doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.04.045

6支链台体型Stewart衍生构型位置正解半解析算法

叶鹏达[1] 尤晶晶[1,2] 沈惠平[3] 吴洪涛[2,4] 李成刚[2,4]

(1.南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037; 2.江苏省精密与微细制造技术重点实验室, 南京 210016;
3.常州大学机械工程学院, 常州 213016; 4.南京航空航天大学机电学院, 南京 210016)

摘要: 目前6支链Stewart并联机构位置正解无全解析解或全解析解推导困难,不利于程式化分析计算,本文设计4种6支链台体型Stewart衍生构型,并构建了一种数值法和解析法相结合的半解析算法。通过添加6条虚拟支链,4种衍生构型可重构为同一种12-6台体型拓扑构型;推导了重构构型的协调方程,并针对4种衍生构型,推导了虚拟支链长度的数值解;基于动平台上特征点之间的拓扑关系,推导了重构构型位置正解的全解析解。进一步对比分析了半解析算法与传统数值法在计算位姿正解时的精度、效率和稳定性。数值算例表明,半解析算法的精度与稳定性优于传统数值法至少2倍,但传统数值法的效率是半解析算法的7倍;同时得到了半解析算法的3点构型选取原则。

关键词: 并联机构; 半解析算法; 精度; 效率; 稳定性

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2019)04-0393-08

Semi-analytic Algorithm for Forward Displacement Analysis of Six Links Stewart Derivative Configurations

YE Pengda[1] YOU Jingjing[1,2] SHEN Huiping[3] WU Hongtao[2,4] LI Chenggang[2,4]

(1. *College of Mechanical and Electronical Engineering*, *Nanjing Forestry University*, *Nanjing* 210037, *China*
2. *Jiangsu Key Laboratory of Precision and Micro-manufacturing Technology*, *Nanjing* 210016, *China*
3. *School of Mechanical Engineering*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213016, *China*
4. *College of Mechanical and Electrical Engineering*,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, *Nanjing* 210016, *China*)

Abstract: According to the present problems that the forward displacement analysis of most platform Stewart parallel mechanisms with six links can not be described with whole analytical solutions, and a very few of them can be described with whole analytical solutions and also with these difficulties, including calculation and programming, four kinds of platform Stewart derivative configurations with six links were designed, and a semi-analytic algorithm which combined with numerical method and analytical method was established. By adding six virtual links, the four derivative configurations can be reconstructed into the same kind of 12-6 platform topological configuration. Compatibility equations of reconstructed configuration were derived, and aimed at four kinds of derivative configurations, the numerical solution of the length of the virtual links was derived. Based on the topological relations between feature points on the moving platform, the whole analytical solution of the forward displacement analysis of the reconstructed configuration was derived. Furthermore, the accuracy, efficiency and stability of the semi-analytic algorithm and the traditional numerical method were compared and analyzed respectively. Numerical examples showed that the accuracy and stability of the semi-analytic algorithm was at least two times of that of the traditional numerical method, but the efficiency of the traditional numerical method was seven times of that of the semi-analytic algorithm. Meanwhile, three selection principles of configurations were obtained, which established theoretical foundation for the engineering application of six links parallel mechanism.

Key words: parallel mechanism; semi-analytic algorithm; accuracy; efficiency; stability

收稿日期: 2018-09-29 修回日期: 2019-01-08

基金项目: 国家自然科学基金项目(51405237)、江苏省精密与微细制造技术重点实验室开放基金项目和南京林业大学高学历人才基金项目(GX12014045)

作者简介: 叶鹏达(1994—),男,博士生,主要从事并联机器人运动学和动力学研究,E-mail: yepengda@126.com

通信作者: 尤晶晶(1985—),男,副教授,主要从事并联机器人和六维加速度传感器研究,E-mail: youjingjing251010@126.com

0 引言

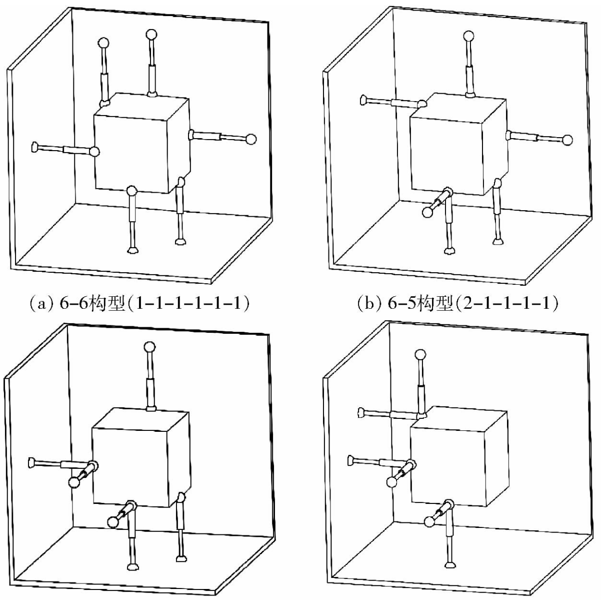
1965年,STEWART[1]首次提出含6条相同支链的并联机构,学者们将其称为Stewart机构。与传统的串联机构相比,并联机构具有输出精度高、结构刚性好、承载能力强、便于控制等优点,成为国内外机构学研究热点[2-6]。Stewart并联机构主要有平台型、台体型两大类,相比于前者而言,后者动、静平台[7]上球铰链的球心可在空间任意布置,而不局限于同一平面上,并且具有对称性和各向同性[8],可用于对精度和稳定性要求较高的场合[9]。因此,台体型Stewart并联机构具有更广泛的应用领域,如六维加速度传感器[8-10]、飞行模拟器[11-12]、遥操作机器人[13-14]等,但其理论研究难度更大。

由于涉及到至少6个输入量和6个输出量,而且它们之间呈现强非线性耦合的关系,目前,台体型Stewart并联机构的正向运动学问题并没有完全解决。正向运动学是工作空间、奇异位型、动力学控制等后续工作的基础,国内外学者对此进行了大量的探索研究,主要方法有数值法和解析法两种[15-17]。数值法主要通过Newton法或拟Newton法等数值逼近迭代求解[18-22]。文献[19]利用拟Newton法成功求解3-RPS和6-RUS并联机构位置正解,计算效率明显提高,然而,求解算法对初值较敏感,且在特殊奇异位型下无法计算;文献[23]利用粒子群算法进行正解研究,能够得到所有可能的正解,但该算法的收敛速度和计算效率还有待提高。解析法主要通过消元得到单一参数多项式,不需要给定初值,就能求得全部解。文献[24]提出一种解析化方法用于6-SPS[25]并联机构的正向运动学求解,但是该方法消元复杂,不具有通用性,且不利于程式化;文献[26]针对6-6平台型Stewart机构,运用分次字典序Groebner基法消元,得到一元20次代数方程,然而,获得的高次方程仍需要通过数值法求解;文献[27]指出,采用冗余驱动的思路可以设计出具有全解析解的台体型Stewart机构,然而,由于添加了多条支链,特别是引入了三重复合铰链,结构变得更加复杂,不利于加工、装配及控制。

沈惠平等[28]研究发现,并联机构位姿正解的求解难度与机构的耦合度有关。为了构造低耦合度的并联机构,同时舍弃三重复合铰链,本文设计结构简单、易加工、易装配的6支链台体型Stewart衍生构型,并构建一种数值法和解析法相结合、程式化程度高的半解析算法,为6支链并联机构的工程应用奠定理论基础。

1 Stewart衍生构型及重构构型

本文提出4种6支链并联机构的衍生构型,分别是6-6构型、6-5构型、6-4构型和6-3构型(前、后数字分别代表静、动平台上的球铰链个数,下同),如图1所示。衍生构型由1个边长为$2N$的正方体状动平台、1个内边长为$2(N+L)$的正方体空壳状静平台以及6条完全相同的SPS(Spherical-prismatic-spherical)支链构成;初始状态下,6条支链长度相等,动平台与静平台的几何中心重合,并且姿态完全相同。与衍生构型相比,重构构型增加了6条虚拟支链,每2条支链构成一组,6个二重复合球铰链分别固结在动平台的6条棱边的中点;重构构型的初始状态与衍生构型的初始状态相同,如图2所示。



(a) 6-6构型(1-1-1-1-1-1)　(b) 6-5构型(2-1-1-1-1)

(c) 6-4构型(2-2-1-1)　(d) 6-3构型(2-2-2)

图1 Stewart机构的4种衍生机构

Fig. 1 Four derivative mechanisms of Stewart mechanism

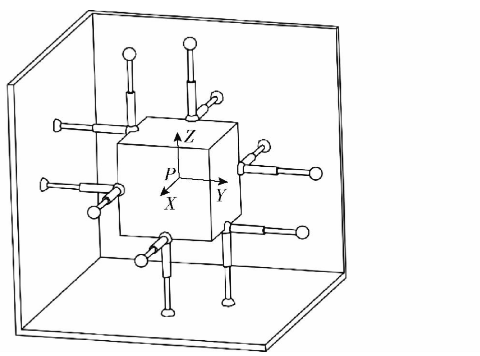


图2 12-6台体型重构构型

Fig. 2 12-6 platform reconstructed configuration

2 半解析算法

2.1 基本思路

将数值法与解析法相结合的方法称为半解析算

法，基本思路为通过数值法求解出 6 条虚拟支链的长度，再通过解析法求解出重构构型的位置正解。算法流程如图 3 所示。其中虚线表示传统数值法。

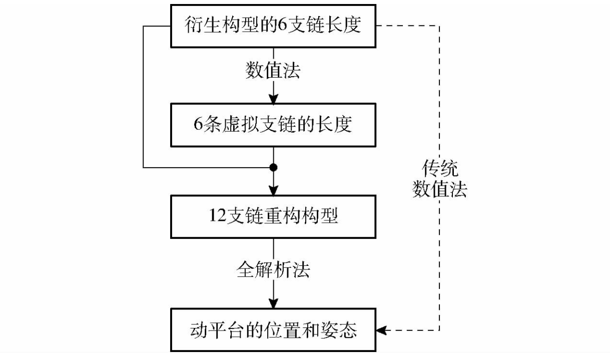


图 3　半解析算法流程图

Fig. 3　Flow chart of semi-analytic algorithm

2.2　重构构型运动学正解的全解析解

由并联机构的支链长度计算动平台位姿的过程称为“正向运动学方程的求解”。本文假设机构各个几何参数已知，动平台为一个刚体，并且各个球副之间不存在摩擦与间隙。

如图 4 所示，动平台几何中心为 $\boldsymbol{P}$，其笛卡尔坐标设为(x_0,y_0,z_0)，动平台顶点及其坐标为 $\boldsymbol{A}_d(x_d,y_d,z_d)$ $(d=1,2,\cdots,8)$，二重复合球铰链及其坐标为 $\boldsymbol{B}_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\cdots,6)$，12 个外球铰链的中心点在静坐标系中的笛卡尔坐标为 $\boldsymbol{b}_j(x_j,y_j,z_j)$ $(j=1,2,\cdots,12)$。根据重构构型中的几何约束关系，建立二次相容方程

$$|\boldsymbol{b}_k-\boldsymbol{B}_{\frac{k+1}{2}}|=l_k\quad(k=1,3,5,7,9,11)\tag{1}$$

$$|\boldsymbol{b}_k-\boldsymbol{B}_{\frac{k}{2}}|=l_k\quad(k=2,4,6,8,10,12)\tag{2}$$

$$|\boldsymbol{B}_r-\boldsymbol{P}|=\sqrt{2}N\quad(r=1,2,3)\tag{3}$$

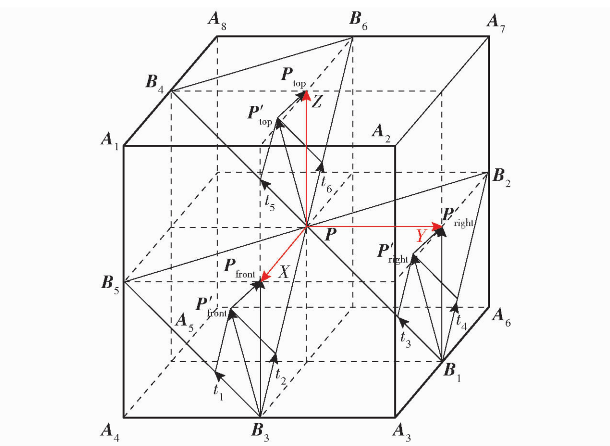


图 4　位姿求解原理图

Fig. 4　Schematic of position and orientation solution

将二次相容方程(1)～(3)分成 3 组，每组二次相容方程中的同构方程两两相减，得到 12 个线性相容方程，通过考虑线性方程组的求解理论，可以得到点 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$的部分坐标为

$$\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}=\frac{1}{8L}\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-l_1^2+l_2^2+l_7^2-l_8^2\\l_5^2-l_6^2-l_{11}^2+l_{12}^2\\-l_3^2+l_4^2+l_9^2-l_{10}^2\end{bmatrix}\tag{4}$$

$$\begin{bmatrix}z_1\\y_1\end{bmatrix}=h_1\begin{bmatrix}(l_2^2-l_1^2)/(2L)\\Nz_0-(N+L)y_0+(l_1^2+l_7^2)/4-h_2\end{bmatrix}\tag{5}$$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=h_1\begin{bmatrix}(l_4^2-l_3^2)/(2L)\\Nx_0-(N+L)y_0+(l_3^2+l_9^2)/4-h_2\end{bmatrix}\tag{6}$$

$$\begin{bmatrix}x_3\\z_3\end{bmatrix}=h_1\begin{bmatrix}(l_5^2-l_6^2)/(2L)\\Nx_0-(N+L)z_0-(l_5^2+l_{11}^2)/4+h_2\end{bmatrix}\tag{7}$$

其中

$$h_1=\frac{1}{2N+L}\begin{bmatrix}N+L&1\\N&-1\end{bmatrix}$$

$$h_2=\frac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{2}+\frac{3N^2}{2}+\frac{(N+L)^2}{2}$$

观察动平台特征点，发现 $\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$、$\boldsymbol{B}_3$ 4 点构成菱形，且对角线互相平分。因此有

$$x_1=x_2+x_3-x_0\tag{8}$$

$$z_2=z_1+z_0-z_3\tag{9}$$

$$y_3=y_1+y_0-y_2\tag{10}$$

如图 4 所示，将动平台的前面、右侧面和上面中心点的坐标分别记作 $\boldsymbol{P}_{\text{front}}$、$\boldsymbol{P}_{\text{right}}$、$\boldsymbol{P}_{\text{top}}$。

根据特征点与 $\boldsymbol{P}_{\text{front}}$、$\boldsymbol{P}_{\text{right}}$、$\boldsymbol{P}_{\text{top}}$之间的尺度关系，计算其解析解

$$\boldsymbol{P}_{\text{front}}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{B}_3+\boldsymbol{B}_5)-\frac{1}{3N}(\boldsymbol{B}_5-\boldsymbol{B}_3)\times(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{B}_3)\tag{11}$$

$$\boldsymbol{P}_{\text{right}}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2)-\frac{1}{3N}(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{B}_1)\times(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\tag{12}$$

$$\boldsymbol{P}_{\text{top}}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{B}_4+\boldsymbol{B}_6)-\frac{1}{3N}(\boldsymbol{B}_4-\boldsymbol{P})\times(\boldsymbol{B}_6-\boldsymbol{P})\tag{13}$$

这样，动平台的位置和姿态可分别表示为

$$\boldsymbol{P}=(x_0,y_0,z_0)^{\mathrm{T}}\tag{14}$$

$$\boldsymbol{R}=\frac{1}{N}(\boldsymbol{P}_{\text{front}}-\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_{\text{right}}-\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_{\text{top}}-\boldsymbol{P})\tag{15}$$

2.3　基于协调方程求解虚拟支链的长度

动平台在运动过程中，杆长之间满足一定的几何约束关系，即

$$|\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{P}|^2=x_1^2-2x_1x_0+x_0^2+y_1^2-2y_1y_0+y_0^2+z_1^2-2z_1z_0+z_0^2=2N^2\tag{16}$$

$$|\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{P}|^2=x_2^2-2x_2x_0+x_0^2+y_2^2-2y_2y_0+y_0^2+z_2^2-2z_2z_0+z_0^2=2N^2 \tag{17}$$

$$|\boldsymbol{B}_3-\boldsymbol{P}|^2=x_3^2-2x_3x_0+x_0^2+y_3^2-2y_3y_0+y_0^2+z_3^2-2z_3z_0+z_0^2=2N^2 \tag{18}$$

$$|\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2|^2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+y_1^2-2y_1y_2+y_2^2+z_1^2-2z_1z_2+z_2^2=2N^2 \tag{19}$$

$$|\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_3|^2=x_2^2-2x_2x_3+x_3^2+y_2^2-2y_2y_3+y_3^2+z_2^2-2z_2z_3+z_3^2=6N^2 \tag{20}$$

$$|\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_3|^2=x_1^2-2x_1x_3+x_3^2+y_1^2-2y_1y_3+y_3^2+z_1^2-2z_1z_3+z_3^2=2N^2 \tag{21}$$

$$|\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{b}_1|^2=x_1^2+[y_1-(N+L)]^2+(z_1+N)^2=l_1^2 \tag{22}$$

$$|\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{b}_3|^2=(x_2+N)^2+[y_2-(N+L)]^2+z_2^2=l_3^2 \tag{23}$$

$$|\boldsymbol{B}_3-\boldsymbol{b}_5|^2=(x_3-N)^2+y_3^2+[z_3+(N+L)]^2=l_5^2 \tag{24}$$

为了降低上述9个协调方程的次数，通过式(16)、(22)相减，式(17)、(23)相减，式(18)、(24)相减，式(19)、(22)、(23)相减，式(20)、(23)、(24)相减，式(21)、(22)、(24)相减，得到6个低次幂的协调方程为

$$f(\boldsymbol{X})=2x_1x_0+2y_1y_0+2z_1z_0-x_0^2-y_0^2-z_0^2+3N^2+(N+L)^2-2y_1(N+L)+2z_1N-l_1^2=0 \tag{25}$$

$$g(\boldsymbol{X})=2x_2x_0+2y_2y_0+2z_2z_0-x_0^2-y_0^2-z_0^2+3N^2+(N+L)^2-2y_2(N+L)+2x_2N-l_3^2=0 \tag{26}$$

$$v(\boldsymbol{X})=2x_3x_0+2y_3y_0+2z_3z_0-x_0^2-y_0^2-z_0^2+3N^2+(N+L)^2+2z_3(N+L)-2x_3N-l_5^2=0 \tag{27}$$

$$u(\boldsymbol{X})=-2x_1x_2-2y_1y_2-2z_1z_2-2x_2N+2y_2(N+L)-2N^2-2(N+L)^2+2y_1(N+L)-2z_1N-2N^2+l_1^2+l_3^2=0 \tag{28}$$

$$w(\boldsymbol{X})=-2x_2x_3-2y_2y_3-2z_2z_3-2x_2N+2y_2(N+L)-2N^2-2(N+L)^2-2z_3(N+L)+2x_3N-6N^2+l_3^2+l_5^2=0 \tag{29}$$

$$h(\boldsymbol{X})=-2x_1x_3-2y_1y_3-2z_1z_3+2x_3N-2z_3(N+L)-2N^2-2(N+L)^2+2y_1(N+L)-2z_1N-2N^2+l_1^2+l_5^2=0 \tag{30}$$

可以看出，方程(25)、(26)、(27)消除了8次方项；方程(28)、(29)、(30)消除了6次方项。化简前后协调方程数目由9个降为6个，最高次项数由45项降为9项。

协调方程可写成

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})=[f(\boldsymbol{X})\quad g(\boldsymbol{X})\quad v(\boldsymbol{X})\quad u(\boldsymbol{X})\quad w(\boldsymbol{X})\quad h(\boldsymbol{X})]^{\mathrm{T}}=0 \tag{31}$$

式中 $\boldsymbol{X}$——6个未知杆长

将方程(31)用泰勒公式展开

$$F(\boldsymbol{X}_n)+\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_n)(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_n)+O(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}_n|^2)=0 \tag{32}$$

其中

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_n)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial l_6}\\ \frac{\partial g(\boldsymbol{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial g(\boldsymbol{X})}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial g(\boldsymbol{X})}{\partial l_6}\\ \frac{\partial v(\boldsymbol{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial v(\boldsymbol{X})}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial v(\boldsymbol{X})}{\partial l_6}\\ \frac{\partial u(\boldsymbol{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial u(\boldsymbol{X})}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial u(\boldsymbol{X})}{\partial l_6}\\ \frac{\partial w(\boldsymbol{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial w(\boldsymbol{X})}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial w(\boldsymbol{X})}{\partial l_6}\\ \frac{\partial h(\boldsymbol{X})}{\partial l_1} & \frac{\partial h(\boldsymbol{X})}{\partial l_2} & \cdots & \frac{\partial h(\boldsymbol{X})}{\partial l_6}\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_n)$——雅可比矩阵

忽略二阶无穷小量后

$$\boldsymbol{X}_{n+1}=\boldsymbol{X}_n-[\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{X}_n)]^{-1}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}_n) \tag{33}$$

为验证协调方程计算方法的可行性，在Mathematica中进行虚拟仿真，如图5所示。

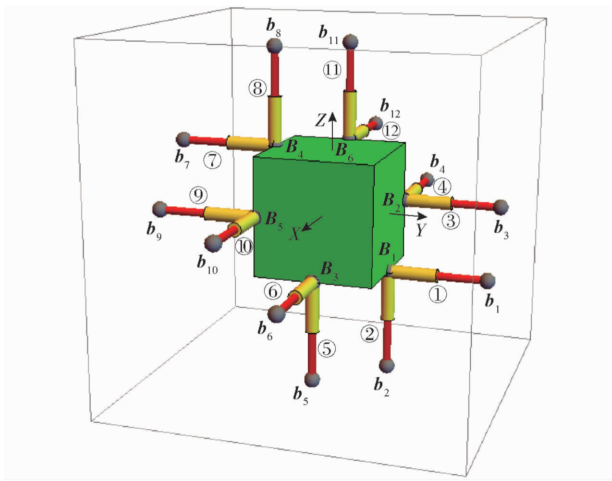


图5 12-6 SPS重构构型虚拟样机

Fig. 5 Virtual prototype of 12-6 SPS reconstructed configuration

取 $N=15$ mm，$L=25$ mm，任意给定动平台姿态矩阵与移动路径为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}(z,\gamma)\boldsymbol{R}(y,\beta)\boldsymbol{R}(x,\alpha)=$$

$$\begin{bmatrix}\cos\beta\cos\gamma & \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta-\sin\gamma\cos\alpha & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \sin\gamma\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha-\cos\gamma\sin\alpha\\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\alpha & \cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2\sin(\omega t)\\2\cos(\omega t)\\\frac{\omega t}{2}\end{bmatrix}\tag{35}$$

其中 $\alpha=\frac{t}{18}$ rad，$\beta=\frac{t}{12}$ rad，$\gamma=\frac{t}{9}$ rad，$\omega=1.0$ rad/s，如图 6 所示。

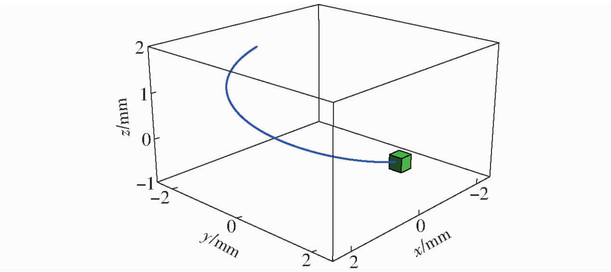


图 6　动平台移动路径

Fig. 6　Path of moving platform

点 $\boldsymbol{A}_d$ 在静坐标系中的位置矢量为

$$\boldsymbol{A}_d=\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_d^p+\boldsymbol{P}\tag{36}$$

式中　$\boldsymbol{A}_d^p$——$\boldsymbol{A}_d$ 在动坐标系中的位置矢量

首先通过反解，求出 6 条支链的长度，再运用协调方程求解出 6 条虚拟支链长度，对比虚拟支链长度的计算值与准确值，得到杆长计算误差。如图 7 所示。

由图 7a 可知，曲线光滑且连续，表明计算过程没有产生算法奇异。由图 7b 可知，计算值与准确值吻合得较好，表明协调方程是正确的；微小的杆长计算误差是由软件在数值计算过程中产生的舍入误差等因素造成的。

3　数值性态分析

数值性态不仅与算法有关，还与构型有关。本文将分别对比分析半解析算法与传统数值法在计算衍生构型位姿正解时的精度、效率和稳定性。将两种算法编写成 Mathematica 程序，使用的计算机 CPU 为 Intel CORE I5－4200U，主频为 2.30 GHz，内存为 4 GB。

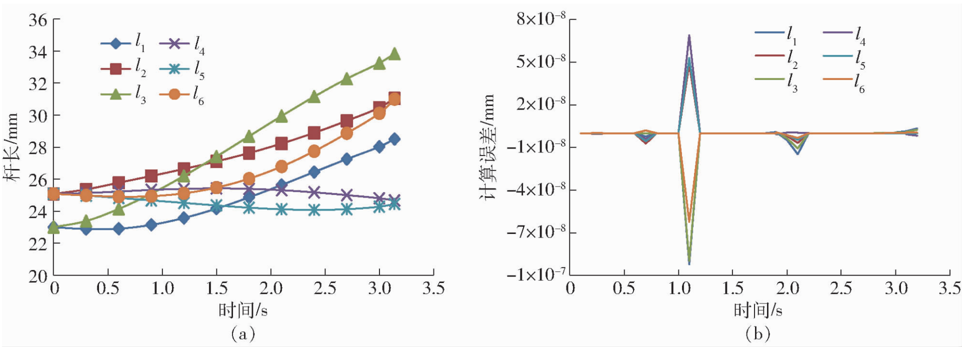


图 7　协调方程的验证

Fig. 7　Verification of compatibility equations

3.1　精度

传统数值法即牛顿法是一种被广泛使用的求解并联机构正解的迭代算法。通过数值算例发现，初值偏差对位姿正解计算误差的影响较小，因此，这里仅分别对比半解析算法与传统数值法在计算衍生构型位姿正解时的精度，如表 1 所示。在虚拟样机中，任意给定动平台一组位姿：$x_0=0.1$ mm，$y_0=0.1$ mm，$z_0=0.1$ mm；$\lambda_1=0.05$，$\lambda_2=0.05$，$\lambda_3=0.05$，算法迭代精度控制为 1.0×10^{-6}，计算值取小数点后 5 位有效数字。

表 1　位姿正解的精度对比

Tab. 1　Comparison of accuracy of forward displacement analysis

衍生构型	算法	综合相对误差 δ/%
6－6 构型	传统数值法	4.40292×10^{-5}
	半解析算法	8.28454×10^{-7}
6－5 构型	传统数值法	4.31144×10^{-4}
	半解析算法	2.19008×10^{-4}
6－4 构型	传统数值法	3.29887×10^{-3}
	半解析算法	1.26059×10^{-5}
6－3 构型	传统数值法	6.92683×10^{-4}
	半解析算法	4.38762×10^{-6}

定义位姿正解的综合相对误差（位姿正解 6 个变量的相对误差的平均值）δ 为

$$\delta=\sqrt{\frac{1}{6}\left[\left(\frac{x_0-\bar{x}_0}{x_0}\right)^2+\left(\frac{y_0-\bar{y}_0}{y_0}\right)^2+\left(\frac{z_0-\bar{z}_0}{z_0}\right)^2+\left(\frac{\lambda_1-\bar{\lambda}_1}{\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\lambda_2-\bar{\lambda}_2}{\lambda_2}\right)^2+\left(\frac{\lambda_3-\bar{\lambda}_3}{\lambda_3}\right)^2\right]}\times100\%\tag{37}$$

式中　$\bar{x}_0$、$\bar{y}_0$、$\bar{z}_0$、$\bar{\lambda}_1$、$\bar{\lambda}_2$、$\bar{\lambda}_3$——位姿计算值

由表 1 可知，在计算过程中，半解析算法的综合相对误差明显低于传统数值法。

3.2　效率

算法效率（计算时间）τ 与其使用的方法有关，也与求解的具体构型有关。从不同算法和不同构型

来研究初值偏差对效率的影响。在软件中通过Timing指令获取算法的计算时间，分别计算对比同种构型下两种算法所需计算时间的比值，选取最小值作为两种算法的效率比值。通过数值算例发现，算法的迭代精度与初值偏差对传统数值法的效率影响较小，因此，本文仅列出了不同构型下传统数值法的效率，如表2所示。对于半解析算法，迭代精度分别控制为1.0×10^{-6}与1.0×10^{-9}，将初值偏差从5%变化到25%，在不同的迭代精度下，对应的效率如表3所示。

表2　传统数值法的效率

Tab.2　Efficiency of traditional numerical method

构型	6-6构型	6-5构型	6-4构型	6-3构型
τ/ms	15.60	15.40	16.00	15.40

表3　半解析算法的效率

Tab.3　Efficiency of semi-analytic algorithm　　ms

初值偏差/%	迭代精度为1.0×10^{-6}				迭代精度为1.0×10^{-9}			
	6-6构型	6-5构型	6-4构型	6-3构型	6-6构型	6-5构型	6-4构型	6-3构型
5	110	109	110	110	109	109	125	110
10	110	125	109	78	141	125	125	125
15	141	125	141	125	140	156	141	140
20	140	141	125	125	172	156	156	125
25	188	172	发散	140	204	187	发散	109
平均效率	137.80	134.40	121.25	115.60	153.20	146.60	136.75	121.80

由表2、3可知，传统数值法的效率优于半解析算法。从算法的方程复杂程度分析，半解析算法方程的最高次幂（8次）高于传统数值法的方程（3次）。半解析算法的效率随着构型中二重复合球铰链数目的增多而变高，且迭代精度越高，效率越低；对于6-4构型，当初值偏差达到25%时，半解析算法的计算结果发散。

3.3　稳定性

稳定性的主要影响因素有初值偏差和计算步长，考虑到位姿正解与初值偏差有关，与计算步长无关，因此，从两种算法的最大初值偏差和迭代发散来研究衍生构型的稳定性。在实际计算过程中，如初值偏差过大，结果可能不收敛，计算失去了稳定性。

各变量计算许用区间宽度为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{X}^*-\Delta\boldsymbol{X}\quad \boldsymbol{X}^*+\Delta\boldsymbol{X}] \tag{38}$$

其中　$\boldsymbol{X}^*=[x_0\quad y_0\quad z_0\quad \lambda_1\quad \lambda_2\quad \lambda_3]^{\mathrm{T}}$

$$\Delta\boldsymbol{X}=[\Delta x_{0\max}\quad \Delta y_{0\max}\quad \Delta z_{0\max}\quad \Delta\lambda_{1\max}\quad \Delta\lambda_{2\max}\quad \Delta\lambda_{3\max}]^{\mathrm{T}}$$

式中　$\boldsymbol{X}^*$——初始位姿

$\Delta\boldsymbol{X}$——位姿最大计算值

定义最大初值偏差（位姿正解6个变量的相对许用区间宽度的平均值）$I_{\max}$为

$$I_{\max}=\frac{1}{6}\left(\frac{\Delta x_{0\max}}{M_{x0}}+\frac{\Delta y_{0\max}}{M_{y0}}+\frac{\Delta z_{0\max}}{M_{z0}}+\frac{\Delta\lambda_{1\max}}{M_{\lambda1}}+\frac{\Delta\lambda_{2\max}}{M_{\lambda2}}+\frac{\Delta\lambda_{3\max}}{M_{\lambda3}}\right)\times100\% \tag{39}$$

式中　M——动平台位姿各变量（分量）的最大工作范围

半解析算法与传统数值法在计算衍生构型时的最大初值偏差如表4所示。由表4可知，半解析算法的稳定性明显优于传统数值法。对于半解析算法，6-3构型稳定性优于其他构型，从拓扑结构分析，该构型动平台上有3个二重复合球铰链，相比于其他构型，该构型支链分布较集中；对于传统数值法，6-5构型稳定性最高，达到46.2%。

表4　衍生构型的最大初值偏差

Tab.4　Maximum initial deviation of derivative configuration　　%

衍生构型	半解析算法	传统数值法
6-6构型	108.1	11.0
6-5构型	106.0	46.2
6-4构型	144.2	22.8
6-3构型	526.0	24.6

4　结论

（1）设计了一类6支链台体型Stewart并联机构及其衍生构型，对其进行拓扑结构分析，动平台分别含有0、1、2、3个二重复合球铰链。针对6支链并联机构正向运动学求解问题，构建了一种结合数值法和解析法的半解析算法。通过数值法求出虚拟支链长度，构成12-6台体型Stewart并联机构，利用其低耦合度和支链布局的高度对称性，推导了一种全解析式正解算法，并可得到唯一解析表达式。该方法同样适用于动平台上含3个以上二重复合球面副、球铰中心不局限于动平台棱边的中点、且耦合度小于2的台体型并联机构的正向运动学求解。

（2）对比了半解析算法和传统数值法在计算6

支链并联机构衍生构型时的精度、效率和稳定性。半解析算法的精度和稳定性优于传统数值法至少 2 倍，但传统数值法的效率为半解析算法的 7 倍。

(3)构型选取不仅与应用对象有关，还与算法的数值性态有关。半解析算法在具体应用场合需要合理选取衍生构型，其选取原则为：对精度要求较高且效率和稳定性要求不高时，选用 6 - 6 构型；对实时性(或稳定性)要求较高且精度和稳定性(或实时性)要求不高时，选用 6 - 3 构型。当最大初值偏差小于 106% 时，4 种衍生构型都适用；当最大初值偏差大于 106% 且小于 526% 时，选用 6 - 3 构型；当最大初值偏差大于 526% 时，衍生构型都不适用。综合考虑精度、效率和稳定性，6 - 3 构型优于其他构型。

参　考　文　献

[1] STEWART D. A platform with six degrees of freedom[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineering, 1965, 180(15): 371 - 385.

[2] 张英，廖启征，魏世民. 一般 6 - 4 台体型并联机构位置正解分析[J]. 机械工程学报，2012，48(9)：26 - 32.
ZHANG Ying, LIAO Qizheng, WEI Shimin. Forward displacement analysis of a general 6 - 4 in-parallel platform[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(9): 26 - 32. (in Chinese)

[3] WEN Ke, DU Fuzhou, ZHANG Xianzhi. Algorithm and experiments of six-dimensional force/torque dynamic measurements based on a Stewart platform[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2016, 29(6): 1840 - 1851.

[4] ENFERADI J, NIKROOZ R. The performance indices optimization of a symmetrical fully spherical parallel mechanism for dimensional synthesis[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2018, 90(3 - 4): 305 - 321.

[5] 沈惠平，许可，杨廷力，等. 一种零耦合度且运动解耦的新型 3T1R 并联操作手 2 -(RPa3R)3R 的设计及其运动学[J]. 机械工程学报. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2187.TH.20180904.1444.004.html.
SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli, et al. New 3T1R parallel manipulator 2 -(RPa3R)3R with zero coupling degree and partial decoupling: design and kinematics[J]. Journal of Mechanical Engineering. http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2187.TH.20180904.1444.004.html (in Chinese)

[6] KALANI H, REZAEI A, AKBARZADEH A. Improved general solution for the dynamic modeling of Gough - Stewart platform based on principle of virtual work[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 83(4): 2393 - 2418.

[7] 黄真，赵永生，赵铁石. 高等空间机构学[M]. 北京：高等教育出版社，2014.

[8] 尤晶晶. 基于冗余并联机构的压电式六维加速度传感器研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2013.
YOU Jingjing. Research on piezoelectric six-axis accelerometer based on redundant parallel mechanism[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013. (in Chinese)

[9] 尤晶晶. 基于 6 - SPS 并联机构的压电式六维加速度传感器的研究[D]. 南京：南京航空航天大学，2010.
YOU Jingjing. Research on a piezoelectric six-axis accelerometer based on 6 - SPS parallel mechanism[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2010. (in Chinese)

[10] CHAPSKY V, PORTMAN V T, SANDLER B Z. Single-mass 6-DOF isotropic accelerometer with segmented PSD sensors[J]. Sensors & Actuators A Physical, 2007, 135(2): 558 - 569.

[11] HAN Hongwei, DANG Shuwen. Research on performance of motion platform of 3 - RPS flight simulator[C]// IEEE International Conference on Computational Intelligence and Security, 2017: 340 - 344.

[12] 周昌春，方跃法，叶伟，等. 6 - RRS 超冗余驱动飞行模拟器的性能分析[J]. 机械工程学报，2016，52(1)：34 - 40.
ZHOU Changchun, FANG Yuefa, YE Wei, et al. Performance analysis of 6 - RRS over-redundant actuation flight simulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 34 - 40. (in Chinese)

[13] 倪涛，李骁鹏，张红彦，等. 基于立体视觉的遥操作机器人力感示教控制策略[J/OL]. 农业机械学报，2013，44(1)：244 - 247.
NI Tao, LI Xiaopeng, ZHANG Hongyan, et al. 3-D vision-based kinesthesis teaching control strategy for telerobotics[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(1): 244 - 247. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20130145&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2013.01.045. (in Chinese)

[14] RYDEN F, STEWART A, CHIZECK H J. Advanced telerobotic underwater manipulation using virtual fixtures and haptic rendering[C]// IEEE Oceans, 2013: 1 - 8.

[15] 戴文伟，吴洪涛，杨小龙. 6 - 3 型 Stewart 平台并联机构的运动学正解[J]. 机械设计与制造工程，2012，41(17)：43 - 46.
DAI Wenwei, WU Hongtao, YANG Xiaolong. Numerical method for forward kinematics of 6 - 3 Stewart platform parallel manipulator[J]. Machine Design and Manufacturing Engineering, 2012, 41(17): 43 - 46. (in Chinese)

[16] MERLET J P. Parallel robots[M]. Springer, 2006.

[17] 尤晶晶，符周舟，吴洪涛，等. 12 - 6 台体型 Stewart 冗余并联机构正向运动学研究[J/OL]. 农业机械学报，2017，48(12)：395 - 402.
YOU Jingjing, FU Zhouzhou, WU Hongtao, et al. Forward kinematics of general 12 - 6 Stewart redundant parallel mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12): 395 - 402. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20171249&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.

2017.12.049.(in Chinese)

[18] 刘芳华,张星,魏玉平,等. 基于牛顿迭代的 6 - UPS 并联机构运动学正解的研究[J]. 机械设计与制造,2013(5):173 - 176.
LIU Fanghua, ZHANG Xing, WEI Yuping, et al. The forward kinematics analysis of 6 - UPS parallel mechanism based on Newton iteration[J]. Machinery Design & Manufacture,2013(5):173 - 176.(in Chinese)

[19] 耿明超,赵铁石,王唱,等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报,2015,51(9): 28 - 36.
GENG Mingchao, ZHAO Tieshi, WANG Chang, et al. Direct position analysis of parallel mechanism based on quasi-Newton method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(9):28 - 36.(in Chinese)

[20] 韩方元,赵丁选,李天宇. 3 - RPS 并联机构正解快速数值算法[J]. 农业机械学报,2011,42(4):229 - 233.
HAN Fangyuan, ZHAO Dingxuan, LI Tianyu. A fast forward algorithm for 3 - RPS parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2011,42(4):229 - 233.(in Chinese)

[21] ZHOU Wanyong, CHEN Wuyi, LIU Huadong, et al. A new forward kinematics algorithm for a general Stewart platform[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015,87:177 - 190.

[22] YANG Xiaolong, WU Hongtao, LI Yao, et al. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017,107:27 - 36.

[23] 李明磊, 贾育秦. 6 - SPS 并联机构位置正解的改进粒子群算法[J]. 现代制造工程, 2009(5):106 - 110.
LI Minglei, JIA Yuqin. Improved particle swarm optimization algorithm for forward positional analysis of 6 - SPS parallel manipulators[J]. Modern Manufacturing Engineering, 2009(5):106 - 110.(in Chinese)

[24] 程世利,吴洪涛,姚裕. 6 - SPS 并联机构运动学正解的一种解析化方法[J].机械工程学报,2010,46(9):26 - 31.
CHENG Shili, WU Hongtao, YAO Yu. An analytical method for the forward kinematics analysis of 6 - SPS parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010, 46(9):26 - 31.(in Chinese)

[25] HUANG Tian, WANG Manxin, YANG Shuofei, et al. Force/motion transmissibility analysis of six degree of freedom parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2014,6(3):1 - 5.

[26] 黄昔光, 廖启征, 魏世民,等. 一般 6 - 6 型平台并联机构位置正解代数消元法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(1):56 - 61.
HUANG Xiguang, LIAO Qizheng, WEI Shimin, et al. Forward kinematics analysis of the general 6 - 6 platform parallel mechanism based on algebraic elimination[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009,45(1):56 - 61.(in Chinese)

[27] 尤晶晶, 李成刚, 吴洪涛. 基于四面体构型的冗余并联机构的运动学分析[J]. 中国机械工程, 2013, 24(8):1097 - 1101.
YOU Jingjing, LI Chenggang, WU Hongtao. Kinematics analysis of redundant parallel mechanism based on tetrahedral configuration[J]. China Mechanical Engineering,2013,24(8):1097 - 1101.(in Chinese)

[28] 沈惠平, 尹洪波, 王振,等. 基于拓扑结构分析的求解 6 - SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21):70 - 80.
SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6 - SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013,49(21):70 - 80.(in Chinese)

(上接第 381 页)

[18] 王启明, 苏建, 张兰, 等. 基于 L - M 算法的正交 Stewart 平台位姿正解的初值补偿[J]. 吉林大学学报(工学版), 2017,47(1): 97 - 104.

[19] YANG Xiaolong, WU Hongtao, CHEN Bai, et al. Fast numerical solution to forward kinematics of general Stewart mechanism using quaternion[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2014, 31(4):377 - 385.

[20] YANG Xiaolong, WU Hongtao, LI Yao, et al. A dual quaternion solution to the forward kinematics of a class of six-DOF parallel robots with full or reductant actuation[J]. Mechanism & Machine Theory, 2017, 107:27 - 36.

[21] WANG Wei, ZHANG Xin, HAN Lili, et al. Inverse kinematics analysis of 6-DOF Stewart platform based on homogeneous coordinate transformation[J]. Ferroelectrics, 2018, 522(1): 108 - 121.

[22] LIO M D, COSSALTER V, LOT R. On the use of natural coordinates in optimal synthesis of mechanisms[J]. Mechanism & Machine Theory, 2000, 35(10):1367 - 1389.

[23] SZKODNY T. Forward and inverse kinematics of IRb - 6 manipulator[J]. Mechanism & Machine Theory, 1995, 30(7): 1039 - 1056.

[24] CECCARELLI M, FINO P M D, JIMENEZ J M. Dynamic performance of CaPaMan by numerical simulations[J]. Mechanism & Machine Theory, 2002, 37(3):241 - 266.

[25] SZKODNY T. Dynamics of industrial robot manipulators[J]. Mechanism & Machine Theory, 1995, 30(7):1057 - 1072.