

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2019.02.047

# 基于冗余联动的六轴联动数控机床加工轨迹误差优化

张鹏翔 周凯 李学崑

(清华大学机械工程系, 北京 100084)

**摘要:** 针对数控机床实际加工轨迹与理论轨迹存在误差的现象, 提出利用六轴联动数控机床冗余联动特点优化该误差的方法。建立了一类六轴联动数控机床的运动学模型, 并研究了其冗余联动特点。根据刀具接触点运动规律, 以冗余旋转联动轴的运动优化刀具中心点运动轨迹误差和刀具轴线转动轨迹误差, 从而实现加工轨迹误差的优化。在实际六轴联动数控机床进行了抛光加工实验, 通过应用所提出的轨迹误差优化算法, 减小了抛光过程中的加工轨迹误差, 降低了工件表面粗糙度, 且保证加工后表面具有较高的均匀一致性, 提高了抛光表面质量, 从而验证了所提出方法的有效性。

**关键词:** 六轴联动数控机床; 运动学模型; 冗余联动; 加工轨迹; 误差优化

**中图分类号:** TH161+.5      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1298(2019)02-0411-09

## Optimization of Machining Trajectory Error Based on Redundant Linkage in Six-axis Linkage CNC Machine Tool

ZHANG Pengxiang ZHOU Kai LI Xuekun

(Department of Mechanical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract:** To minimize the error between actual processing trajectory and theoretical trajectory in computer numerical control (CNC) machine tool, an error optimization method with the redundant feature of six-axis linkage CNC machine tool was proposed. Firstly, the kinematic model of a type six-axis linkage CNC machine tool which had three linkage axes and three rotation linkage axes was established. Then, the feature of redundant linkage of machine tool was researched, and the redundant rotation linkage axis was defined. With the trajectory model of contact point between tool and workpiece, the trajectory errors models of tool center point and axis vector were established. The errors models showed that the values of them depended on the motion of rotation linkage axes. The motion of redundant rotation linkage axis was applied to adjust the motions of all linkage axes. The values of the two errors became the minimum when the sum of the motion of rotation linkage axes became the minimum. And, it made the values of the processing trajectory error became the minimum at the same time. To demonstrate the validity of the optimization method, two polishing experiments were made in a six-axis linkage CNC machine tool. An experiment was made in the five-axis linkage mode that the redundant rotation linkage axis was motionless, and another experiment was made in the six-axis linkage mode. Because the lower machining trajectory error made the lower surface roughness and the higher of its consistency, compared with the five-axis linkage mode, the processing result in six-axis linkage mode was more excellent. The validity of the method was verified by the results of experiments.

**Key words:** six-axis linkage CNC machine tool; kinematic model; redundant linkage; machining trajectory; error optimization

## 0 引言

六轴联动数控机床是一种具有3个平动联动轴

和3个旋转联动轴的多轴联动数控机床。与五轴联动数控机床相比, 该类机床增加了一个旋转联动轴。因此, 六轴联动主要应用于刀具不绕自身轴线旋转

收稿日期: 2018-08-21 修回日期: 2018-10-24

基金项目: 国家高技术研究发展计划(863计划)项目(2014AA041605)

作者简介: 张鹏翔(1984—), 男, 博士生, 主要从事数控加工技术研究, E-mail: zhang\_p\_x@163.com

通信作者: 周凯(1954—), 男, 教授, 主要从事数控技术和先进制造研究, E-mail: kaizhou@tsinghua.edu.cn

的加工设备,如电火花加工机床和焊接加工设备<sup>[1-2]</sup>;或者用于齿轮加工等制造设备<sup>[3-8]</sup>。在刀具旋转时,六轴联动的特点是所增加的旋转联动轴可认为是冗余联动或者冗余自由度。该特点能保证设备满足运动关系的前提下,实现额外的约束功能<sup>[9-11]</sup>。

加工轨迹误差主要由于刀具相对于工件的实际运动与理论运动不一致所产生。迄今,针对该误差的优化研究,均需结合机床运动学模型,如在数控系统中,根据该模型对联动轴的运动量进行实时修正<sup>[12]</sup>,该类方法能够根据联动轴的实际位置响应对加工轨迹误差进行在线修正。因此,误差优化效果最优,但必须在数控系统的实时算法层面实现。当机床采用第三方数控系统时,该类方法无法应用。或者,在计算联动轴的运动量时,根据模型优化刀具中心点运动轨迹误差<sup>[13-14]</sup>,或者优化刀具轴线矢量转动误差<sup>[15-16]</sup>,此类方法主要在刀具中心点运动轨迹中插入新的刀具中心点,或者在刀具轴线转动轨迹中插入新的刀具轴线矢量,从而实现加工轨迹误差的优化。该类方法可用于机床的后置处理,具有较好的通用性,但由于所插入的刀具中心点或新的轴线矢量无法考虑到刀具与工件之间的接触或方向关系,因此,该类方法并不能保证误差优化具有很好的效果。

本文以用于抛光加工的六轴联动数控机床为研究对象,通过建立其运动学模型,研究其冗余联动特点。建立加工轨迹误差与联动轴运动之间相互关联的数学模型,提出以冗余联动轴优化加工轨迹误差的方法。在该机床上应用所提出的加工轨迹优化算法进行对比实验,对实验中的加工轨迹误差和抛光后工件表面粗糙度进行分析,以验证本文所提出优化方法的有效性。

## 1 六轴联动机床运动学模型与冗余联动

机床运动学模型的主要作用为将刀具相对工件的运动映射成联动轴的运动,即将工件静止时,刀具相对于工件的运动轨迹转换成机床联动轴的运动轨迹。当工件静止时,刀具运动轨迹可以用刀具中心点  $p$  和刀具轴线矢量  $u$  描述,其中  $p$  和  $u$  分别表示为

$$\begin{cases} p = (p_x, p_y, p_z) \\ u = (u_x, u_y, u_z) \end{cases} \quad (1)$$

式中  $p_x, p_y, p_z$ ——刀具中心点  $p$  在  $X, Y$  和  $Z$  方向上的分量

$u_x, u_y, u_z$ ——刀具轴线矢量  $u$  在  $X, Y$  和  $Z$  方向上的分量

本文所研究的六轴联动数控机床应用于卫浴产品的抛光加工,刀具为抛光轮,其结构图如图1所示,具有  $X, Y$  和  $Z$  3个平动联动轴,  $A, B$  和  $C$  3个旋转联动轴,其中  $B, C$  轴位于工件处。在图1中,机床的  $B$  轴和  $C$  轴处于可  $360^\circ$  旋转的转盘上,为了上下料方便,此时,  $B$  轴处于  $-90^\circ$ ,使得此时的  $C$  轴轴线和  $A$  轴轴线平行。为了描述该机床联动轴的运动,建立机床坐标系如图2所示,其中  $O_m X_m Y_m Z_m$  为机床坐标系,  $O_w X_w Y_w Z_w$  为工件回转坐标系,  $O_t X_t Y_t Z_t$  为抛光轮平动坐标系,抛光轮中心点  $p$  与  $O_t$  重合,  $O_d X_d Y_d Z_d$  为抛光轮摆动坐标系。为了研究方便,设机床坐标系与工件回转坐标系相重合,则  $r_m$  为零矢量。机床的初始状态为各个联动轴的运动量为0时对应的状态。矢量  $r_n$  为该状态下抛光轮摆动坐标系原点在抛光轮平动坐标系下的坐标,以齐次坐标表示为

$$r_n = (n_x, n_y, n_z, 1)$$

式中  $n_x, n_y, n_z$ ——矢量  $r_n$  在  $X, Y$  和  $Z$  方向上分量

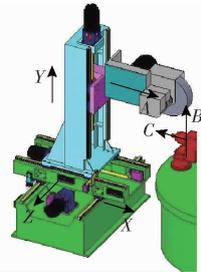


图1 六轴联动数控机床装配图

Fig. 1 Assembly drawing of six-axis linkage CNC machine tool

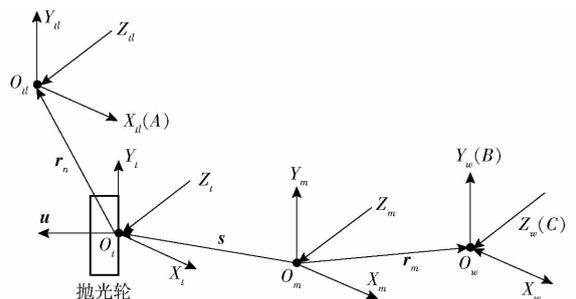


图2 六轴联动数控机床坐标系示意图

Fig. 2 Diagram of coordinate systems of six-axis linkage CNC machine tool

由图1和图2关于机床联动轴和坐标系的描述,能够建立联动轴运动与抛光轮中心点  $p$  和抛光轮轴线矢量  $u$  之间的数学模型。因此,本文研究的六轴联动数控机床运动学模型可表示为

$$\begin{bmatrix} p & 1 \end{bmatrix}^T = \mathbf{R}(-\theta_C) \mathbf{R}(-\theta_B) \mathbf{T}(s + r_n) \cdot \mathbf{R}(\theta_A) \mathbf{T}(-r_n) [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} u & 0 \end{bmatrix}^T = \mathbf{R}(-\theta_C) \mathbf{R}(-\theta_B) \mathbf{T}(s + r_n) \cdot \mathbf{R}(\theta_A) \mathbf{T}(-r_n) [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T \quad (3)$$

其中  $s = (s_x, s_y, s_z, 1)$   
 式中  $\theta_A$ ——A轴转动角  $\theta_B$ ——B轴转动角  
 $\theta_C$ ——C轴转动角  $s_z$ ——Z轴运动量  
 $T$ ——平移运动齐次坐标变换矩阵  
 $R$ ——旋转运动齐次坐标变换矩阵  
 $s_x$ ——X轴运动量  $s_y$ ——Y轴运动量

将式(3)展开可得

$$\begin{cases} u_x = -(\cos\theta_A \sin\theta_B \cos\theta_C + \sin\theta_C \sin\theta_A) \\ u_y = \cos\theta_A \sin\theta_B \sin\theta_C - \sin\theta_A \cos\theta_C \\ u_z = \cos\theta_A \cos\theta_B \end{cases} \quad (4)$$

由于抛光轮轴线矢量  $u$  为单位矢量,式(4)只有两个独立方程,同时具有3个未知数(3个旋转联动轴的运动量),因此,式(4)为冗余方程组。对于给定的抛光轮轴线矢量,式(4)的解,即A、B、C轴的运动量理论上无穷多组。

如图1所示,由于机床的C轴通过夹具与工件直接连接,C轴的转动可以直接驱动工件转动,而不依赖于其他旋转联动轴,将C轴视为冗余联动轴,即C轴的运动量设为已知,则其余5个联动轴的运动量为

$$\theta_A = -\arcsin(u_x \sin\theta_C + u_y \cos\theta_C)$$

$$\theta_B =$$

$$\begin{cases} \arctan \frac{u_y \sin\theta_C - u_x \cos\theta_C}{u_z} & (u_y \sin\theta_C - u_x \cos\theta_C < 0) \\ \pi - \arctan \frac{u_y \sin\theta_C - u_x \cos\theta_C}{u_z} & (u_y \sin\theta_C - u_x \cos\theta_C > 0, u_z > 0) \\ \arctan \frac{u_y \sin\theta_C - u_x \cos\theta_C}{u_z} - \pi & (u_y \sin\theta_C - u_x \cos\theta_C > 0, u_z < 0) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} s_x = (p_x \cos\theta_C - p_y \sin\theta_C) \cos\theta_B + p_z \sin\theta_B \\ s_y = p_y \cos\theta_C + p_x \sin\theta_C - n_y (1 - \cos\theta_A) \\ s_z = p_z \cos\theta_B - (p_x \cos\theta_C - p_y \sin\theta_C) \sin\theta_B + n_y \sin\theta_A \end{cases} \quad (6)$$

由式(5)、(6)可知,需先以附加约束条件确定C轴的运动量,进而计算出其他5个联动轴的运动量。因此,本文研究的六轴联动数控机床为冗余系统,联动轴的运动在满足抛光轮中心点位置和抛光轮轴线矢量方向的前提下,可以实现额外的附加功能。本文所研究的附加功能为加工轨迹误差的最小化。

## 2 加工轨迹误差

### 2.1 接触点轨迹

在本文研究的六轴联动数控机床中,加工轨迹为抛光轮与工件的相对运动轨迹,即抛光轮上与工件相接触的点在工件表面上的运动轨迹。当抛光轮相对

于工件出现转动时,无法仅以其中心点的运动轨迹来准确描述加工轨迹,需同时考虑抛光轮相对于工件的转动。抛光轮与工件的接触关系如图3所示。

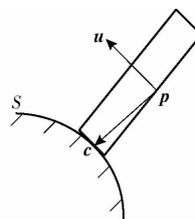


图3 抛光轮与工件接触点示意图

Fig.3 Diagram of contact point between polish wheel and workpiece

在图3中, $p$ 为抛光轮中心点, $u$ 为抛光轮轴线矢量, $c$ 为抛光轮与工件的接触点, $S$ 为工件表面。为了研究方便,设抛光轮转速为0,加工轨迹可转换为抛光轮上与工件相接触点的运动轨迹,即点 $c$ 的运动轨迹。

定义在某个加工轨迹段中,起始点处抛光轮中心点坐标为 $p_1$ ,抛光轮轴线矢量为 $u_1$ ,对应X、Y、Z、A、B和C轴的运动量为 $s_{x1}$ 、 $s_{y1}$ 、 $s_{z1}$ 、 $\theta_{A1}$ 、 $\theta_{B1}$ 、 $\theta_{C1}$ ;结束点处抛光轮中心点坐标为 $p_2$ ,抛光轮轴线矢量为 $u_2$ ,对应X、Y、Z、A、B和C轴的运动量为 $s_{x2}$ 、 $s_{y2}$ 、 $s_{z2}$ 、 $\theta_{A2}$ 、 $\theta_{B2}$ 、 $\theta_{C2}$ 。

由刚体运动规律可知,接触点 $c$ 的运动可分解为:跟随抛光轮中心点 $p$ 的平移和相对于该中心点的定点转动。则接触点 $c$ 的运动轨迹可表示为

$$c = p + R_{u_{ax}}(\theta_{ax})p_c \quad (7)$$

式中  $p_c$ ——抛光轮中心点 $p$ 至接触点 $c$ 的矢量  
 $\theta_{ax}$ ——接触点绕抛光轮中心点的转动角  
 下标 $u_{ax}$ 表示接触点 $c$ 绕抛光轮中心点 $p$ 的转动轴线。

转动轴线 $u_{ax}$ 由抛光轮轴线确定,可表示为

$$u_{ax} = u_1 \times u_2 \quad (8)$$

因此,接触点运动轨迹,即加工轨迹,由抛光轮中心点的平动轨迹和接触点绕该中心点的转动轨迹合成而得。

### 2.2 抛光轮中心点轨迹误差

在本文所研究的六轴联动数控机床中,抛光轮中心点的理论运动轨迹 $p_r(t)$ 可以用直线段拟合,表示为

$$p_r(t) = (tp_{x2} + (1-t)p_{x1}, tp_{y2} + (1-t)p_{y1}, tp_{z2} + (1-t)p_{z1}, 1) \quad (9)$$

式中  $t$ ——在 $[0,1]$ 之间的无量纲自变量

$p_{x1}$ 、 $p_{y1}$ 、 $p_{z1}$ —— $p_1$ 在X、Y和Z方向上的分量  
 $p_{x2}$ 、 $p_{y2}$ 、 $p_{z2}$ —— $p_2$ 的X、Y和Z方向上的分量

数控系统一般采用线性插补控制联动轴的运动,因此机床各个联动轴的运动轨迹为

$$\begin{cases} s_x(t) = ts_{x2} + (1-t)s_{x1} \\ s_y(t) = ts_{y2} + (1-t)s_{y1} \\ s_z(t) = ts_{z2} + (1-t)s_{z1} \\ \theta_A(t) = t\theta_{A2} + (1-t)\theta_{A1} \\ \theta_B(t) = t\theta_{B2} + (1-t)\theta_{B1} \\ \theta_C(t) = t\theta_{C2} + (1-t)\theta_{C1} \end{cases} \quad (10)$$

由于抛光轮相对于工件的运动是由机床联动轴的运动合成而得,因此抛光轮中心点实际运动轨迹  $p(t)$  为

$$\begin{aligned} [p(t) \quad 1]^T &= R(-\theta_C(t))R(-\theta_B(t))T(s(t)+n) \cdot \\ &R(\theta_A(t))T(-n)[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T \end{aligned} \quad (11)$$

由式(11)可知,抛光轮中心点的实际运动轨迹为曲线。结合式(10),抛光轮中心点的理论运动轨迹与实际运动轨迹的误差  $\varepsilon_p(t)$  为

$$\varepsilon_p(t) = |p(t) - p_r(t)| \quad (12)$$

由抛光轮中心点平动误差所导致的接触点运动误差同样可由式(12)表示。

### 2.3 抛光轮轴线转动轨迹误差

为了研究方便,设抛光轮中心点静止,则此时接触点的运动由抛光轮轴线转动引起。一般而言,在设计抛光轮运动轨迹时,希望抛光轮轴线在  $u_1$  处以恒定角速度转动至  $u_2$  处,该转动轨迹  $u_r(t)$  可表示为

$$u_r(t) = \xi_1(t)u_1 + \xi_2(t)u_2 \quad (13)$$

式中  $\xi_1(t)$ 、 $\xi_2(t)$ ——与  $u_1$ 、 $u_2$  和  $t$  有关的函数

因此,抛光轮轴线的理论转动轨迹,即  $u_r(t)$  的转动轨迹为在  $u_1$  和  $u_2$  所组成的平面内,从  $u_1$  至  $u_2$  且半径为 1 的圆弧,圆心为中心点  $p$ ,重新表示为

$$u_r(t) = \frac{\sin(\theta - \theta(t))}{\sin\theta}u_1 + \frac{\sin\theta(t)}{\sin\theta}u_2 \quad (14)$$

式中  $\theta$ ——轴线矢量  $u_1$  和  $u_2$  的夹角

由机床运动模型式(3)和联动轴运动轨迹关系式(10)可知,抛光轮轴线的实际转动同样由旋转联动轴的运动合成而来,即为

$$\begin{aligned} u(t) &= \\ &\begin{bmatrix} -\cos\theta_A(t)\sin\theta_B(t)\cos\theta_C(t) - \sin\theta_C(t)\sin\theta_A(t) \\ \cos\theta_A(t)\sin\theta_B(t)\sin\theta_C(t) - \sin\theta_A(t)\cos\theta_C(t) \\ \cos\theta_A(t)\cos\theta_B(t) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)可知,抛光轮轴线的实际转动轨迹为在半径为 1 的球面上的曲线,且起始点为  $u_1$ , 结束点为  $u_2$ , 球心为中心点  $p$ 。

可知抛光轮轴线的理论转动轨迹和实际转动轨迹两者之间存在夹角误差  $\theta_r(t)$ , 可表示为

$$\theta_r(t) = \arccos(u(t)u_r(t)) \quad (16)$$

因此,由于抛光轮轴线转动夹角误差导致的接触点运动误差  $\varepsilon_u(t)$  为

$$\varepsilon_u(t) = 2|p_c| \sin \frac{\theta_r(t)}{2} \quad (17)$$

由式(17)可知,当轴线夹角误差越大,所引起的接触点运动轨迹误差也越大。

### 2.4 接触点轨迹误差

由 2.2 节和 2.3 节可知,由于接触点相对于抛光轮中心点的平动和转动相互正交,接触点运动的平动误差和转动误差也相互正交。结合式(12)、(17),接触点实际运动轨迹误差  $\varepsilon(t)$  为

$$\varepsilon(t) = \sqrt{\varepsilon_p^2(t) + \varepsilon_u^2(t)} \quad (18)$$

由于本文所研究的六轴联动数控机床具有冗余联动特点,由式(5)、(6)可知,接触点轨迹误差同时与冗余旋转联动轴  $C$  轴的运动量有关,则其可表示为

$$\varepsilon(\theta_C(t), t) = \sqrt{\varepsilon_p^2(\theta_C(t), t) + \varepsilon_u^2(\theta_C(t), t)} \quad (19)$$

## 3 加工轨迹误差优化

由第 2 节可知,加工轨迹误差,即接触点运动轨迹误差,是由抛光轮中心点平动轨迹误差和抛光轮轴线转动轨迹误差所引起的。因此,需要对这两个误差进行优化,从而实现接触点轨迹误差的优化。

由式(19)可知,本文所研究的六轴联动数控机床具有冗余联动特点,通过冗余旋转联动轴  $C$  轴的运动,可以实现抛光轮中心点平动误差和抛光轮轴线转动误差的最优,从而达到加工轨迹误差的优化。

### 3.1 抛光轮中心点运动轨迹误差优化

为了研究抛光轮中心点平动轨迹误差  $\varepsilon_p(t)$  的优化,根据式(12),将该误差在  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  方向上分解,可表示为

$$\begin{cases} \varepsilon_{px}(t) = (s_x(t)\cos\theta_B(t) - s_z(t)\sin\theta_B(t) + n_y\sin\theta_B(t)\sin\theta_A(t))\cos\theta_C(t) + (s_y(t) + n_y - n_y\cos\theta_A(t))\sin\theta_C(t) - tp_{x2} - (1-t)p_{x1} \\ \varepsilon_{py}(t) = (s_y(t) + n_y - n_y\cos\theta_A(t))\cos\theta_C(t) - tp_{y2} - (1-t)p_{y1} - (s_x(t)\cos\theta_B(t) - s_z(t)\sin\theta_B(t) + n_y\sin\theta_B(t)\sin\theta_A(t))\sin\theta_C(t) \\ \varepsilon_{pz}(t) = s_x(t)\sin\theta_B(t) + (s_z(t) - n_y\sin\theta_A(t))\cos\theta_B(t) - tp_{z2} - (1-t)p_{z1} \end{cases} \quad (20)$$

式中  $\varepsilon_{px}(t)$ 、 $\varepsilon_{py}(t)$ 、 $\varepsilon_{pz}(t)$ ——误差  $\varepsilon_p(t)$  在  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  方向上的分量

将式(20)中的三角函数在  $t$  为 0 处以泰勒级数展开,可表示为

$$\begin{cases} \cos\theta_A(t) = \cos\theta_{A1} - \frac{1}{2}(\theta_{A2} - \theta_{A1})^2 t^2 + o(t^2) \\ \sin\theta_A(t) = (\theta_{A2} - \theta_{A1})t + o(t^2) \\ \cos\theta_B(t) = \cos\theta_{B1} - \frac{1}{2}(\theta_{B2} - \theta_{B1})^2 t^2 + o(t^2) \\ \sin\theta_B(t) = (\theta_{B2} - \theta_{B1})t + o(t^2) \\ \cos\theta_C(t) = \cos\theta_{C1} - \frac{1}{2}(\theta_{C2} - \theta_{C1})^2 t^2 + o(t^2) \\ \sin\theta_C(t) = (\theta_{C2} - \theta_{C1})t + o(t^2) \end{cases} \quad (21)$$

因此,在该段抛光轮中心点轨迹段内,当  $A$ 、 $B$ 、 $C$  3 个旋转轴的变化量越小,结合式(21),则机床  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  联动轴运动量越接近中心点的理想运动轨迹在对应方向上的分量,即为

$$\begin{cases} |\theta_{B2} - \theta_{B1}| \rightarrow 0 & |\theta_{C2} - \theta_{C1}| \rightarrow 0 & s_x(t) \rightarrow tp_{x2} + (1-t)p_{x1} \\ |\theta_{A2} - \theta_{A1}| \rightarrow 0 & |\theta_{C2} - \theta_{C1}| \rightarrow 0 & s_y(t) \rightarrow tp_{y2} + (1-t)p_{y1} \\ |\theta_{A2} - \theta_{A1}| \rightarrow 0 & |\theta_{B2} - \theta_{B1}| \rightarrow 0 & s_z(t) \rightarrow tp_{z2} + (1-t)p_{z1} \end{cases} \quad (22)$$

进一步根据机床运动学模型式(2),可以得到  $A$ 、 $B$ 、 $C$  3 个旋转轴的变化量与抛光轮中心点轨迹误差的  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  方向分量之间的关系为

$$\begin{cases} |\theta_{B2} - \theta_{B1}| \rightarrow 0 & |\theta_{C2} - \theta_{C1}| \rightarrow 0 & \varepsilon_{px}(t) \rightarrow 0 \\ |\theta_{A2} - \theta_{A1}| \rightarrow 0 & |\theta_{C2} - \theta_{C1}| \rightarrow 0 & \varepsilon_{py}(t) \rightarrow 0 \\ |\theta_{A2} - \theta_{A1}| \rightarrow 0 & |\theta_{B2} - \theta_{B1}| \rightarrow 0 & \varepsilon_{pz}(t) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (23)$$

由式(23)可知,在该段轨迹内,当  $A$ 、 $B$ 、 $C$  轴的运动量越小时,抛光轮中心点运动轨迹误差也越小,即有如下关系

$$\begin{cases} |\theta_{A2} - \theta_{A1}| \rightarrow 0 & |\theta_{B2} - \theta_{B1}| \rightarrow 0 \\ |\theta_{C2} - \theta_{C1}| \rightarrow 0 & \varepsilon_p(t) \rightarrow 0 \end{cases} \quad (24)$$

由于  $A$ 、 $B$ 、 $C$  3 个旋转联动轴相互正交,因此式(24)可转换为

$$\min \sqrt{(\theta_{A2} - \theta_{A1})^2 + (\theta_{B2} - \theta_{B1})^2 + (\theta_{C2} - \theta_{C1})^2} \rightarrow \min \varepsilon_p(t) \quad (25)$$

式(25)表明,当  $C$  轴的转动使得  $A$ 、 $B$  轴及自身的运动量最小,可使得抛光轮中心点轨迹误差最小。

### 3.2 抛光轮轴线转动轨迹误差优化

如式(17)所示,当实际轴线矢量与理论轴线矢量之间的夹角误差越小,由此引起的接触点轨迹误差也越小。因此,可以通过  $C$  轴的转动,使得式(16)中的夹角误差最小,从而优化其引起的接触

点轨迹误差。根据本文机床的冗余联动特点,两个轴线矢量的夹角误差大小同时与  $C$  轴的运动有关,由式(17)可以定义二元函数

$$g(\theta_C(t), t) = \frac{1}{\sin\theta} (\sin(\theta - \theta(t)) \mathbf{u}_1 + \sin\theta(t) \mathbf{u}_2) \mathbf{u}(t) \quad (26)$$

式中  $g(\theta_C(t), t)$ ——抛光轮实际轴线与理论轴线的点积

由于式(26)在  $t$  为 0 和 1 时取值为 0,因此存在  $t_0$  符合如下关系

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{t=t_0} = 0 \quad (0 < t_0 < 1) \quad (27)$$

结合式(16)可知,在  $\theta_C$  固定时,夹角误差在  $t_0$  时为最大值。此时,抛光轮轴线矢量实际值为

$$\begin{aligned} & \mathbf{u}(t_0) = \\ & \begin{bmatrix} -\cos\theta_A(t_0) \sin\theta_B(t_0) \cos\theta_C(t_0) - \sin\theta_C(t_0) \sin\theta_A(t_0) \\ \cos\theta_A(t_0) \sin\theta_B(t_0) \sin\theta_C(t_0) - \sin\theta_A(t_0) \cos\theta_C(t_0) \\ \cos\theta_A(t_0) \cos\theta_B(t_0) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (28)$$

由于式(28)在式(27)的条件下,只有  $\theta_C(t_0)$  为变量。因此,有如下条件

$$\begin{cases} \theta_A(t_0) \rightarrow 0 \\ \theta_B(t_0) \rightarrow 0 \\ \theta_C(t_0) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow g(\theta_C(t_0), t_0) \rightarrow 1 \quad (29)$$

式(29)中,由于 3 个旋转联动轴的运动量只和初始和结束状态有关,可重新表示为

$$\begin{cases} |\theta_{A2} - \theta_{A1}| \rightarrow 0 \\ |\theta_{B2} - \theta_{B1}| \rightarrow 0 \\ |\theta_{C2} - \theta_{C1}| \rightarrow 0 \end{cases} \quad (30)$$

结合式(17),当 3 个旋转联动轴的运动量均为最小时,由抛光轮轴线转动误差所导致的接触点运动误差为最小,即为

$$\min \sqrt{(\theta_{A2} - \theta_{A1})^2 + (\theta_{B2} - \theta_{B1})^2 + (\theta_{C2} - \theta_{C1})^2} \rightarrow \min \varepsilon_u(t) \quad (31)$$

式(31)表明,当  $C$  轴的转角使得  $A$ 、 $B$  轴及自身的运动量最小时,可使得抛光轮轴线转动轨迹误差及其导致的接触点运动轨迹误差最小。

### 3.3 接触点轨迹误差优化

由 3.1、3.2 节研究结果可知,关于抛光轮中心点运动轨迹误差和抛光轮轴线矢量转动误差的优化条件完全相同,因此,该优化条件可以优化接触点运动轨迹误差,则该条件下对应的  $C$  轴运动可表示为

$$\begin{aligned} & f(\theta_{C2}) = \\ & \min(\sqrt{(\theta_{A2} - \theta_{A1})^2 + (\theta_{B2} - \theta_{B1})^2 + (\theta_{C2} - \theta_{C1})^2}) \end{aligned} \quad (32)$$

式中  $f(\theta_{c2})$ —— $C$  轴优化接触点轨迹误差的函数式(32)中,起始点处 3 个旋转联动轴的运动量为已知,即  $\theta_{A1}$ 、 $\theta_{B1}$  和  $\theta_{C1}$  已知。因此,在该式中,结束点处  $C$  轴的转角使得在对应加工轨迹段内  $A$ 、 $B$ 、 $C$  轴的变化量最小,可以使得接触点的运动轨迹误差最小,即加工轨迹误差为最小。

式(32)的边界条件为该式所得到的各联动轴运动量需处于表 1 的行程范围之内,否则无法进行实际加工。如联动轴运动量出现超程,则重新计算,取符合所有联动轴行程限制且式(32)最小的一组联动轴运动量。本文所研究的机床各联动轴的实际行程如表 1 所示,同时  $r_n$  为(0,80 mm,0,1)。

表 1 机床联动轴行程

Tab.1 Strokes of linkage axes of machine tool

	X/mm	Y/mm	Z/mm	A/(°)	B/(°)	C/(°)
正向行程	50	600	300	45	180	180
负向行程	-500	0	-300	-45	-180	-180

由表 1 可知, $C$  轴没有行程限制,即能实现  $-180^\circ \sim 180^\circ$  的旋转,如果  $\theta_{c2}$  直接在该区间内取值计算,则计算比较繁琐。因此,引入一种寻优算法以减小计算量。当一个加工轨迹段内,抛光轮轴线  $u_1$  和  $u_2$  平行时,由机床运动学模型式(2)、(3)可知,3 个旋转联动轴均保持静止,机床以  $XYZ$  3 轴联动进行加工,此时加工轨迹误差为 0。由于  $C$  轴的转动可以改变  $u_1$  和  $u_2$  之间的夹角,可使得两者之间的夹角最小,即存在  $\theta_{c2p}$ ,有如下条件成立

$$\max(\text{Rot}(\theta_{c2p})u_2u_1) \quad (33)$$

由式(33)可以进一步计算  $\theta_{c2p}$ ,可表示为

$$\theta_{c2p} = 90^\circ - \varphi \quad (34)$$

其中 
$$\varphi = \arctan \frac{u_{x1}u_{x2} + u_{y1}u_{y2}}{u_{y1}u_{x2} - u_{x1}u_{y2}} \quad (35)$$

式中  $\varphi$ ——与  $u_1$  和  $u_2$  有关的角,取为  $-90^\circ \sim 90^\circ$

由于式(33)的  $C$  轴转动无法改变抛光轮轴线矢量在  $Z$  方向上的分量,该情况下加工轨迹误差大于式(32)所对应的误差。因此,接触点轨迹误差最小对应的  $C$  轴角  $\theta_{c,op}$  区间表示为

$$\theta_{c,op} \in [\theta_{c1} - |\theta_{c2p}|, \theta_{c1} + |\theta_{c2p}|] \quad (36)$$

在实际计算中,可在式(36)对应的区间中, $C$  轴以数控系统旋转轴分辨率  $0.001^\circ$  为变化量,寻找满足表 1 前提下,符合式(32)的 6 个联动轴运动量,从而减小该优化方法的计算量。

## 4 抛光加工实验

为了验证所提出的加工轨迹误差优化算法有效性,在六轴联动数控机床(图 1)上进行加工实验。

抛光加工主要是为了降低工件表面粗糙度,抛光轮与工件为半刚性或者柔性接触,即抛光轮的变形产生与工件之间的接触压力。因此,当加工轨迹出现误差时,接触压力同时也出现误差<sup>[17-18]</sup>。由于在其他条件(如加工轨迹等)不变时,工件表面的抛光去除率由接触压力决定。当加工轨迹误差使得接触压力出现变化时,导致出现欠抛现象,从而影响工件抛光后的表面粗糙度和粗糙度均匀一致性<sup>[19-20]</sup>。因此,可以用工件抛光后的表面粗糙度和均匀一致性衡量加工轨迹误差。测试工件如图 4 所示。

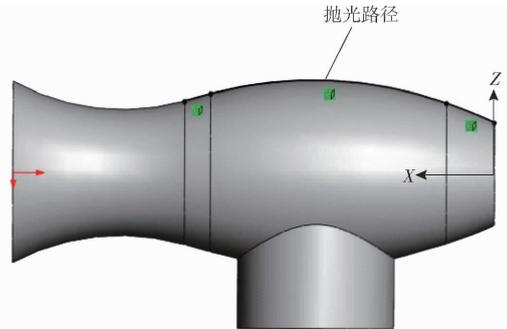


图 4 加工工件示意图

Fig.4 Diagram of processing workpiece

如图 4 所示,在初始状态时,工件的  $X$  轴与机床的  $X$  轴平行, $Z$  轴与机床的  $Z$  轴平行。由于工件的表面由曲面组成,且在加工时为了保证抛光轮轴线与抛光路径的切线相平行,机床需要五轴联动才能实现加工。为了比较加工轨迹误差,实验采用了  $XYZAB$  五轴联动和  $XYZABC$  六轴联动分别对工件进行加工,且抛光路径完全相同,抛光轮转速均为  $1000 \text{ r/min}$ ,抛光轮中心点沿工件表面的运动速率均为  $3000 \text{ mm/min}$ ,抛光轮直径为  $300 \text{ mm}$ ,厚度为  $25 \text{ mm}$ 。因此,这 2 种联动情况下,抛光质量的差别源于加工轨迹误差。其中,在五轴联动时, $C$  轴保持静止,且转角为  $0^\circ$ ;在六轴联动时, $C$  轴的运动量由式(32)和表 1 确定。

为了验证优化算法的可行性,选取工件的其中一段加工轨迹进行详细计算和仿真说明。该轨迹的起始点处抛光轮中心点坐标为  $(-6.226853292 \text{ mm}, 14.675038069 \text{ mm}, 25.87605155 \text{ mm})$ ,抛光轮轴线单位矢量为  $(0.94428136, 0.32413900, 0.05715445)$ ;结束点处抛光轮中心点坐标  $(4.005985873 \text{ mm}, 17.138363010 \text{ mm}, 30.21955804 \text{ mm})$ ,抛光轮轴线单位矢量为  $(0.99932703, 0.03612361, 0.00636957)$ 。

在  $XYZAB$  五轴联动情况下,起始点处各个联动轴的运动量为:  $(-26.205 \text{ mm}, 10.356 \text{ mm}, -30.583 \text{ mm}, -18.913^\circ, -86.536^\circ, 0^\circ)$ 。

结束点处各个联动轴运动量为： $(-30.193 \text{ mm}, 17.086 \text{ mm}, 1.309 \text{ mm}, -2.070^\circ, -89.635^\circ, 0^\circ)$ 。

在六轴联动情况下， $C$  轴的运动由式 (33) 确定，起始点处各个联动轴运动量为： $(-26.205 \text{ mm}, 10.356 \text{ mm}, -30.583 \text{ mm}, -18.913^\circ, -86.536^\circ, 0^\circ)$ 。

结束点处各个联动轴运动量为： $(-30.210 \text{ mm}, 16.202 \text{ mm}, -12.923 \text{ mm}, -10.494^\circ, -89.630^\circ, 8.424^\circ)$ 。

此时，式 (34) 对应的  $\theta_{c2p}$  为  $16.875^\circ$ ，式 (32) 得到的  $\theta_{c2}$  属于式 (36) 对应的区间之内，符合实际情况，同时式 (32) 的计算量得到简化。

由各个联动轴在上述两种不同联动方式的运动量可知，结合式 (33)，五轴联动下  $AB$  轴的变化量之和大于六轴联动下  $ABC$  轴的变化量之和。由表 1 可知，两种联动方式下各联动轴的运动量均处于对应的行程之内，即均可以实现加工。

根据式 (2)、(3)，由 Matlab 软件分别绘制出在五轴联动和六轴联动情况下，该段加工轨迹下的抛光轮中心点实际运动轨迹和抛光轮轴线矢量实际转动轨迹，分别如图 5、6 所示。

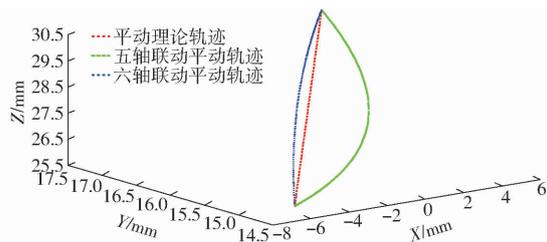


图 5 抛光轮中心点运动轨迹

Fig. 5 Trajectory of polish wheel center point

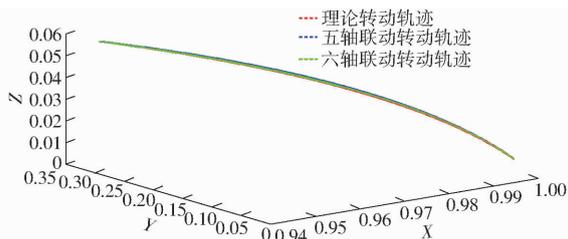


图 6 抛光轮轴线矢量转动轨迹

Fig. 6 Trajectory of polish wheel axis vector

由于图 5 和图 6 均为三维曲线，为了直观表示在五轴联动和六轴联动情况下抛光轮中心点平动轨迹误差，根据式 (12)，绘制出该误差的变化曲线，如图 7 所示。

同样，根据式 (17)，绘制出在五轴联动和六轴联动情况下，抛光轮轴线理论转动轨迹与实际转动轨迹之间夹角误差的余弦值，如图 8 所示。

如图 5、7 所示，以抛光轮中心点理论运动轨迹作为参考，五轴联动下实际运动轨迹的最大误差为

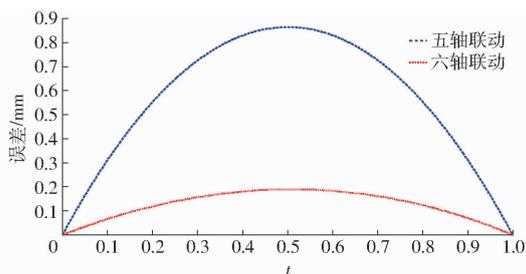


图 7 抛光轮中心平动轨迹误差

Fig. 7 Trajectory errors of polish wheel center point

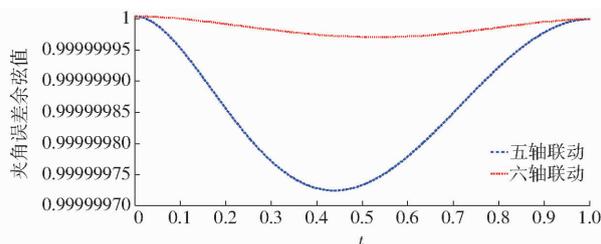


图 8 抛光轮轴线转动轨迹误差

Fig. 8 Trajectory error of polish wheel axis vector

0.864 mm；六轴联动下实际运动轨迹的最大误差为 0.189 mm，即误差更小。同样，如图 6、8 所示，以抛光轮轴线矢量理论转动轨迹作为参考，六轴联动下抛光轮轴线转动夹角误差明显小于五轴联动情况。结合式 (18) 可知，五轴联动下实际转动轨迹的角度最大误差为  $0.0497^\circ$ ，对应接触点轨迹误差为 0.131 mm；六轴联动下实际转动轨迹角度最大误差为  $0.0139^\circ$ ，对应接触点轨迹误差为 0.037 mm，即误差更小。因此，结合式 (20) 可知，机床在六轴联动下的实际加工轨迹误差比五轴联动下的实际加工轨迹误差更小。

图 4 所示的工件其他部分加工同样按照式 (33) 产生机床各个联动轴的运动量，从而实现加工轨迹误差的优化，其实际加工过程如图 9 所示。



图 9 六轴联动数控机床实际加工过程

Fig. 9 Polishing process of six-axis linkage CNC machine tool

工件在机床中分别以五轴联动和六轴联动对工件进行抛光加工，通过白光干涉仪分别测量工件同一处两种联动模式下的表面抛光效果，结果如图 10 所示。

图 10a 为五轴联动的抛光结果，工件的表面粗

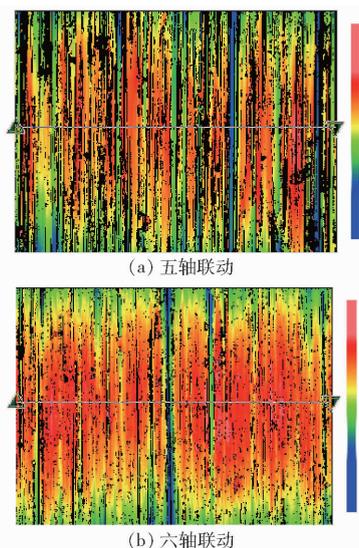


图 10 两种联动模式的抛光加工结果

Fig. 10 Polishing results of two linkage modes

糙度为 1 303.594 nm;图 10b 为六轴联动的抛光结

果,其表面粗糙度为 909.270 nm。图 10a 的表面粗糙度更大,且存在多处欠抛现象(黑色条纹),即表面粗糙度一致性更差。由于两种联动模式下理论加工轨迹和其他抛光条件均相同,可见,通过对加工轨迹误差的优化,降低了工件的抛光表面粗糙度,同时得到了均匀一致性更好的抛光表面。该优化方法可以应用于实际抛光加工。

## 5 结论

(1)建立了具有 3 个平动联动轴和 3 个旋转联动轴的六轴联动数控机床运动学模型,研究了其冗余联动特点。

(2)在研究机床加工轨迹误差产生机理的基础上,提出了以冗余旋转联动轴的运动优化刀具中心点运动和刀具轴线转动的方法,降低了加工轨迹误差,提高了抛光加工质量。

## 参 考 文 献

- [1] 梁斌焱,许先雨,龚时华,等. 三维 T 形焊缝的双光束激光焊接及其焊缝跟踪控制[J]. 焊接学报, 2016, 37(2): 47-51.  
LIANG Binyan, XU Xianyu, GONG Shihua, et al. Dual-beam laser welding and seam tracking control technology for 3D T-beam [J]. Transactions of the China Welding Institution, 2016, 37(2): 47-51. (in Chinese)
- [2] 陈昊,陈默,奚学程,等. 六轴联动电火花加工数控系统及机床[J]. 电加工与模具, 2013(6): 107-111.  
CHEN Hao, CHEN Mo, XI Xuecheng, et al. Six-axis electro-discharge machining CNC system and machine tool [J]. Electromachining & Mould, 2013(6): 107-111. (in Chinese)
- [3] 陈书涵,严宏志,明兴祖. 螺旋锥齿轮六轴五联动数控加工模型[J]. 农业机械学报, 2008, 39(10): 198-201, 139.  
CHEN Shuhan, YAN Hongzhi, MING Xingzu. Spiral bevel gear's numerical control machining model with six axes five linkages [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(10): 198-201, 139. (in Chinese)
- [4] 郭辉,赵宁,项云飞,等. 六轴数控蜗杆砂轮磨齿机磨削面齿轮的方法[J]. 机械工程学报, 2015, 51(11): 186-194.  
GUO Hui, ZHAO Ning, XIANG Yunfei, et al. Face gear grinding method using six-axis CNC worm wheel machine [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(11): 186-194. (in Chinese)
- [5] 刘永平,吴序堂,李鹤岐. 数控锥面砂轮磨齿机磨削变齿厚渐开线齿轮研究[J]. 农业机械学报, 2006, 37(6): 117-120.  
LIU Yongping, WU Xutang, LI Heqi. Study on grinding of involute beveloid gears with conical wheel gear grinding machine [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(6): 117-120. (in Chinese)
- [6] DING H, TANG J, ZHONG J. Accurate nonlinear modeling and computing of grinding machine settings modification considering spatial geometric errors for hypoid gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 99: 155-175.
- [7] JIANG J, FANG Z. High-order tooth flank correction for a helical gear on a six-axis CNC hob machine [J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 91: 227-237.
- [8] ZHANG S, LIANG Z, WANG X. Grinding process of helical micro-drill using a six-axis CNC grinding machine and its fundamental drilling performance [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 86(9-12): 2823-2835.
- [9] 徐朋,程锦翔,应明峰,等. 冗余铺丝机械手逆运动学的拓扑流形分析[J/OL]. 农业机械学报, 2017, 48(6): 387-391, 406.  
XU Peng, CHENG Jinxiang, YING Mingfeng, et al. Topological manifolds analysis for inverse kinematics of redundant fiber placement manipulator [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(6): 387-391, 406. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20170651&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20170651&journal_id=jcsam). DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2017.06.051. (in Chinese)
- [10] 陈修龙,蒋德玉,陈林林,等. 冗余并联机构运动学性能分析与优化[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 340-347.  
CHEN Xiulong, JIANG Deyu, CHEN Linlin, et al. Kinematics performance analysis and optimal design of redundant actuation parallel mechanism [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 340-347. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?flag=1&file\\_no=20160645&journal\\_id=jcsam](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?flag=1&file_no=20160645&journal_id=jcsam). DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.045. (in Chinese)
- [11] 蔡永林,马烨萌. 基于冗余自由度的数控加工轨迹运动分解[J]. 北京交通大学学报, 2017, 41(4): 111-114, 122.

- CAI Yonglin, MA Yemeng. Motion decomposition for NC machining path based on redundant degree of freedom [J]. Journal of Beijing Jiaotong University, 2017, 41(4): 111 - 114, 122. (in Chinese)
- [12] YANG J, ALTINTAS Y. A generalized on-line estimation and control of five-axis contouring errors of CNC machine tools [J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2015, 88: 9 - 23.
- [13] MUDCHAROEN A, MAKHANOV S S. Optimization of rotations for six-axis machining [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2011, 53(5 - 8): 435 - 451.
- [14] DING S, HUANG X D, YU C J. Post processing for five-axis machine tools with pose error compensation [J]. Advanced Materials Research, 2014, 1037: 283 - 287.
- [15] 杨旭静, 周元生, 陈泽忠, 等. 五轴数控加工中旋转轴运动引起的非线性误差分析与控制 [J]. 机械工程学报, 2012, 48(3): 140 - 146.
- YANG Xujing, ZHOU Yuansheng, CHEN Zezhong, et al. Analysis and control of tool path interpolation error in rotary axes motions of five-axis CNC milling [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(3): 140 - 146. (in Chinese)
- [16] ZHANG K, ZHANG L, YAN Y. Single spherical angle linear interpolation for the control of non-linearity errors in five-axis flank milling [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2016, 87(9 - 12): 1 - 11.
- [17] LI H Y, LI X K, TIAN C C, et al. The simulation and experimental study of glossiness formation in belt sanding and polishing processes [J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 90(1 - 4): 199 - 209.
- [18] 吴昌林, 丁和艳, 陈义. 材料去除深度与磨粒的关系建模方法研究 [J]. 中国机械工程, 2011, 22(3): 300 - 304.
- WU Changlin, DING Heyan, CHEN Yi. Research on modeling method of relation between abrasive grain and material removal depth [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(3): 300 - 304. (in Chinese)
- [19] 聂蒙, 李建勇, 沈海阔. 基于容腔调节的钢轨打磨压力控制系统 [J]. 西南交通大学学报, 2015, 50(5): 798 - 802.
- NIE Meng, LI Jianyong, SHEN Haikuo. Pressure control system for rail grinding based on chamber adjustment [J]. Journal of Southwest Jiaotong University, 2015, 50(5): 798 - 802. (in Chinese)
- [20] WANG R Q, LI J Y, LIU Y M, et al. Modeling material removal rate of heavy belt-grinding in manufacturing of U71Mn material [J]. Key Engineering Materials, 2016, 693: 1082 - 1089.

(上接第 383 页)

- [15] YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanisms [M]. Springer, 2018.
- [16] 沈惠平, 许可, 杨廷力. 运动解耦和低耦合度选择顺应性装配机器人手臂并联机构的设计及其运动分析 [J]. 中国机械工程, 2018, 29(8): 883 - 892.
- SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli. Design and kinematics of a SCARA parallel mechanism with motion decoupling and low coupling degree [J]. China Mechanical Engineering, 2018, 29(8): 883 - 892. (in Chinese)
- [17] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
- [18] 杨廷力, 刘安心, 罗玉峰, 等. 机器人机构拓扑结构设计 [M]. 北京: 科学出版社, 2012.
- [19] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6 - SPS 并联机构位置正解的研究 [J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70 - 80.
- SHEN Huiping, YIN Hongbo, WANG Zhen, et al. Research on forward position solutions for 6 - SPS parallel mechanisms based on topology structure analysis [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(21): 70 - 80. (in Chinese)
- [20] 白志富, 韩先国, 陈五一. 冗余驱动消除并联机构奇异研究 [J]. 航空学报, 2006, 27(4): 733 - 736.
- BAI Zhifu, HAN Xianguo, CHEN Wuyi. Study on elimination singularities of parallel mechanism by actuation redundancy [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2006, 27(4): 733 - 736. (in Chinese)
- [21] 张彦斐, 宫金良, 高峰. 冗余驱动消除并联机构位形奇异原理 [J]. 中国机械工程, 2006, 17(5): 445 - 448.
- ZHANG Yanfei, GONG Jinliang, GAO Feng. Theory of singularity elimination by redundant actuation for parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(5): 445 - 448. (in Chinese)