趋势,说明能耗越来越大。因此,在机器人侧向行走时,应采取步长为 100 mm 左右、小步高的轨迹控制策略。

4 结论

(1) 针对串并混联四足仿生机器人腿部机构进行了运动学分析,建立了各构件速度与末端线速度的显式表达式;通过各构件的显式表达式推导出正动力学方程,并建立了逆动力学方程。

(2) 通过实例绘制了理论推导曲线和 ADAMS

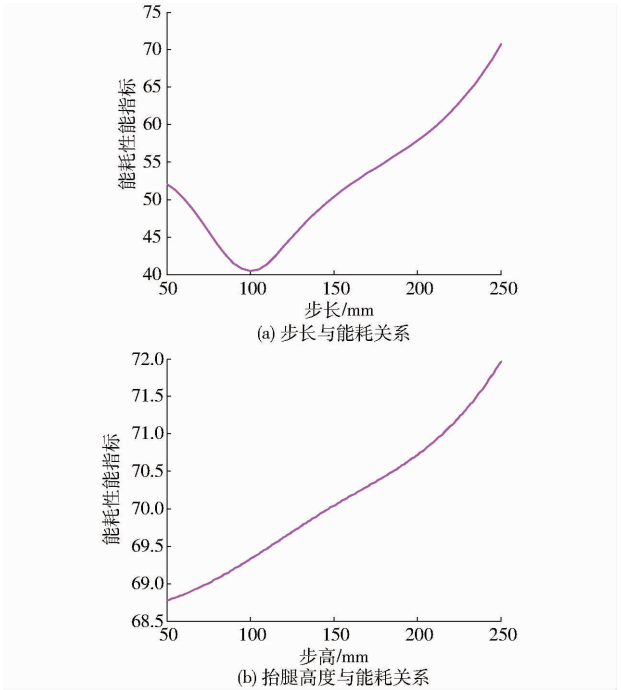


图 7 侧向行走步态参数与能耗关系
Fig.7 Relationship between lateral walking gait parameters and energy consumption

虚拟样机仿真曲线,验证了理论推导的正确性。仿真结果表明,驱动缸在腿部足端接触地的瞬间产生最大输出力;分析得到了不同步长情况下,各驱动液压缸最大输出力的变化规律;在有侧向移动的步态中,3 个驱动缸中的侧摆缸输出力最大。

(3) 建立了仿生机器人的能耗性能指标,分析了不同步态参数对能耗性能指标的影响规律,得到了减少能耗的方法。

参 考 文 献

[1] 王国彪,陈殿生,陈科位,等. 仿生机器人研究现状与发展趋势[J]. 机械工程学报,2015,51(13):27-44.
WANG Guobiao, CHEN Diansheng, CHEN Kewei, et al. The current research status and development strategy on biomimetic robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015,51(13):27-44. (in Chinese)

[2] RAIBERT M, BLANKESPOOR K, NELSON G, et al. Big Dog the rough-terrain quadruped robot[C]//Proceedings of the 17th IFAC World Congress. Oxford, 2008:10822-10825.

[3] KALAKRISHNAN M, BUCHLI J, PASTOR P, et al. Learning planning and control for quadruped locomotion over challenging terrain [J]. International Journal of Robotics Research, 2011,30(2):236-258.

[4] WOODEN D, MALCHANO M, BLANKESPOOR K, et al. Autonomous navigation for big Dog [C]//IEEE International Conference on Robotics and Automation, Anchorage, AK, USA, 2010:4736-4741.

[5] 荣誉,金振林,崔冰艳. 六足农业机器人并联腿构型分析与结构参数设计[J]. 农业工程学报,2012,28(15):9-14.
RONG Yu, JIN Zhenlin, CUI Bingyan. Configuration analysis and structure parameter design of six-leg agricultural robot with parallel-leg mechanisms[J]. Transactions of the CSAE, 2012,28(15):9-14. (in Chinese)

[6] 荣誉,金振林,曲梦可. 六足步行机器人的并联机械腿设计[J]. 光学精密工程,2012,20(7):1532-1541.
RONG Yu, JIN Zhenlin, QU Mengke. Design of parallel mechanical leg of six-legged robot [J]. Optics and Precision Engineering, 2012,20(7):1532-1541. (in Chinese)

[7] 王炳一. 一种新型四足仿生机器人性能分析与仿真[D]. 秦皇岛:燕山大学,2011:55-70.
WANG Bingyi. Simulation and performance analysis on new type of bionic quadruped robot [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2011:55-70. (in Chinese)

[8] 张金柱,金振林,陈广广. 六足步行机器人腿部机构运动学分析[J]. 农业工程学报,2016,32(9):45-52.
ZHANG Jinzhu, JIN Zhenlin, CHEN Guangguang. Kinematic analysis of leg mechanism of six-legged walking robot [J]. Transactions of the CSAE, 2016,32(9):45-52. (in Chinese)

- [9] RONG X W, LI Y B, RUAN J H, et al. Design and simulation for a hydraulic actuated quadruped robot[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2012, 26(4): 1171–1177.
- [10] 李贻斌, 李彬, 荣学文, 等. 液压驱动四足仿生机器人的结构设计和步态规划[J]. 山东大学学报, 2011, 41(5): 32–36. LI Yibin, LI Bin, RONG Xuwen, et al. Mechanical design and gait planning of a hydraulically actuated quadruped bionic robot[J]. Journal of Shandong University, 2011, 41(5): 32–36. (in Chinese)
- [11] CAI R B, CHEN Y Z, HOU W Q, et al. Trotting gait of a quadruped robot based on the time-pose control method[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2013, 148(10): 1–7.
- [12] 王立鹏, 王军政, 汪首坤, 等. 基于足端轨迹规划算法的液压四足机器人步态控制策略[J]. 机械工程学报, 2013, 49(1): 39–44. WANG Lipeng, WANG Junzheng, WANG Shoukun, et al. Strategy of foot trajectory generation for hydraulic quadruped robots gait planning[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(1): 39–44. (in Chinese)
- [13] LI M T, WANG X, GUO W, et al. System design of a cheetah robot toward ultra-high speed[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2014, 11: 73.
- [14] 潘阳. P_P 结构六足机器人性能设计与控制试验研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2014: 29–55. PAN Yang. Performance design and control experiment of a novel hexapod robot with P_P structure[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2014: 29–55. (in Chinese)
- [15] 金振林, 张金柱, 高峰. 一种消防六足机器人及其腿部机构运动学分析[J]. 中国机械工程, 2016, 27(7): 865–871. JIN Zhenlin, ZHANG Jinzhu, GAO Feng. A firefighting six-legged robot and its kinematics analysis of leg mechanisms [J]. China Mechanical Engineering, 2016, 27(7): 865–871. (in Chinese)
- [16] 王跃灵, 金振林, 李研彪. 球面 3–RRR 并联机构动力学建模与鲁棒-自适应迭代学习控制[J]. 机械工程学报, 2010, 46(1): 68–73. WANG Yueling, JIN Zhenlin, LI Yanbiao. Dynamic modeling and robust adaptive iterative learning control of 3–RRR galaxy parallel mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(1): 68–73. (in Chinese)
- [17] 荣誉, 金振林. 3-DOF 并联机械腿动力学建模与伺服电机峰值预估[J]. 光学精密工程, 2012, 20(9): 1974–1983. RONG Yu, JIN Zhenlin. Dynamic modeling and peak prediction of servo motor for 3-DOF parallel mechanical leg[J]. Optics and Precision Engineering, 2012, 20(9): 1974–1983. (in Chinese)
- [18] 荣誉, 刘双勇, 王洪斌, 等. 轮毂打磨 5-DOF 机械臂动力学建模与驱动参数预估[J]. 中国机械工程, 2018, 29(4): 449–456. RONG Yu, LIU Shuangyong, WANG Hongbin, et al. Dynamics modeling and drive parameter prediction of a 5-DOF wheel grinding manipulator arm[J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(4): 449–456. (in Chinese)
- [19] 李研彪, 李景敏, 计时鸣, 等. 一种 3 自由度并联拟人机械腿的动力学建模及伺服电机峰值力矩预估[J]. 兵工学报, 2014, 35(11): 1929–1936. LI Yanbiao, LI Jingmin, JI Shiming, et al. Dynamic modeling and peak torque prediction of servo motor for a 3-DOF parallel humanoid mechanical leg[J]. Acta Armamentarii, 2014, 35(11): 1929–1936. (in Chinese)
- [20] 金振林, 崔冰艳. 机器人肩关节的动力学建模及伺服电机峰值预估[J]. 农业工程学报, 2011, 27(8): 145–149. JIN Zhenlin, CUI Bingyan. Dynamic modeling and peak prediction of servo motor for shoulder joint of robot[J]. Transactions of the CSAE, 2011, 27(8): 145–149. (in Chinese)
- [21] 罗庆生, 罗霄. 仿生四足机器人技术[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2016: 145–147.
- [22] 陈修龙, 孙德才, 王清. 基于拉格朗日的冗余驱动并联机构刚体动力学建模[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(12): 329–336. CHEN Xiulong, SUN Decai, WANG Qing. Rigid dynamics modeling of redundant actuation parallel mechanism based on Lagrange method[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(12): 329–336. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20151245&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.045. (in Chinese)
- [23] 张东胜, 许允斗, 姚建涛, 等. 五自由度混联机器人逆动力学分析[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(9): 384–391. ZHANG Dongsheng, XU Yundou, YAO Jiantao, et al. Inverse dynamic analysis of novel 5-DOF hybrid manipulator[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(9): 384–391. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20170949&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.09.049. (in Chinese)
- [24] 姚建涛, 韩博, 窦玉超, 等. 基座运动对并联调整机构动力学性能的影响[J/OL]. 农业机械学报, 2018, 49(7): 410–418. YAO Jiantao, HAN Bo, DOU Yuchao, et al. Influence of base motion on dynamic performance of parallel adjustment mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2018, 49(7): 410–418. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20180751&journal_id=jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2018.07.051. (in Chinese)
- [25] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 277–283.