doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2018.06.049

无寄生运动非对称空间2T1R并联机构设计与运动学分析

邓嘉鸣 许 可 赵迎春 沈惠平 张 震 杨廷力
(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

摘要:根据基于方位特征方程的并联机构设计理论与方法,设计了一种能实现空间两平移一转动(2T1R)且无寄生运动的非对称并联机构($RP_a \parallel 3R$) - R + RSS。对该机构进行了动平台方位特征(POC)、自由度(DOF)以及耦合度κ计算的拓扑特性分析,表明机构为零耦合度且具有部分运动解耦性;运用序单开链法的运动学原理,推导了求解机构位置正反解的解析式;基于位置反解,分析了机构的位置工作空间形状与大小及其转动能力;探讨了机构发生奇异位形的条件;对机构的速度和加速度进行了计算及仿真分析。结果表明:该机构运动学分析简单,转动能力强,动力学性能较好。

关键词:并联机构; 零耦合度; 寄生运动; 运动解耦; 两平移一转动

中图分类号:TH112 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-1298(2018)06-0408-10

Design and Kinematics Analysis of Asymmetric 2T1R - type Spatial Parallel Mechanism without Parasitic Motion

DENG Jiaming XU Ke ZHAO Yingchun SHEN Huiping ZHANG Zhen YANG Tingli
(*Research Center for Advanced Mechanism Theory*, *Changzhou University*, *Changzhou* 213016, *China*)

Abstract: 3-DOF parallel mechanism (PM) is widely used in manufacturing since, which is simple and flexible. According to the PM design theory and method based on the position and orientation characteristic (POC), a novel two-translation and one-rotation (2T1R) asymmetric spatial PM without parasitic motion, $RP_a \parallel 3R - R + RSS$, was designed. Firstly, the topology characteristics of the PM were analyzed, including POC of the platform, the DOF and the coupling degree (κ), which demonstrated that the PM was zero coupling degree and of partially decoupled motion. Secondly, the analytical modeling of the forward and inverse position solutions was derived by using kinematics method based on ordered SOC units. In addition, the direct and inverse kinematics were verified by numerical methods using Matlab. And then the shape and size of workspace and rotation capability of the PM were analyzed. Finally, conditions of singularity of the PM were discussed, and velocity and acceleration of the PM were calculated and simulated. This PM had advantages of simple structure and easy manufacturing, which can be used to convey, assemble and position operations in manufacturing. The analysis results indicated that the kinematics analysis of the PM was not complicated, the rotation capability was strong and the performance of dynamics was better.

Key words: parallel mechanism; zero coupling degree; parasitic motion; motion decoupling; 2T1R

0 引言

三自由度的三维纯平移和三维纯转动并联机构已得到了较多的研究与应用[1-4],而具有转动和移动混合输出的三自由度并联机构同样具有较好的研究价值。有关一平移两转动(1T2R)并联机构的研究,已有3 - PRRU并联机构[5],Exechon机器人[6-7]中的2 - UPR - SPR并联机构,Tricept和TriVariant机器人[8-10]中的3 - UPS - UP和2 - UPS - UP并联机构。王飞博等[11]运用基于螺旋理论的

收稿日期: 2017-11-25 修回日期: 2017-12-31

基金项目: 国家自然科学基金项目(51475050、51375062)和江苏省重点研发计划项目(BE2015043)

作者简介: 邓嘉鸣(1963—),男,教授,主要从事机械设计和并联机构研究,E-mail: czdydjm@126.com

通信作者: 沈惠平(1965—),男,教授,博士生导师,主要从事机构学和并联机构研究,E-mail: shp65@126.com

运动/力传递性能指标对 3-PRRU、2-PRU-PRRU 和2-PRS-PRRU 3 种 1T2R 并联机构进行构型优选。汪满新等[12]运用虚拟链法对 1T2R 型并联机构进行型综合,得到多种含冗余驱动/过约束的新构型。HUNT[13]提出一种动平台包含寄生运动的 3-PRS 并联机构,JOSHI 等[14]对此机构进行了奇异分析。

目前,对两平移一转动(2T1R)机构研究相对较少,但这类机构可用作空间抓放定位操作、娱乐设备、调姿装备等,例:KONG 等[15]、杨宁等[16]分别基于螺旋理论对 2T1R 型并联机构的结构综合进行了研究;REFAAT 等[17]根据位移李群理论对三自由度混合运动并联机构进行型综合研究;张彦斌等[18]根据线性变换理论,对无奇异完全各向同性 2T1R 型空间并联机构进行了结构综合,杨廷力等[19-21]基于单开链单元理论对 2T1R 型并联机构进行了型综合,得到多种含有平面闭回路结构的新型机构。

寄生运动,即伴随运动、派生运动、衍生运动,是指并联机构动平台的运动输出量数目大于机构的自由度(或驱动副数目)的那一部分运动,它是由独立运动派生(或衍生)的。一般情况下不希望产生寄生运动,因为对需要精确输出运动的机构来说,其运动规划与控制比较复杂;但文献[22-23]却逆向思考,提出了“少输入-多输出并联机构”的研究对象、设计理论和方法,设计的系列含寄生运动的并联机构,并应用于筛分[24-25]、康复[26-27]混合、娱乐等不需要精确运动的装备上。

本文研究无寄生运动的 2T1R 机构。根据基于方位特征(POC)的并联机构设计理论与方法[19-21],设计一种能实现空间两平移一转动(2T1R)的并联机构($RP_a\parallel 3R$)-R+RSS;对该机构进行拓扑特征、位置正反解求解、动平台工作空间及其转动能力、奇异位形,以及速度与加速度的分析。

1　2T1R 并联机构的设计及拓扑分析

1.1　机构设计

根据基于方位特征(POC)方程的并联机构拓扑结构设计理论和方法[20-21],本文提出的 2T1R 并联机构如图 1 所示,静平台 0 与动平台 1 用一条无约束支链(SOC)和一条混合支链 HSOC 联接。

混合支链包含支链Ⅰ、Ⅱ和转动副 R_4,其组成如下:静平台上的转动副 R_{11} 连接驱动杆 2 的一端,而其另一端用另一个平行轴线转动副 R_{12} 连接于由 4 个 R 副(R_a、R_b、R_c、R_d)组成的平行四边形的短边杆 5;另一短边杆 5′再通过一个平行轴转动副 R_{13} 连接于子平台 1′的一侧,这一平行四边形型结构,记作支链Ⅰ;同时,子平台 1′的另一垂直侧并联连接两杆三平行轴线转动副($R_{21}\parallel R_{22}\parallel R_{23}$)组(记作:支链Ⅱ),从而支链Ⅰ、Ⅱ构成一个子并联机构。进一步,子平台 1′与轴线平行于 R_{23} 的转动副 R_4 串联连接于动平台 1 的另一端,至此,构成混合支链(HSOC),其拓扑表示为 $\underline{R}P_a-\underline{R}\parallel R\parallel R-R$(下划线表示为驱动),简记为($RP_a\parallel 3R$)-R。

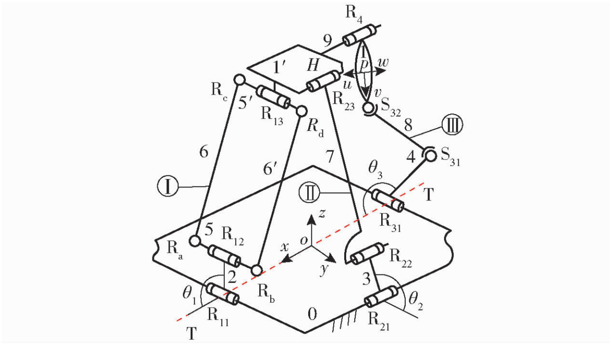

图 1　非对称零耦合度($RP_a\parallel 3R$)-R+RSS 机构

Fig. 1　Asymmetric and zero coupling degree mechanism ($RP_a\parallel 3R$)-R+RSS

而无约束支链为 $R_{31}-S_{31}-S_{32}$,记作:支链Ⅲ,其杆 8 的两端分别通过球副 S_{32}、S_{31} 与动平台 1、驱动杆 4 的一端连接,驱动杆 4 的另一端通过平行于转动副 R_{11} 的转动副 R_{31} 与静平台 0 连接,其拓扑表示为 $\underline{R}SS$ 型。

因此,整个并联机构记为($RP_a\parallel 3R$)-R+RSS。

1.2　机构拓扑特性分析

1.2.1　机构的 POC 计算

1.2.1.1　并联机构的 POC 方程[22]为

$$M_{Pa}=\bigcap_{i=1}^{n}M_{bi}\tag{1}$$

$$M_{bi}=\bigcup_{j=1}^{k}M_{sj}\tag{2}$$

式中　M_{Pa}——机构动平台的 POC 集

M_{bi}——第 i 条支链末端的 POC 集

M_{sj}——支链中第 j 个子 SOC 的 POC 集

1.2.1.2　动平台的 POC 集

(1)机构的拓扑结构

组成子并联机构的Ⅰ、Ⅱ支链的拓扑结构分别为

$$SOC_1\{-R_{11}\parallel R_{12}(-P^{4R}-)\parallel R_{13}-\}$$

$$SOC_2\{-R_{21}\parallel R_{22}\parallel R_{23}-\}$$

静平台 0 上 R_{11} 与 R_{21} 为垂直布置,即 $R_{21}\perp R_{11}$;R_{31} 可任意布置,取 $R_{31}\parallel R_{11}$。选定动平台 1 上的任一点为基点 O'。

(2)确定混合支链 HSOC 末端构件的 POC 集

设 H 为子并联机构子平台上的任一点,则子平台产生的 POC 集为

$$M_{\mathrm{SOC}_1}=\begin{bmatrix}t^1(\perp \mathrm{R}_{11})\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{11})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^1(\diamond(abcd))\\ r^0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}t^1(\perp \mathrm{R}_{11})\cup t^1(\diamond(abcd))\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{11})\end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{SOC}_2}=\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{23})\end{bmatrix}$$

$$M_{\mathrm{bH}}=M_{\mathrm{SOC}_1}\cap M_{\mathrm{SOC}_2}=\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^0\end{bmatrix}$$

表明子平台 1′仅产生 oyz 平面内的二维平移。

而混合支链末端产生的 POC 集为

$$M_{\mathrm{HSOC}}=M_{\mathrm{bH}}\cup\begin{bmatrix}t^1(\perp \mathrm{R}_4)\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_4)\end{bmatrix}$$

(3)确定动平台 POC 集

因无约束支链 RSS 的 POC 集为 3T3R,因此,动平台 1 的 POC 集为

$$M_{\mathrm{pa}}=M_{\mathrm{HSOC}}\cap M_{\mathrm{b2}}=\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_4)\end{bmatrix}$$

表明动平台 1 仅产生在垂直于 R_{23} 轴线平面(即 oyz 平面)内的二维平移,以及绕 R_4 轴线的转动,而没有其他的寄生运动或伴随运动。

1.2.2 机构自由度计算

1.2.2.1 并联机构全周性自由度公式[24]为

$$F=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{v}\xi_{Lj} \tag{3}$$

其中

$$\xi_{Lj}=\dim\left\{\left(\bigcap_{i=1}^{j}M_{bi}\right)\cup M_{b(j+1)}\right\} \tag{4}$$

$$v=m-n+1$$

式中 F——机构自由度

f_i——第 i 个运动副的自由度

m——运动副数 n——构件数

v——独立回路数

ξ_{Lj}——第 j 个回路的独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^{j}M_{bi}$——前 j 条支链组成的子并联机构的 POC 集

$M_{b(j+1)}$——$j+1$ 条支链末端构件的 POC 集

1.2.2.2 机构的 DOF 计算

(1)确定独立回路的位移方程数

该机构可分解为 2 个独立回路,其组成分别为

$$\mathrm{HSOC}_1\{-\mathrm{R}_{11}\parallel \mathrm{R}_{12}(-\mathrm{P}^{4\mathrm{R}}-)\parallel \mathrm{R}_{13}-$$
$$\mathrm{R}_{23}\parallel \mathrm{R}_{22}\parallel \mathrm{R}_{21}-\}$$

$$\mathrm{SOC}_3\{-\mathrm{R}_4-\mathrm{S}_{32}-\mathrm{S}_{31}-\mathrm{R}_{31}-\}$$

它们的独立位移方程数计算如下:

①支链Ⅰ、Ⅱ组成的子并联机构为第 1 个独立回路,可得

$$\xi_{L1}=\dim\{M_{\mathrm{SOC}_1}\cup M_{\mathrm{SOC}_2}\}=$$

$$\dim\left\{\begin{bmatrix}t^1(\perp \mathrm{R}_{11})\cup t^1(\diamond(abcd))\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{11})\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{23})\end{bmatrix}\right\}=5$$

该子并联机构的 POC 集为

$$M_{\mathrm{Pa}_{(1-2)}}=M_{\mathrm{SOC}_1}\cap M_{\mathrm{SOC}_2}=$$

$$\begin{bmatrix}t^1(\perp \mathrm{R}_{11})\cup t^1(\diamond(abcd))\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{11})\end{bmatrix}\cap\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_{23})\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^0\end{bmatrix}$$

可得该子并联机构的自由度为

$$F_{(1-2)}=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{1}\xi_{L_j}=7-5=2$$

此即表明,子平台 1′在 oyz 平面内产生的二维平移,仅由该回路内的驱动副 R_{11}、R_{21}决定,因此,该机构具有部分输入-输出运动解耦性。

②上述子并联机构与单开链 SOC_3 组成第 2 个回路,可得

$$\xi_{L2}=\dim\left\{M_{\mathrm{Pa}_{(1-2)}}\cup\begin{bmatrix}t^0\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_4)\end{bmatrix}\cup M_{\mathrm{SOC}_2}\right\}=$$

$$\dim\left\{\begin{bmatrix}t^2(\perp \mathrm{R}_{23})\\ r^0\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^0\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_4)\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right\}=6$$

(2)确定该并联机构的自由度

$$F=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{2}\xi_{Lj}=(7+7)-(5+6)=3$$

因此,该机构的自由度为 3,可取静平台上的 R_{11}、R_{21}、R_{31}为驱动副。

注:若将该机构视为仅由产生 2T1R 的等效混合支链和一条简单支链组成的一个独立回路,即

$$\mathrm{SOC}\{-\mathrm{P}^*-\mathrm{P}^*-\mathrm{R}_4-\mathrm{S}_{32}-\mathrm{S}_{31}-\mathrm{R}_{31}-\}$$

则其独立位移方程数为

$$\xi_L=\dim\{M_{\mathrm{HSOC}}\cup M_{\mathrm{b2}}\}=$$

$$\dim\left\{\begin{bmatrix}t^2\\ r^1(\parallel \mathrm{R}_4)\end{bmatrix}\cup\begin{bmatrix}t^3\\ r^3\end{bmatrix}\right\}=6$$

则机构自由度为

$$F=\sum_{i=1}^{m}f_i-\sum_{j=1}^{1}\xi_{Lj}=9-6=3$$

显然,自由度计算时,如将含回路的子并联机构用等效支链替代,则计算过程比较方便。

1.2.3 机构耦合度 κ 计算

(1)耦合度定义

由基于序单开链(SOC)单元的机构组成原理[22]知,任意机构可分解为若干个基本运动链

(Basic kinematics chain, BKC)；而独立回路为 v 的 BKC 可进一步分解为 v 个单开链 SOC(Δ_j)($j=1,2,\cdots,v$)，而第 j 个单开链(SOC_j)的约束度定义为

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m_j} f_i-I_j-\xi_{Lj} \tag{5}$$

其中
$$\Delta_j=\begin{cases}\Delta_j^{+}=1,2,\cdots\\ \Delta_j^{0}=0\\ \Delta_j^{-}=-1,-2,\cdots\end{cases}$$

式中　m_j——第 j 个 SOC_j 的运动副数

I_j——第 j 个 SOC_j 的驱动副数

Δ_j 有正、零、负 3 种形式，但须满足 $\sum\Delta_j=0$。

因此，BKC 的耦合度 κ 定义为

$$\kappa=\frac{1}{2}\min\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j| \tag{6}$$

式中，$\min\sum_{j=1}^{v}|\Delta_j|$ 表明 BKC 分解为 v 个 SOC(Δ_j)，可有多种分配方案，应取($\sum|\Delta_j|$)为最小者。

耦合度 κ 的物理意义：①κ 反映了 BKC 内各回路变量之间的关联、依赖程度，且已证明：κ 值越大，机构运动学、动力学问题求解的复杂度越高。②机构的位置正解求解可转换为其各个 BKC 的位置求解。③对于 $\kappa=0$ 的 BKC，其每个回路的运动量解析解都能独立求出；若 $\kappa>0$，意味着 BKC 的运动量需多个回路方程联立求解，可用 κ 维搜索法或代数法求得其位置正解或动力学逆解。

(2)机构耦合度 κ 计算

1.2.2 节已计算出 2 个回路的独立位移方程数，分别为 $\xi_{L1}=5$，$\xi_{L2}=6$，因此，它们的约束度 Δ_1、Δ_2 为

$$\Delta_1=\sum_{i=1}^{m} f_i-I_1-\xi_{L1}=7-2-5=0$$

$$\Delta_2=\sum_{i=1}^{m} f_i-I_2-\xi_{L2}=7-1-6=0$$

因此，该机构包含 2 个 BKC，即第 1 个独立回路为 BKC_1，第 2 个独立回路为 BKC_2。由式(6)得，耦合度分别为：$\kappa_1=0$、$\kappa_2=0$；因此，它们运动学正解可分别直接求出解析式。

2　机构的位置分析

2.1　位置正解求解

2.1.1　坐标系的建立与参数标注

2T1R 机构的运动学建模如图 2 所示，静坐标系 $oxyz$ 建立在静平台 0 的几何中心，且 x 轴与 A_1A_3 连线重合，y 轴与 A_1A_3 连线垂直，z 轴由右手法则确定；动坐标系 $puvw$ 的原点 p 位于直线 C_3D_3 中点，v、u 轴分别重合、垂直于直线 C_3D_3，w 轴同样由右手法则确定。

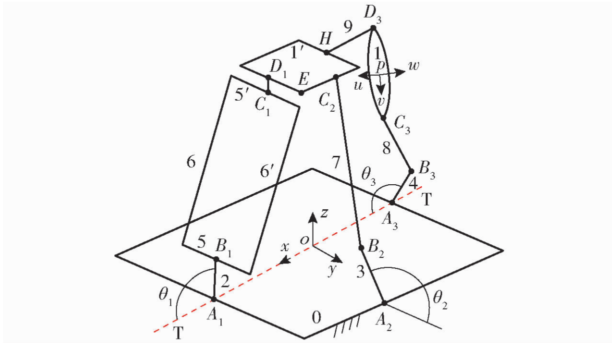

图 2　(RP$_a$ ∥ 3R) − R + RSS 机构的运动学建模

Fig. 2　Kinematics model of mechanism(RP$_a$ ∥ 3R) − R + RSS

该机构的结构参数为：静平台 0 上点 A_1、A_2 和 A_3 到原点 O 的距离均为 l，即 $OA_i=l(i=1,2,3)$；$C_3D_3=l_8$；杆 2、3、4 的长均为 l_1，即 $A_iB_i=l_1(i=1,2,3)$；杆 6 的长为 l_2，即 $B_1C_1=l_2$；杆 7、8 的长分别为 l_3、l_5，即 $B_2C_2=l_3$，$B_3C_3=l_5$；其余参数分别为 $C_1D_1=l_4$；$D_1E=EC_2=l_6$；$HD_3=l_7$。

设 A_1B_1、A_3B_3 与 x 轴正向的夹角为 θ_1、θ_3；A_2B_2 与 y 轴正向的夹角为 θ_2；求动平台 1 上 p 的坐标(x,y,z)及其姿态角 θ。

2.1.2　BKC_1 的位置分析

在静坐标系 $oxyz$ 中，点 $A_i(i=1,2,3)$、$B_i(i=1,2)$ 的坐标分别为 $A_1=(l,0,0)$、$A_2=(0,l,0)$、$A_3=(-l,0,0)$；$B_1=(l+l_1\cos\theta_1,0,l_1\sin\theta_1)$、$B_2=(0,l+l_1\cos\theta_2,l_1\sin\theta_2)$。

由 1.2.1 节可知：机构运动过程中，子平台 1′仅产生沿 z、y 轴的平移，即 $x_{C_2}=0$；则 C_1、C_2 的坐标分别为 $C_1=(l-l_6,y_{C_2}-l_6,z_{C_2}-l_4)$、$C_2=(0,y_{C_2},z_{C_2})$。

于是，由杆长约束 $B_1C_1=l_2$，$B_2C_2=l_3$，有位置约束方程

$$\begin{cases}(x_{C_1}-x_{B_1})^2+(y_{C_1}-y_{B_1})^2+(z_{C_1}-z_{B_1})^2=l_2^2\\ (x_{C_2}-x_{B_2})^2+(y_{C_2}-y_{B_2})^2+(z_{C_2}-z_{B_2})^2=l_3^2\end{cases} \tag{7}$$

简化式(7)得

$$ay_{C_2}+bz_{C_2}=c \tag{8}$$

其中　$a=2(y_{B_2}-2l_6)$　　$b=2(z_{B_2}-l_4-x_{B_1})$

$$c=l_2^2-l_3^2-(l-l_6-x_{B_1})^2-l_6^2-(l_4+x_{B_1})^2+y_{B_2}^2+z_{B_2}^2$$

若 $a=0$ 且 $b=0$，则

$$c=l_2^2-l_3^2-(l-l_6-x_{B_1})^2$$

但因 $l_2<l_3$，则 $c<0$，因此，a、b 不同时为零。于是

(1)当 $a=0$ 时

$$\begin{cases}z_{C_2}=c/b\\ y_{C_2}=\pm\sqrt{l_3^2-(z_{C_2}-z_{B_2})^2}+y_{B_2}\end{cases} \tag{9}$$

（2）当 $a\neq 0$ 时

$$\begin{cases} z_{C_2}=\dfrac{e\pm\sqrt{e^2-4dg}}{2d} \\ y_{C_2}=\dfrac{c-bz_{C_2}}{a} \end{cases} \tag{10}$$

其中 $d=a^2+b^2$ $\quad e=2(bc+z_{B_2}a^2-aby_{B_2})$

$g=-a^2(y_{B_2}^2+z_{B_2}^2-l_3^2)-c^2+2acy_{B_2}$

2.1.3 BKC_2的位置求解

当 C_1、C_2的坐标求出后，H 点坐标为 $(-l_6,y_{C_2}-l_6,z_{C_2})$；将动坐标系沿 v 轴平移 $\dfrac{l_8}{2}$ 的距离，使 p 点与 D_3点重合，得新的动坐标系 $p'u'v'w'$，则 p'点（D_3点）的坐标 $^O\boldsymbol{t}_{P'}$ 为

$$\begin{cases} x'=-l_6-l_7 \\ y'=y_{C_2}-l_6 \\ z'=z_{C_2} \end{cases} \tag{11}$$

而 C_3点的坐标为

$$C_3={}^O_{P'}\boldsymbol{R}{}^{P'}C_3+{}^O\boldsymbol{t}_{P'}=\begin{bmatrix} x' \\ l_8\cos\theta+y' \\ l_8\sin\theta+z' \end{bmatrix} \tag{12}$$

其中，C_3点在动坐标系 $p'u'v'w'$ 下的坐标为 $(0,l_8,0)$；而动坐标系 $p'u'v'w'$ 相对于静坐标系的旋转矩阵 ${}^O_{P'}\boldsymbol{R}$ 为

$${}^O_{P'}\boldsymbol{R}=R(f,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

因此，由 D_3、C_3点坐标，易求解 p 点的坐标 (x,y,z)。

进一步，由杆长约束 $B_3C_3=l_5$，得位置方程

$$(x_{B_3}-x_{C_3})^2+(y_{B_3}-y_{C_3})^2+(z_{B_3}-z_{C_3})^2=l_5^2 \tag{13}$$

将式（13）整理化简得

$$a_1\sin\theta+b_1\cos\theta+c_1=0 \tag{14}$$

其中 $a_1=2c_2l_8$ $\quad b_1=2b_2l_8$

$c_1=a_2+b_2+c_2+l_8^2-l_5^2$ $\quad a_2=(x_{B_3}-x)^2$

$b_2=(y_{B_3}-y)^2$ $\quad c_2=(z_{B_3}-z)^2$

解得
$$\theta=2\arctan\frac{a_1\pm\sqrt{a_1^2+b_1^2-c_1^2}}{b_1-c_1} \tag{15}$$

从而求得该机构动平台1的姿态角。

2.2 位置逆解求解

已知：动平台1上 p 的坐标 (x,y,z) 和姿态角 θ，求输入角 θ_1、θ_2、θ_3。

C_3、D_3、H 点的坐标分别为

$$C_3=\left(x,l_8\cos\frac{\theta}{2}+y,l_8\sin\frac{\theta}{2}+z\right)$$

$$D_3=(2x-x_{C_3},2y-y_{C_3},2z-z_{C_3})$$

$$H=(-l_6,y_{D_3},z_{D_3})$$

而 C_1、C_2点的坐标分别为

$$C_1=(l_6,y_H,z_H-l_4)\quad C_2=(0,y_H+l_6,z_H)$$

由杆6、7、8的3个杆长约束，可建立方程

$$(x_{C_1}-x_{B_1})^2+(y_{C_1}-y_{B_1})^2+(z_{C_1}-z_{B_1})^2=l_2^2 \tag{16}$$

$$(x_{C_2}-x_{B_2})^2+(y_{C_2}-y_{B_2})^2+(z_{C_2}-z_{B_2})^2=l_3^2 \tag{17}$$

$$(x_{C_3}-x_{B_3})^2+(y_{C_3}-y_{B_3})^2+(z_{C_3}-z_{B_3})^2=l_5^2 \tag{18}$$

由式（16）~（18）可得

$$\theta_i=2\arctan\frac{2l_1z_i\pm\sqrt{4z_i^2l_1^2-m_in_i}}{m_i}\quad (i=1,2,3) \tag{19}$$

其中 $z_1=z_{C_1}$ $\quad z_2=z_{C_2}$ $\quad z_3=z_{C_3}$

$m_1=l^2-2l_1l+l_1^2-l_2^2+y_{C_1}^2+z_{C_1}^2+x_{C_1}^2-2lx_{C_1}+2l_1x_{C_1}$

$n_1=l^2+2l_1l+l_1^2-l_2^2+y_{C_1}^2+z_{C_1}^2+x_{C_1}^2-2lx_{C_1}-2l_1x_{C_1}$

$m_2=l^2+l_1^2-2l_1l-l_3^2+x_{C_2}^2+y_{C_2}^2+z_{C_2}^2-2ly_{C_2}+2l_1y_{C_2}$

$n_2=l^2+l_1^2+2l_1l-l_3^2+x_{C_2}^2+y_{C_2}^2+z_{C_2}^2-2ly_{C_2}-2l_1y_{C_2}$

$m_3=l^2-l_5^2+2l_1l+l_1^2+2lx_{C_3}+2l_1x_{C_3}+x_{C_3}^2+y_{C_3}^2+z_{C_3}^2$

$n_3=l^2-l_5^2-2l_1l+l_1^2+2lx_{C_3}-2l_1x_{C_3}+x_{C_3}^2+y_{C_3}^2+z_{C_3}^2$

综上可知，当动平台 $p(x,y,z)$ 已知时，输入角 θ_1、θ_2、θ_3 各有两组解，即 C_1、C_2、C_3点的坐标各有两组解，故逆解数为8，因此，动平台有8种构型。

2.3 正逆解验算

参考ABB机器人I4R的尺寸参数，输入杆和平行四边形的尺寸参数与之相同[28]，即 $l_1=350$ mm、$l_2=750$ mm；其他结构参数分别为 $l=300$ mm、$l_3=l_5=800$ mm、$l_4=40$ mm、$l_6=150$ mm、$l_7=70$ mm、$l_8=390$ mm。

取3个输入角 θ_1、θ_2、θ_3 分别为36.08°、66.74°、161.86°。由Matlab计算得该机构的位置正解，如表1所示。

表1 位置正解数值

Tab.1 Numerical values of direct kinematics

序号	x/mm	y/mm	z/mm	θ/(°)
1*	−220	−528.8947	527.3025	−123.3253
2	−220	−20.0485	741.5416	15.2539

对应1组解的机构三维构型如图3所示。

取表1中的1组解的数据，代入逆解式（19），计算求得8组逆解数值，如表2所示。

由表2知，第1组逆解数值，与正解求解时3个设定的输入角一致，因此，正逆解公式推导正确。

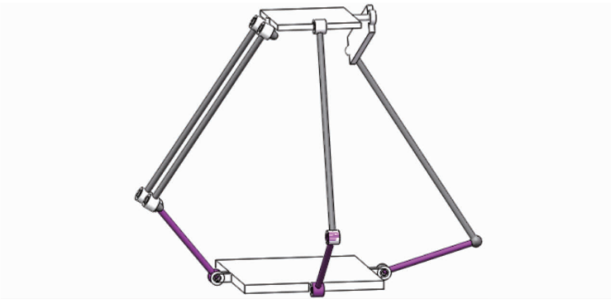

图 3　对应 1 组解的机构构型

Fig. 3　Configuration of solution 1

表 2　位置逆解数值

Tab. 2　Numerical values of inverse kinematic　（°）

序号	θ_1	θ_2	θ_3
1*	36.080 0	66.740 0	161.860 0
2	36.080 0	−167.466 2	161.860 0
3	36.080 0	−167.466 2	−6.626 6
4	36.080 0	66.740 0	−6.626 6
5	169.900 1	66.740 0	161.860 0
6	169.900 1	−167.466 2	161.860 0
7	169.900 1	−167.466 2	−6.626 6
8	169.900 1	66.740 0	−6.626 6

3　机构的工作空间和转动能力分析

3.1　工作空间分析

采用极坐标空间三位搜索法，基于机构的位置逆解，查找该机构工作空间内所有满足杆长约束、转角约束、干涉约束的点，即预先设定该机构工作空间的 z 向高度范围，通过改变搜索半径以及搜索角度，找到工作空间的边界。

设定搜索范围为：$0 \leqslant z \leqslant 1\,200$ mm，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$，$0 \leqslant \rho \leqslant 300$ mm；基于位置逆解式(19)，由 Matlab 软件编程，得到机构可达工作空间如图 4 所示。

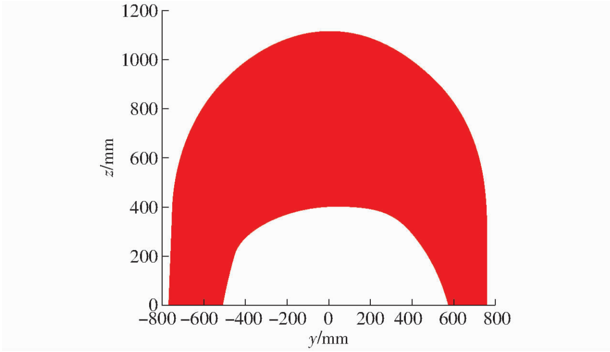

图 4　机构的工作空间

Fig. 4　Workspace of PM

由图 4 可知：

（1）机构的工作空间为平行于 yoz 面的一个“桥孔型”平面区域，且相对于 x 轴（T－T 直线）具有良好的对称性，这与实际结构关于 T－T 对称一致。

（2）当 $z \leqslant 400$ mm 时，该机构的工作空间不连续，存在空洞。

（3）当 $410\ \text{mm} \leqslant z \leqslant 1\,500$ mm 时，“桥孔型”平面型工作空间连续，为可达工作空间；在可达空间内会存在运动奇异现象，具体分析详见第 4 节。

3.2　转动能力分析

机构的动平台转角分析是评估并联机构转动角度能够到达的范围。同样，基于机构的位置逆解方程，采用极限边界搜索法，可以求出机构动平台基点在工作空间内任意位置时的转角范围。

由 1.2.1 节机构的 POC 分析可知，动平台 1 的运动输出为 oyz 平面内的两维平移 2T；当 $400\ \text{mm} \leqslant z \leqslant 1\,200$ mm 时，由 Matlab 计算出基点在 oyz 平面上各点时，则转角 θ 的运动范围如图 5 所示。

由图 5 可知，机构工作空间内各点的转角 θ 的范围较大，由图 5 可看出：

（1）动平台处于点 A(0,900)、B(−600,700)时，其转角范围分别为[−180°,180°]、[−120°,90°]。

（2）A 点分别处于红色、蓝色区域内，机构的转角能达到[−180°,180°]，约占总区域面积的 70%，表明机构的动平台 1 具有较大的转动能力。

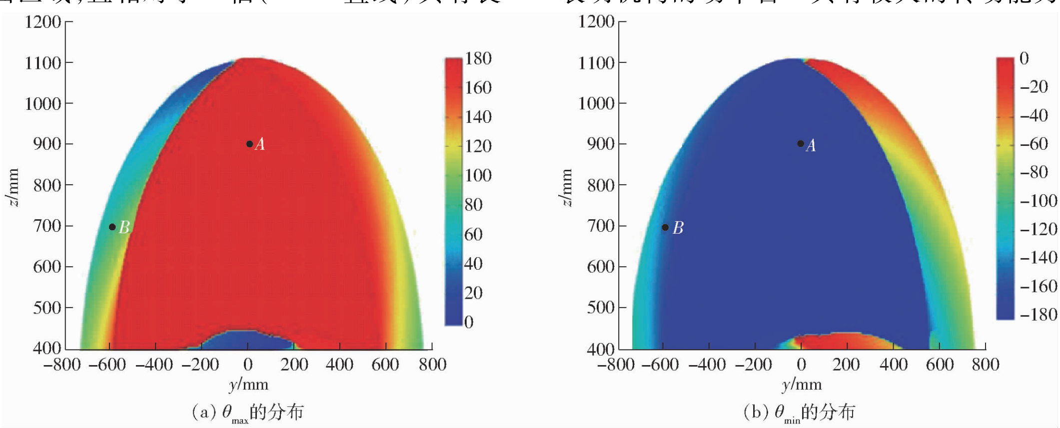

图 5　机构工作空间各点的转角范围

Fig. 5　Range of rotational angle of any point in workspace

4 机构的奇异性分析

4.1 机构奇异性原理

设机构动平台末端执行器的输出速度为 $\boldsymbol{V}=[\dot{y}\quad \dot{z}\quad \dot{\theta}]^{\mathrm{T}}$，3 个输入角速度为 $\boldsymbol{\omega}=[\dot{\theta}_1\quad \dot{\theta}_2\quad \dot{\theta}_3]^{\mathrm{T}}$，则支链Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ满足的3个位置约束方程(16)~(18)可统一表达为 $f(y,z,\theta)=0$，全微分后可表示为

$$\boldsymbol{J}_p\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}_q\boldsymbol{\omega} \tag{20}$$

其中

$$\boldsymbol{J}_p=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{J}_q=\begin{bmatrix} u_{11} & & \\ & u_{22} & \\ & & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11}=2(z_{C_1}-z_{B_1})l_1\cos\theta_1+2(x_{C_1}-x_{B_1})l_1\sin\theta_1$$

$$u_{22}=2(z_{B_2}-z_{C_2})l_1\cos\theta_2+2(y_{C_2}-y_{B_2})l_1\sin\theta_2$$

$$u_{33}=2(z_{B_3}-z_C)l_1\cos\theta_3+2(x_{C_3}-x_{B_3})l_1\sin\theta_3$$

$$v_{11}=2y_{C_1}\quad v_{21}=2(y_{C_2}-y_{B_2})\quad v_{31}=2y_{C_3}$$

$$v_{12}=2(z_{C_1}-z_{B_1})\quad v_{22}=2(z_{C_2}-z_{B_2})$$

$$v_{32}=2(z_{C_3}-z_{B_3})$$

$$v_{13}=l_8y_{C_1}\sin\theta\quad v_{23}=l_8(y_{C_2}-y_{B_2})\sin\theta$$

$$v_{33}=2l_8(x_{B_3}-x_{C_3})\cos\theta-l_8y_{C_3}\sin\theta$$

依据 $\boldsymbol{J}_p$、$\boldsymbol{J}_q$ 矩阵是否奇异，将机构的奇异位形分为如下3类：①当 $\det(\boldsymbol{J}_q)=0$ 时，机构发生输入奇异。②当 $\det(\boldsymbol{J}_p)=0$ 时，机构发生输出奇异。③当 $\det(\boldsymbol{J}_q)=\det(\boldsymbol{J}_p)=0$ 时，机构发生综合奇异。

4.2 奇异位形分析

4.2.1 输入奇异

机构发生输入奇异，意味着每条支链靠近驱动杆的两根杆处于折叠在一起或完全展开状态。这时，动平台的自由度数减少。此时，$\det(\boldsymbol{J}_q)=0$，该行列式方程解的集合 K 为

$$K=\{K_1\cup K_2\cup K_3\} \tag{21}$$

且3种情况分别为：①$K_1=\{(x_{C_1}-x_{B_1})\sin\theta_1+(z_{B_1}-z_{C_1})\cos\theta_1=0\}$，即 A_1、B_1、C_1 三点在 oxz 平面上的投影共线。②$K_2=\{(y_{C_2}-y_{B_2})\sin\theta_2+(z_{B_2}-z_{C_2})\cdot\cos\theta_2=0\}$，即 A_2、B_2、C_2 三点共线。③$K_3=\{(z_{B_3}-z_{C_3})\cos\theta_3+(x_{C_3}-x_{B_3})\sin\theta_3=0\}$，即 A_3、B_3、C_3 三点在 oxz 平面上的投影共线。

满足 K_1 的三维构型如图6所示。

4.2.2 输出奇异

机构发生输出奇异，意味着每条支链靠近动平台的杆处于折叠在一起或完全展开的状态，此时的动平台自由度数增多，即使锁住输入，动平台也可能存在自由度输出。设

$$(w_{i1},w_{i2},w_{i3})=\boldsymbol{e}_i\quad (i=1,2,3) \tag{22}$$

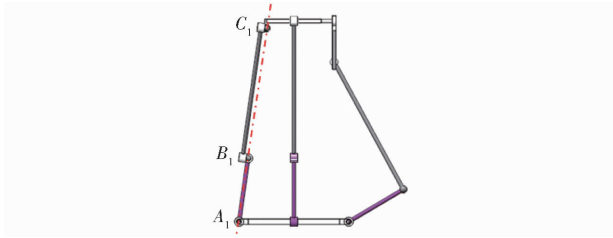

图6 输入奇异位形

Fig. 6 Structure of input singularity

$$(w_{k1},w_{k2},w_{k3},w_{k4})=\boldsymbol{E}_k\quad (k=1,2,3) \tag{23}$$

若 $\det(\boldsymbol{J}_p)=0$，则向量 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$、$\boldsymbol{e}_3$ 有如下2种情况：

(1)存在2个向量线性相关

①若 $\boldsymbol{e}_1=k\boldsymbol{e}_2$，取 $w_{12}=kw_{22}$，则

$$kw_{23}=kl_8(y_{C_2}-y_{B_2})\sin\theta\equiv w_{13}$$

即 $\boldsymbol{E}_1\equiv k\boldsymbol{E}_2$，其三维构型为向量 $\boldsymbol{l}_{B1C1}$、$\boldsymbol{l}_{B2C2}$ 在 oyz 平面上的投影相互平行，如图7所示。

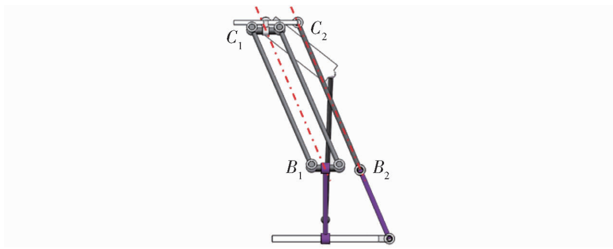

图7 输出奇异位形(例1)

Fig. 7 Structure of output singularity (example 1)

②若 $\boldsymbol{e}_2=k\boldsymbol{e}_3$，取 $w_{21}=kw_{31}$，则

$$kw_{33}=k[2l_8(x_{B_3}-x_{C_3})\cos\theta-l_8y_{C_3}\sin\theta]$$

若 $kw_{33}=w_{23}$，则 $l_8(x_{B_3}-x_{C_3})\cos\theta=l_8y_{C_3}\sin\theta$，当 θ 满足 $\dfrac{y_{B_3}-y_{C_3}}{x_{B_3}-x_{C_3}}=\dfrac{-1}{\tan\theta}$，即有 $\boldsymbol{E}_2\equiv k\boldsymbol{E}_3$。其三维构型为向量 $\boldsymbol{l}_{B2C2}$、$\boldsymbol{l}_{B3C3}$ 在 oyz 平面上的投影相互平行，如图8所示。

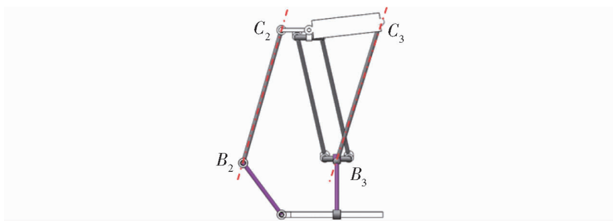

图8 输出奇异位形(例2)

Fig. 8 Structure of output singularity (example 2)

同理可得：$\boldsymbol{e}_1=k\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{E}_1\equiv k\boldsymbol{E}_3$。

(2)存在3个向量线性相关

若 $\boldsymbol{e}_1=k_1\boldsymbol{e}_2+k_2\boldsymbol{e}_3\,(k_1k_2\neq 0)$，即

$$w_{1i}=k_1w_{2i}+k_2w_{3i}\quad (i=1,2,3)$$

$$k_1w_{23}+k_2w_{33}=k_1l_8(y_{C_2}-y_{B_2})\sin\theta+$$
$$k_2[2l_8(x_{B_3}-x_{C_3})\cos\theta-l_8y_{C_3}\sin\theta]\neq w_{13}$$

同理，可得：任意3个向量($k_1k_2\neq 0$)均线性无

关则第 2 种情况都不成立。

4.2.3　综合奇异

此时，$\det(\boldsymbol{J}_q)=\det(\boldsymbol{J}_p)=0$，即输入奇异和输出奇异同时发生。在此位形下，动平台将失去原有的运动特性。因此，取满足输入奇异中的 K_1、K_2、K_3 的条件，代入输出奇异分析中，此时，输出奇异不成立，故该机构不存在综合奇异。

5　机构速度和加速度分析

5.1　速度公式推导

当机构非奇异时，$\boldsymbol{J}_p$ 可逆，可得

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\boldsymbol{\omega} \tag{24}$$

式(24)即为动平台原点的输出速度。

5.2　加速度公式推导

进一步，对式(24)求导得到

$$\boldsymbol{J}_p\dot{\boldsymbol{V}}-\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{\omega}}+\boldsymbol{J}=0 \tag{25}$$

其中　$\boldsymbol{J}=[j_1\quad j_2\quad j_3]^{\mathrm{T}}$

$$\begin{aligned}
j_1={}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_1}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial}{\partial \theta_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}\right)^2+\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_1}{\partial \theta_1}\frac{\mathrm{d}^2\theta_1}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_2={}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial \theta_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\right)^2+\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_2}{\partial \theta_2}\frac{\mathrm{d}^2\theta_2}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_3={}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\\
&\frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial \theta_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_3}{\partial z}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2+\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\partial}{\partial \theta_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta_3}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta_3}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta_3}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\\
&\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f_3}{\partial \theta_3}\right)\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f_3}{\partial \theta_3}\frac{\mathrm{d}^2\theta_3}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}$$

当机构不存在奇异性时，$\boldsymbol{J}_p$ 可逆，则

$$\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J}_q\dot{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{J}_p^{-1}\boldsymbol{J} \tag{26}$$

式(26)即为动平台原点的加速度公式。

5.3　速度和加速度算例验证

取驱动副输入角速度分别为 $\dot{\theta}_1=5(°)/\mathrm{s}$、$\dot{\theta}_2=5(°)/\mathrm{s}$、$\dot{\theta}_3=5(°)/\mathrm{s}$，则其角加速度均为 0。由 Matlab 软件编程计算，得到动平台的速度与加速度分别如表 3、4 所示。

表 3　动平台的速度分析

Tab. 3　Velocity of moving platform

序号	v_y/(mm·s^{-1})	v_z/(mm·s^{-1})	w/((°)·s^{-1})
1	−1.026	−0.732	−9.464
2*	−0.442	−0.402	−10.250
3	0.463	0.204	−11.503
4	1.546	0.783	−13.853
5	3.502	1.724	−18.108

表 4　动平台的加速度分析

Tab. 4　Acceleration of moving platform

序号	a_y/(mm·s^{-2})	a_z/(mm·s^{-2})	a_w/((°)·s^{-2})
1	0.514	0.363	−0.857
2**	0.642	0.455	−0.982
3	0.851	0.523	−1.532
4	1.379	0.628	−2.747
5	2.748	0.876	−6.979

将该并联机构的三维模型，通过 Solidworks 导入到 ADAMS 软件中进行仿真，得到动平台的速度与加速度曲线分别如图 9、10 所示。

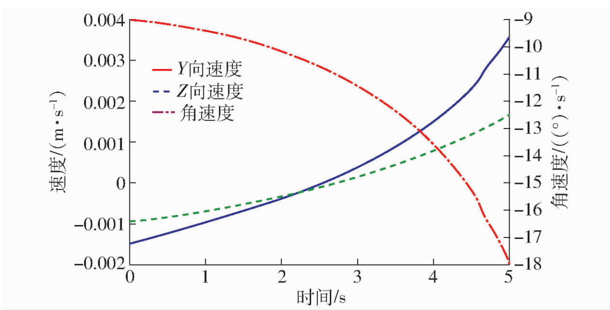

图 9　动平台的速度曲线

Fig. 9　Curves of velocity of moving platform

由表 4 及图 10 可知：

(1)由 Matlab 计算得到加速度(表 4，$t=2$ s 时，$a_y=0.642\ \mathrm{mm/s^2}$，$a_z=0.455\ \mathrm{mm/s^2}$，$a_w=-0.982(°)/\mathrm{s}^2$ 与

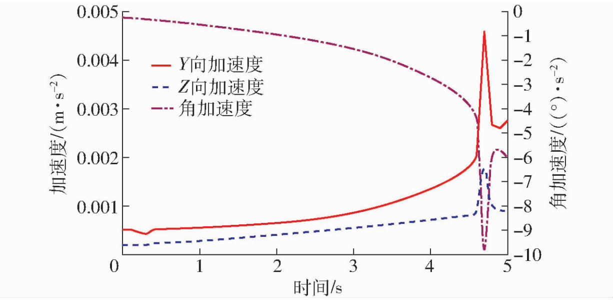

图 10 动平台的加速度曲线

Fig. 10 Curves of acceleration of moving platform

运用 ADAMS 仿真得到的加速度(图 10,$t=2$ s 时a_y = 0.64 mm/s^2,a_z = 0.45 mm/s^2,a_w = -0.98 (°)/s^2)完全一致,从而验证了推导的速度与加速度公式的正确性。

(2)机构动平台的速度、加速度曲线,变化较平稳、连续,表明机构的动力学性能较好。

6 结论

(1)提出了一种空间 2T1R 无寄生运动的非全对称并联机构($RP_a\parallel 3R$) - R + RSS;该机构耦合度为零且具有部分运动解耦性;给出了该机构位置正、反解的解析式。

(2)当 410 mm≤z≤1 500 mm 时,平行于 yoz 面的"桥孔型"平面型工作空间连续,为有效作业区域,且具有较好的对称性。

(3)机构平台转动能力分析表明:动平台转角 θ 的范围较大,能达到[-180°,180°]的区域约占总区域 70%,动平台具有较大的转动能力。

(4)机构速度与加速度仿真曲线表明,机构动平台加速度变化较平稳,具有较好的动力学性能。

参 考 文 献

1 黄真,孔令富,方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京:机械工业出版社,1996.

2 HUANG Z,FANG Y F. Kinematics characteristics analysis of 3 - DOF parallel actuated pyramid mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory,1996,31(8):1009 - 1018.

3 GROGORIOR D. Kinematics of a new spherical manipulator with three equal legs: the 3 - URC wrist[J]. Journal of Robotic Systems,2001,18(5):213 - 219.

4 于海波,赵铁石,李仕华. 空间 3 - SPS/S 对顶双锥机构的运动学分析[J]. 机械设计,2007,24(2):11 - 14.
YU Haibo,ZHAO Tieshi,LI Shihua. The kinematic analysis of top double cone mechanism of spatial 3 - SPS/S[J]. Journal of Mechanism Design,2007,24(2):11 - 14. (in Chinese)

5 LI Q,HERVE J M. 1T2R parallel mechanisms without parasitic motion[J]. Robotics,IEEE Transactions on,2010,26(3):401 - 410.

6 NEUMANN K E. Robot:US,4732525[P]. 1988 - 03 - 22.

7 OLAZAGOITIA J L,WYATT S. New PKM Tricept T9000 and its application to flexible manufacturing at aerospace industry[C]. SAE Paper 07ATC(- 94),2007.

8 NEUMANN K E. Parallel-kinematical machine:WO/2006/054935[P]. 2006 - 02 - 26.

9 ZOPPI M, ZLATANOV D, MOLFINO R. Kinematics analysis of the Exechon tripod[C]// Proceedings of the ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE, Quebec,Canada 2010:1 - 8.

10 HUANG T,LI M,ZHAO X M,et al. Conceptual design and dimensional synthesis for a 3 - DOF module of the TriVariant—a novel 5 - DOF reconfigurable hybrid robot[J]. IEEE Transaction on Robotics,2005,21(3):449 - 456.

11 王飞博,吴伟峰,陈祥,等. 基于运动/力传递特性的 1T2R 并联机构构型优选[J]. 机械工程学报,2014,50(23):20 - 28.
WANG Feibo, WU Weifeng, CHEN Xiang, et al. Optimal type selection of 1T2R parallel mechanisms based on motion/force transmissibility[J]. Journal of Mechanical Engineering,2014,50(23):20 - 28. (in Chinese)

12 汪满新,黄田. 1T2R 3自由度并联机构拓扑结构综合[J]. 机械工程学报,2015,51(17):1 - 7.
WANG Manxin,HUANG Tian. Type synthesis of 1T2R 3 - DOF parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015,51(17):1 - 7. (in Chinese)

13 HUNT K. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms[J]. Journal of Mechanical Design,1983,105(4):705 - 712.

14 JOSHI S A,TSAI L W. Jacobian analysis of limited-DOF parallel manipulators[J]. Journal of Mechanical Design,2002,124(2): 254 - 258.

15 KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3 - DOF PPR- equivalent parallel manipulators based on screw theory and the concept of virtual chain[J]. ASME Journal of Mechanical Design,2005,127: 1113 - 1121.

16 杨宁,马履中,艾永强,等. 两平移一转动并联机构型综合研究[J]. 机械设计与研究,2005,21(5): 29 - 32.
YANG Ning, MA Lüzhong, AI Yongqiang, et al. Study on structure synthesis of two translations and one ratation parallel mechanism[J]. Machine Design and Research,2005,21(5): 29 - 32. (in Chinese)

17 REFAAT S, HERVE J M, NAHAVANDI S. A symmetrical three-DOFs rotational-translational parallel-kinematics mechanisms based on lie group theory[J]. European Journal of Mechanics A/Solids,2006,25:550 - 558.

18 张彦斌,吴鑫,刘宏昭,等. 无奇异完全各向同性 2T1R 型并联机构的结构综合[J]. 中国机械工程,2008,19(3): 277 - 281.
ZHANG Yanbin,WU Xin,LIU Hongzhao,et al. Structural synthesis of singularity-free fully-isotropic parallel mechanisms with 2T1R-type[J]. China Mechanical Engineering,2008,19(3): 277 - 281. (in Chinese)

19 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社,2004.

20 杨廷力，刘安心，罗玉峰，等．机器人机构拓扑结构设计［M］．北京：科学出版社，2012.
21 YANG Tingli, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Topology design of robot mechanisms[M]. Springer, 2018.
22 SHEN Huiping, ZHU Xiaorong, ZHANG Dan, et al. The design methodology for less input-more output parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 104(10): 43－58.
23 沈惠平，邓嘉鸣，孟庆梅，等．少输入-多输出并联机构的设计方法及其应用［J］．机械工程学报，2018，54(1)：223－232.
SHEN Huiping, DENG Jiaming, MENG Qingmei, et al. Design methods and applications for the fewer input-more output parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(1): 223－232. (in Chinese)
24 邓嘉鸣，沈惠平，李菊，等．三维并联振动筛设计与实验［J/OL］．农业机械学报，2013，44(11)：342－346. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20131157&flag=1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2013.11.057.
DENG Jiaming, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Design and experiment research for three-dimensional parallel kinematics vibration sieve[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 342－346. (in Chinese)
25 李菊，曾氢菲，邓嘉鸣，等．多维并联振动筛筛分过程解析与筛面运动形式优选［J/OL］．农业机械学报，2016，47(11)：399－407. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? file_no=20161154&flag=1. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.11.054.
LI Ju, ZENG Qingfei, DENG Jiaming, et al. Screening process analysis for multidimensional parallel vibrating screen and optimization of screen surface movement[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(11): 399－407. (in Chinese)
26 沈惠平，杨梁杰，邓嘉鸣．用于肩关节康复训练的单输入三转动输出并联机构及其运动学设计［J］．中国机械工程，2015，26(22)：2983－2988.
SHEN Huiping, YANG Liangjie, DENG Jiaming. A one-input three-rotation output parallel mechanism used for shoulder rehabilitation and its kinematics design [J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(22): 2983－2988. (in Chinese)
27 邓嘉鸣，戴丽芳，沈惠平，等．并联式脚底按摩机构的设计及其研制［J］．机械设计，2016，33(2)：78－82.
DENG Jiaming, DAI Lifang, SHEN Huiping, et al. A novel parallel foot massage mechanism and its kinematics design[J]. Journal of Machine Design, 2016, 33(2): 78－82. (in Chinese)
28 刘平松，郭钢，朱海宁．4R 并联机器人工作空间分析［J］．机械制造与自动化，2012，41(4)：156－157.
LIU Pingsong, GUO Gang, ZHU Haining. Workspace analysis of the I4R parallel robot[J]. Machine Building & Automation, 2012, 41(4): 156－157. (in Chinese)

(上接第 407 页)

10 曹文熬．空间多环耦合机构数字化构型综合理论［D］．秦皇岛：燕山大学，2014.
CAO Wenao. Digital type synthesis theory of spatial multiloop coupling mechanism[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014. (in Chinese)
11 DORST L. 3D oriented projective geometry through versors of R(3,3)[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2016, 26(4): 1－36.
12 LI H, ZHANG L. Line geometry in terms of the null geometric algebra over R(3,3), and application to the inverse singularity analysis of generalized Stewart platforms[M]// LASENBY J. Guide to geometric algebra in practice. Springer London, 2011: 207－221.
13 CLIFFORD W. Elements of dynamic: an introduction to the study of motion and rest in solid and fluid bodies[M]. MacMillan and Company, 1878.
14 HESTENES D. New foundations for classical mechanics[M]. Springer Science and Business Media, 2012.
15 SOMMER G. Applications of geometric algebra in robot vision[J]. Computer Algebra and Geometric Algebra with Applications, 2005: 258－277.
16 SOMMER G. Geometric computing with Clifford algebras: the oretical foundations and applications in computer vision and robotics [M]. Springer Science and Business Media, 2013.
17 HILDENBRAND D. Geometric computing in computer graphics using conformal geometric algebra[J]. Computers and Graphics, 2005, 29(5): 795－803.
18 ARISTIDOU A. Inverse kinematics solutions using conformal geometric algebra[M]// LASENBY J. Guide to geometric algebra in practice. Springer London, 2011: 47－62.
19 DORAN C, LASENBY A. Geometric algebra for physicists[M]. Cambridge University Press, 2003.
20 DU J, GOLDMAN R, MANN S. Modeling 3D geometry in the Clifford algebra R(4,4)[J]. Advances in Applied Clifford Algebras, 2017: 1－24.
21 黄真，赵永生，赵铁石．高等空间机构学［M］．北京：高等教育出版社，2006.
22 FONTIJNE D. Gaigen 2: a geometric algebra implementation generator[C]// Proceedings of the 5th International Conference on Generative Programming and Component Engineering. ACM, 2006: 141－150.
23 ZLATANOV D, BONEV I, GOSSELIN C. Constraint singularities as C-space singularities[J]. Advances in Robot Kinematics, 2002: 183－192.