doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2017.10.052

基于张量理论的数控机床误差补偿模型

褚　宁[1]　张为民[1,2]

(1.同济大学机械与能源工程学院，上海 201804；2.同济大学中德学院，上海 201804)

摘要：为了进一步提高数控机床多体运动学误差模型的精度，提出了基于张量理论的机床误差补偿模型。首先面向数控系统列表插值补偿方式，提出了应用张量理论设定基础阶、扩展阶和误差阶来建立机床误差张量模型。然后，提出了采用设定机床信息、建立张量模型及设定检测参数 3 个流程实施误差补偿，并通过多元回归分析提出了采用 4 阶多项式拟合机床空间误差。最后，以某重型车铣复合机床实验为例，提出了分轴步进对角线法下的张量误差模型，采用球杆仪进行了圆度误差检测实验，结果表明该方法能够有效地提高机床精度，比多体运动学误差模型的补偿效果更优。

关键词：误差补偿；张量理论；分轴步进对角线法；车铣复合机床

中图分类号：TH161^{+}.2；TH161^{+}.5　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000-1298(2017)10-0408-09

Error Compensation Model of CNC Machine-tool Based on Tensor Theory

CHU Ning[1]　ZHANG Weimin[1,2]

(1. *School of Mechanical Engineering*, *Tongji University*, *Shanghai* 201804, *China*

2. *Chinese German School for Postgraduate Studies*, *Tongji University*, *Shanghai* 201804, *China*)

Abstract: In order to improve the geometric accuracy of high-end CNC machine tools, a machine tool error compensation model based on tensor theory was proposed. Firstly, the error tensor model was established by setting the basic order, the extended order and the error order, which was applicable for error compensation table. Secondly, the error compensation was carried out in three processes, which were setting machine tool information, establishing tensor model and setting detection parameter. Referring to the ISO 230 - 2 standard, the modeling flow and detection parameters of the error tensor model were presented. Using multiple regression analysis, the linear fitting and residual errors were 2.5 μm, while the four polynomial fit residuals were 1 μm. Finally, taking CNC turn-milling machine experiment as an example, the error tensor model by step-diagonal measurement was proposed. The analysis of experimental data showed that the pitch error by three order fitting can improve the fitting precision by 59.4% ~92.5%, the sum of squared residuals was less than 0.000 03; the straightness error needed five order fitting for nonlinear characteristics. The ballbar experiment of roundness error showed that roundness error was increased by 12.2% ~27.7%, while only compensated the pitch error. For example, the compensation using error tensor model can be reduced by 22.3% of roundness error at *XY* plane by three order fitting, which was optimized by 26.4% ~95.5% compared with that of the linear interpolation. The experiment showed that the error compensation should be paid more attention to the straightness error. The method of error tensor model can effectively improve the accuracy of machine tools for both pitch error and straightness error.

Key words: error compensation; tensor theory; step-diagonal measurement method; CNC turn-milling machine

收稿日期：2017-06-08　修回日期：2017-07-28

基金项目：国家科技重大专项(2012ZX04005-031)

作者简介：褚宁(1984—)，男，博士生，主要从事机床误差建模、误差检测与误差优化研究，E-mail：chuning0126@163.com

通信作者：张为民(1965—)，男，教授，博士生导师，主要从事金属切削机床与加工工艺和制造系统等研究，E-mail：iamt@tongji.edu.cn

引言

数控机床的精度模型和误差补偿模型是数控机床研究的热点之一，国内外学者对误差建模方法进行了广泛而深入的研究。DONMEZ 等[1]于 1986 年提出建立包含几何误差和热误差的机床综合误差模型。CHANA 等[2]采用多体运动学理论建立包含受力变形误差的三轴机床误差模型，LIN 等[3]以及 TUTUNEA-FATAN 等[4]将多体运动学扩展到五轴数控机床的应用。SCHWENKE 等[5]在 CIRP 上系统地回顾了误差数值补偿的基础以及测量几何误差的可用方法。刘又午等[6]将多体理论运用到数控机床的全误差建模。文献[7－8]通过热误差分析结合几何误差建立综合误差模型及实施误差补偿，并扩展到五轴机床的应用[9]。粟时平等[10]提出 12 线法的误差辨识方法。李小力[11]对数控机床综合误差的建模及补偿研究进行了系统论述。郭然等[12]采用切比雪夫多项式分解几何误差。此外，还有许多学者分别采用粒子群算法[13]、线性插值算法[14]、人工神经网络[15]、流变理论[16]、微分构造[17]和最优权系数[18]等建模方法来对机床误差进行建模。多体运动学误差模型[19－20]由于良好的通用性和有效性，仍是最为常用的机床误差建模方式，随着现代数控机床各部件的制造精度越来越高，螺距误差已不是最大的误差项，如运动部件的直线度误差及变形误差都成为重要的误差来源，以重型龙门机床为例，悬垂误差可达 400 μm/2 000 mm[21]，基于多体运动学建模多种误差来源在公式表达和计算上形式过于复杂，已逐渐不适应误差补偿的需要。

本文在多体运动学机床模型的基础上，参考数控系统列表插值补偿方式，提出应用张量理论设定基础阶、扩展阶和误差阶来建立机床误差张量模型。然后基于激光干涉仪制定机床误差张量模型检测与辨识方法。最后以重型车铣复合数控机床为实例，验证数控机床应用张量理论建模与补偿的可行性。

1　基于张量理论的数控机床误差模型

1.1　数控系统的误差补偿模型

数控机床误差补偿功能按照参数可以划分为机床定义、机床轴设定和插值补偿表 3 部分。其中插值补偿表采用插值列表形式来实现具体的误差补偿，是数控系统误差补偿功能底层实施的核心。现有机床误差模型多面向拟合精度或运动匹配，很少关注数控系统插值补偿表，以多体运动学误差模型为例，主要和机床结构定义相关，在机床轴设定和插值补偿表上都只有部分相关，如图 1 所示。

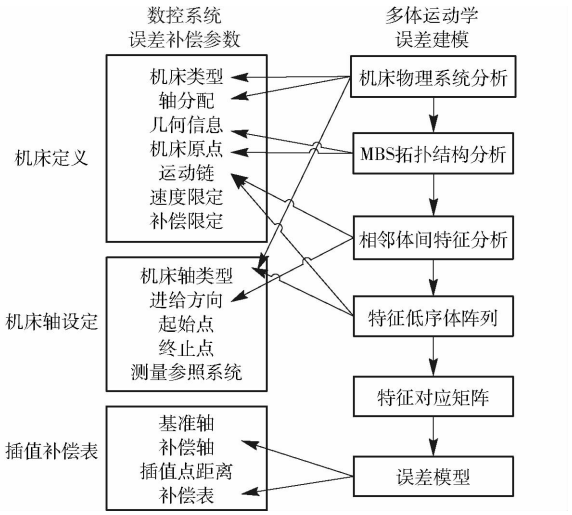

图 1　多体运动学误差模型对比数控系统误差补偿功能

Fig. 1　Multi-body kinematics model of machine-tool and CNC system error compensation function

由图 1 可知，多体运动学误差模型能较好地匹配数控机床误差补偿功能的机床定义，但在机床轴设定和插值补偿表功能方面有所欠缺，无法全面地指导误差补偿实施。

1.2　面向数控系统的误差张量建模

张量理论是数学的一个分支学科，是力学和物理学一个有力的数学工具，一般理解上，张量实为标量、向量、线性算子的母概念，1 阶张量即为向量，2 阶张量即为矩阵，3 阶张量就是三维数组[22]。

以多体运动学误差模型为基础，综合机床信息和机床插值点误差两部分，建立数控机床空间误差的误差张量模型。数控机床误差张量模型的建模流程包括设定机床信息、建立张量模型及设定检测参数 3 部分，具体建模流程如图 2 所示。

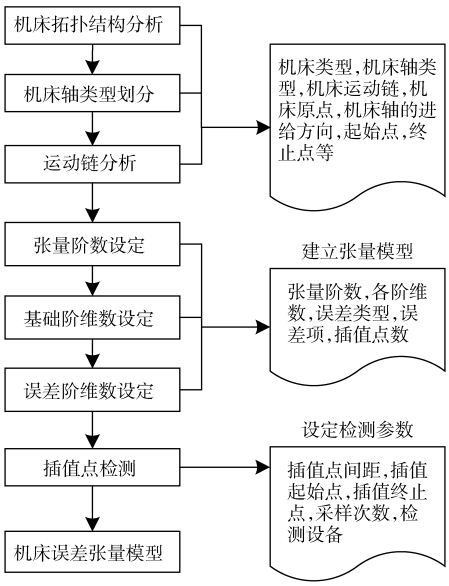

图 2　数控机床误差张量模型建模流程图

Fig. 2　NC machine-tool error tensor model diagram

由图2可知,建立张量模型主要包括设定张量阶数和设定张量维数,因此数控机床误差张量模型最重要的参数为张量的阶数、维数以及检测参数,可将张量误差模型定义为基础阶、扩展阶和误差阶3部分。基础阶为定义误差来源项,前3阶为 X、Y、Z 轴,维数即为直线轴的插值点数,如果是五轴机床则包含2个扩展张量阶;扩展阶为定义变形误差,主要包括负载变形、切削力变形、热变形等,维数为变形的状态数;误差阶为机床TCP点的误差,误差阶维数为误差项数量,如 X、Y 和 Z 轴向定位误差、阶数及维数设定如表1所示。

表1 数控机床误差张量模型维数及阶数定义

Tab.1 Dimension and order definition of error tensor model

阶数	张量阶定义	张量维定义	备注
1	X 轴	X 轴插值点数	基础张量阶
2	Y 轴	Y 轴插值点数	
3	Z 轴	Z 轴插值点数	
4	A 轴	A 轴插值点数	五轴机床扩展张量阶
5	B 轴	B 轴插值点数	
6	C 轴	C 轴插值点数	
7	负载变形	负载变化状态/次数	变形误差阶
8	切削力变形	切削力变化状态/次数	
9	热变形	温度变化状态	
10	其他变形误差	随工况而定	
11	综合误差	误差项数	空间误差、正反向误差等

实际应用中数控机床的误差张量模型不限于表1所列的11阶,一般根据机床结构和误差检测设备条件进行简化,以AC五轴机床误差张量模型为例,全误差张量模型为十阶,即 $\boldsymbol{M}\in\mathbf{R}^{I_iI_jI_kI_oI_pI_qI_uI_vI_w}$,其中 i、j、k 为基础阶的维数,表征 X、Y、Z 三轴的插补点数,o、p 为五轴旋转阶的维数,表征 A、C 轴插补点数,q、u、v 为变形误差阶的维数,表征负载变形、切削力变形和热变形的变化状态,w 为误差阶的维数,表征机床的定位误差、正反向误差等。令各轴插补点数为 n,在不考虑变形误差,仅计算三轴向空间误差情况下,可建立简化的误差张量模型 $\boldsymbol{M}_0\in\mathbf{R}^{I_nI_nI_nI_nI_nI_3}$,如仅计算直线轴则可以建立简化直线轴误差张量模型 $\boldsymbol{M}_L\in\mathbf{R}^{I_nI_nI_nI_3}$。

2 面向误差张量模型的检测流程及检测关键参数

2.1 机床误差张量模型的检测流程

数控机床的误差检测是误差建模与补偿的重要环节,对机床的几何误差检测已有国家标准[23]、国际标准[24]等,但几何误差检测标准的目的在于机床定标,不适于指导精确的误差补偿,无法直接用于误差补偿。激光干涉仪是检测机床误差精度最高的设备之一,本文基于ISO 230检测标准,采用激光干涉仪来建立面向数控系统误差补偿功能的机床误差张量模型,步骤及待测参数如下:

(1)设定误差张量模型阶数:按照图2的建模方法初步建立机床误差综合张量模型,关键参数为运动链和误差张量模型阶数等。

(2)设定误差张量模型维数及插值点间距:根据直线轴误差分布规律和机床运动行程,设定各直线轴的插值点间距和测量点数,关键参数为误差张量模型维数和插值点间距等。

(3)设定采样路径:根据误差张量模型维数和直线轴误差分布规律设定激光干涉仪检测的定位路径,关键参数为采样路径和采样次数。

(4)检测定位误差:参考ISO 230-2的标准检验循环,根据采样路径、测量点数、插值点间距和采样次数,实施定位误差检测。

(5)检测直线度误差:同定位误差检测方法流程相似,但需采用不同的反射镜组来分别检测直线度和垂直度误差。

(6)数据处理:基于ISO 230标准,通过计算正向定位误差,反向定位误差,正向直线度误差,反向直线度误差,正向垂直度误差和反向垂直度误差等关键参数,建立机床误差综合张量模型。

2.2 检测关键参数的实验

理论上误差采样数据量越多张量模型精度越高,但过多采样数据量会使得检测过程过于繁复以致无法进行,因此需要通过分析机床插值点误差的分布特点对插值点间距和采样次数进行合理优化。

插值点的主要测量误差项为插值点的正向平均位置偏差,反向平均位置偏差,插值点的平均位置偏差,插值点的反向误差,单向定位标准不确定度和单向重复定位精度等,本文以某型车铣复合机床为实验对象,如图3所示,为简化模型,仅计算直线轴的综合误差,直线轴的全工作空间为:$x\in[-540,-80]$ mm,$y\in[-500,-40]$ mm,$z\in[-420,-20]$ mm。

实验采用ML10型激光干涉仪,按照ISO 230-2的检测标准,每隔20 mm采样一个点,根据标准检测循环实行检测,重复实验5次,实验结果如表2所示,篇幅所限,仅列出部分 X 轴定位误差的测量记录。

插值点间距的设定和相邻插值点的 X、Y、Z 三向定位误差有关。一般认为机床误差为连续函数,

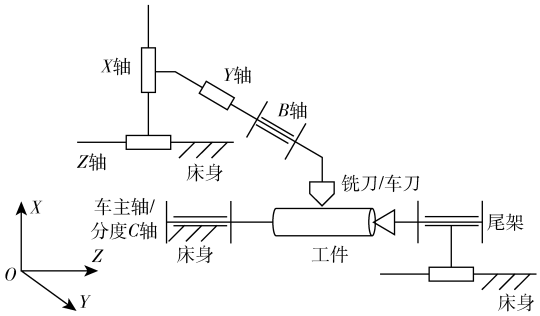

图 3　车铣复合机床结构简图

Fig. 3　Topological structure of mill-turn machine

表 2　X 轴定位误差测量值

Tab. 2　X axis positioning error measurement results

μm

测序	测点	误差	测序	测点	误差	测序	测点	误差
1	1	-0.9	…	…	…	9	1	0
1	2	0.1	…	…	…	9	2	1.1
1	3	1.5	…	…	…	9	3	2.4
⋮	⋮	⋮	…	…	…	⋮	⋮	⋮
1	26	10.5	…	…	…	9	26	10.9
1	27	11.7	…	…	…	9	27	12.0
2	27	11.3	…	…	…	10	27	11.3
2	26	10.0	…	…	…	10	26	9.9
⋮	⋮	⋮	…	…	…	⋮	⋮	⋮
2	3	1.1	…	…	…	10	3	0.1
2	2	-0.4	…	…	…	10	2	-1.2
2	1	-1.3	…	…	…	10	1	-2.2

需要将误差检测值通过函数拟合来定义定位误差函数。在数控系统内通常采用多项式拟合来计算误差值，本文也采用多项式拟合来定义误差函数，取 10 次测量的均值为误差补偿值，以 X 轴定位误差为例，为了计算方便，统一以正向检测误差为准。

由图 4、图 5 可知常用的 1 阶拟合和残差为 -4.20 ~ 5.28 μm，超过 ±4.0 μm 的出厂标准；采用 2 ~ 5 阶多项式拟合的残差绝对值的最大值分别为 4.93、4.64、3.37、2.64 μm，采用 4 阶多项式拟合即可达到标准；采用 2 ~ 5 阶多项式拟合的残差绝对值

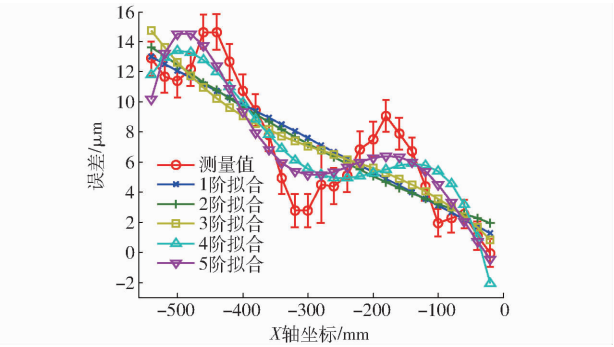

图 4　X 轴定位误差测量均值的多项式拟合分析

Fig. 4　Polynomial fitting analysis of measuring mean of X-axis positioning error

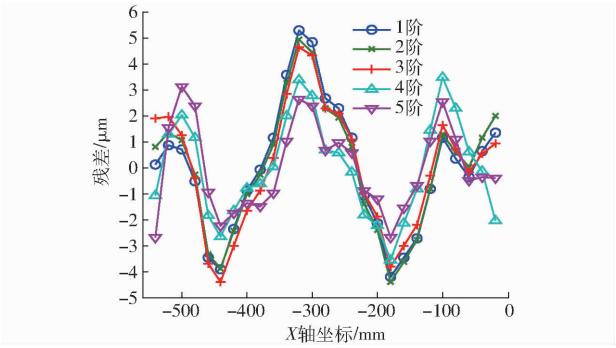

图 5　多项式拟合的残差分析

Fig. 5　Residual analysis of polynomial fitting

的均值分别为 1.98、1.96、1.60、1.47 μm，采用 5 阶多项式拟合计算时间增加近 50%，但精度提高不足 10%，综合分析采用 4 阶多项式拟合已经可以较好地对误差进行拟合。

插值点间距的设定由误差函数和误差补偿精度和数控系统功能决定，一般数控机床插值点之间的误差为线性插值。以 X 轴为例，先通过三阶多项式拟合实际检测误差建立 X 轴的 X、Y、Z 三向误差函数 $P_x(x)$、$P_y(x)$ 和 $P_z(x)$，即

$$\begin{cases} P_x(x) \approx a_{0x}(x) + a_{1x}(x)x + a_{2x}(x)x^2 + a_{3x}(x)x^3 \\ P_y(x) \approx a_{0y}(x) + a_{1y}(x)x + a_{2y}(x)x^2 + a_{3y}(x)x^3 \\ P_z(x) \approx a_{0z}(x) + a_{1z}(x)x + a_{2z}(x)x^2 + a_{3z}(x)x^3 \end{cases} \tag{1}$$

式中　$a_{mn}(x)$——X 轴 n 向误差拟合函数 m 阶项

由式(1)及插值点间距 l_x 和插补段数 i 可得数控系统直线插补所需的插补函数

$$\begin{cases} {}_iN_x(x) = \dfrac{P_x(il_x) - P_x((i-1)l_x)}{l_x}x + \\ \qquad P_x(il_x)(1-i) + iP_x(il_x) \\ {}_iN_y(x) = \dfrac{P_y(il_x) - P_y((i-1)l_x)}{l_x}x + \\ \qquad P_y(il_x)(1-i) + iP_y(il_x) \\ {}_iN_z(x) = \dfrac{P_z(il_x) - P_z((i-1)l_x)}{l_x}x + \\ \qquad P_z(il_x)(1-i) + iP_z(il_x) \end{cases} \tag{2}$$

式中　${}_iN_m(x)$——X 轴第 i 段 m 向误差插值函数

计算所得的 X 轴误差可以换算为 X 轴的三向几何误差 $E_x(x)$、$E_y(x)$ 和 $E_z(x)$，即

$$\begin{cases} E_x(x) = \max({}_iN_x(x) - P_x(x)) \\ E_y(x) = \max({}_iN_y(x) - P_y(x)) \\ E_z(x) = \max({}_iN_z(x) - P_z(x)) \end{cases} \tag{3}$$

插值点间距越小，误差补偿效果越好，但检测时间变长且数控系统负担更重。取最大的插值点间距的条件为

$$\begin{cases} l_x \leqslant \dfrac{L_x}{N_{x\max}-1} \\ E_m(x,P_n(x)) \leqslant E_{px} \\ R_m(x,P_n(x)) \leqslant R_{px} \end{cases} \tag{4}$$

式中 L_x——X 轴插值全长

$N_{x\max}$——X 轴最大插值点数

$E_m(x,P_n(x))$——X 轴第 n 点的 m 向定位误差

$R_m(x,P_n(x))$——X 轴第 n 点的 m 向重复定位误差

E_{px}——机床 X 轴定位精度要求

R_{px}——机床 X 轴重复定位精度要求

3 车铣复合机床实验验证

3.1 误差检测

实验采用沈阳机床的某型五轴车铣复合加工中心[25],其主要特点在于 X、Y、Z 构成三维空间,C 轴为带分度的车主轴,B 轴为绕 Y 轴旋转的轴,形成刀具与主轴回转中心的夹角,可以换装铣刀和车刀,总体结构如图 6 所示。

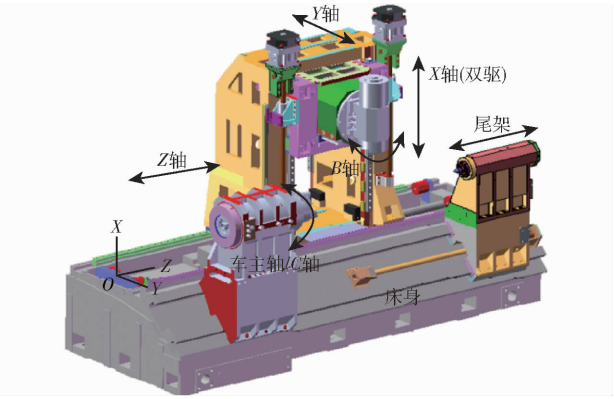

图 6 五轴车铣中心结构示意图

Fig. 6 Structure diagram of five-axis mill-turn machine

实验以直线轴为例,误差检测实验选用光动公司的 MCV-5005 套件,检测过程采用分轴步进对角线检测技术[26],特点是所测得的位移误差是平行于运动轴线方向的误差和垂直于运动轴线方向的误差的矢量和。实验装置及光路设定如图 7 所示。

设定分轴步进对角线检测的采样路径为 PPP 和 NNN,然后 PNP 和 NPN,然后 NNP 和 PPN,最后 NPP 和 PNN,重复检测 3 次,测量区间分别为 $x=[-400,-10]$ mm,$y=[-500,-20]$ mm,$z=[100,1\,000]$ mm,插值点每个轴为 31,每条对角线检测 3 遍取平均值,如图 8 所示。

3.2 基于分轴步进对角线法的张量误差模型

数控机床误差综合张量模型包括正向定位误差,反向定位误差,正向直线度误差,反向直线度误差,正向垂直度误差和反向垂直度误差。通过检测

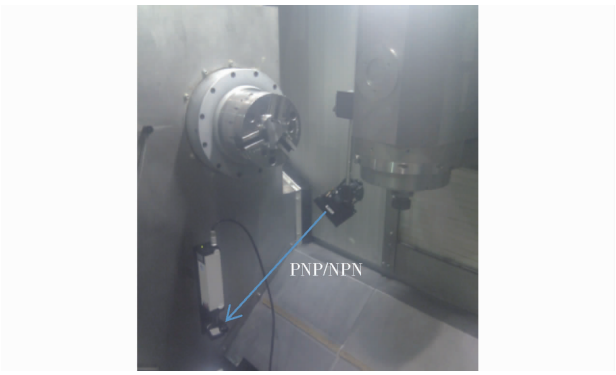

图 7 分轴步进对角线法(PNP/NPN 路径)

Fig. 7 Step-diagonal measurement method (PNP/NPN)

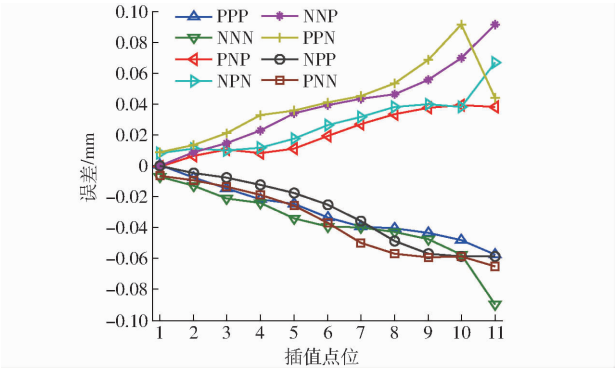

图 8 分轴步进对角线检测结果

Fig. 8 Test results of step-diagonal measurement method

8 条对角线后统一计算可得,令 PPP 路径上对角线矢量的 X、Y、Z 分量为 a、b、c,任意测量点 i 上的正向定位误差计算公式为

$$\begin{cases} E_x(x_i) = \dfrac{\varepsilon l(x_i)_{\mathrm{PPP}} + \varepsilon l(x_i)_{\mathrm{NPP}}}{2a} \\ E_y(x_i) = \dfrac{\varepsilon l(x_i)_{\mathrm{PPP}} - \varepsilon l(x_i)_{\mathrm{PNP}}}{2b} \\ E_z(x_i) = \dfrac{\varepsilon l(x_i)_{\mathrm{PPP}} - \varepsilon l(x_i)_{\mathrm{PPN}}}{2c} \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} E_x(y_i) = \dfrac{\varepsilon l(y_i)_{\mathrm{PPP}} - \varepsilon l(y_i)_{\mathrm{NPP}}}{2a} \\ E_y(y_i) = \dfrac{\varepsilon l(y_i)_{\mathrm{PPP}} + \varepsilon l(y_i)_{\mathrm{NPN}}}{2b} \\ E_z(y_i) = \dfrac{\varepsilon l(y_i)_{\mathrm{PPP}} - \varepsilon l(y_i)_{\mathrm{PPN}}}{2c} \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} E_x(z_i) = \dfrac{\varepsilon l(z_i)_{\mathrm{PPP}} - \varepsilon l(z_i)_{\mathrm{NPP}}}{2a} \\ E_y(z_i) = \dfrac{\varepsilon l(z_i)_{\mathrm{PPP}} - \varepsilon l(z_i)_{\mathrm{PNP}}}{2b} \\ E_z(z_i) = \dfrac{\varepsilon l(z_i)_{\mathrm{PPP}} + \varepsilon l(z_i)_{\mathrm{NNP}}}{2c} \end{cases} \tag{7}$$

式中 $E_m(n_i)$——n 轴第 i 点的 m 向正向误差

$\varepsilon l(n_i)_k$——n 轴第 i 点的 k 路径上的激光长度

普通机床以正向误差加反向间隙补偿即可,如数控系统包含独立的正反向误差补偿程序

(SINUMERIK 840D)，则任意测量点 i 上的反向定位误差计算公式为

$$\begin{cases} E'_x(x_i) = \dfrac{\varepsilon l(x_i)_{\mathrm{NNN}} + \varepsilon l(x_i)_{\mathrm{PNN}}}{-2a} \\ E'_y(x_i) = \dfrac{\varepsilon l(x_i)_{\mathrm{NNN}} - \varepsilon l(x_i)_{\mathrm{NPN}}}{-2b} \\ E'_z(x_i) = \dfrac{\varepsilon l(x_i)_{\mathrm{NNN}} - \varepsilon l(x_i)_{\mathrm{NNP}}}{-2c} \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} E'_x(y_i) = \dfrac{\varepsilon l(y_i)_{\mathrm{NNN}} - \varepsilon l(y_i)_{\mathrm{PNN}}}{-2a} \\ E'_y(y_i) = \dfrac{\varepsilon l(y_i)_{\mathrm{NNN}} + \varepsilon l(y_i)_{\mathrm{PNP}}}{-2b} \\ E'_z(y_i) = \dfrac{\varepsilon l(y_i)_{\mathrm{NNN}} - \varepsilon l(y_i)_{\mathrm{NNP}}}{-2c} \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} E'_x(z_i) = \dfrac{\varepsilon l(z_i)_{\mathrm{NNN}} - \varepsilon l(z_i)_{\mathrm{PNN}}}{-2a} \\ E'_y(z_i) = \dfrac{\varepsilon l(z_i)_{\mathrm{NNN}} - \varepsilon l(z_i)_{\mathrm{NPN}}}{-2b} \\ E'_z(z_i) = \dfrac{\varepsilon l(z_i)_{\mathrm{NNN}} + \varepsilon l(z_i)_{\mathrm{PPN}}}{-2c} \end{cases} \tag{10}$$

式中　$E'_m(n_i)$——n 轴第 i 点的 m 向反向误差

将测量数据代入式(5)～(10)可得直线轴的误差简化张量模型，即建立 $\boldsymbol{E}_L \in \mathbf{R}^{I_{31}\times I_{31}\times I_{31}\times I_6}$。以 X 轴为例，X 轴的误差简化张量模型为 $\boldsymbol{E}(x) = \boldsymbol{E}_{:11:}$，参照插值补偿如表 3 所示。

表 3　X 轴误差简化张量模型

Tab. 3　Error tensor model of X axis　　mm

张量维数	正向定位误差	反向定位误差	正向 Y 向直线度	反向 Y 向直线度	正向 Z 向直线度	反向 Z 向直线度
1	0	0.001 0	0	0	0	0
2	−0.001 8	0.000 7	−0.001 0	−0.000 2	0.000 5	0.015 2
3	−0.001 3	0.000 9	−0.000 7	0.001	−0.001 1	0.014 8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
29	−0.047 5	−0.000 5	0.000 5	0.001 5	−0.002 2	0.001 2
30	−0.051 8	−0.000 3	0.000 9	0.000 4	−0.000 3	0.000 6
31	−0.055 3	0	0	0	0	0

840D 型数控系统的误差补偿函数为高阶多项式，理论上选用较高的多项式拟合精度较高，但会造成数控系统负载过重，鲁棒性较差，需要对多项式的阶数进行优化。以 $\boldsymbol{E}_L$ 所得的误差简化张量模型为测试数据，分析多项式拟合的拟合效果，以残差平方和 E_{sse} 为对比标准，E_{sse} 定义为

$$E_{sse}(x) = \sum_{i=1}^{n} (E_i(x) - \hat{E}(x))^2 \tag{11}$$

考虑到数控系统的应用实际，对比采用 1～6 阶多项式拟合的拟合效果，分为螺距误差和直线度误差，结果如图 9 所示。

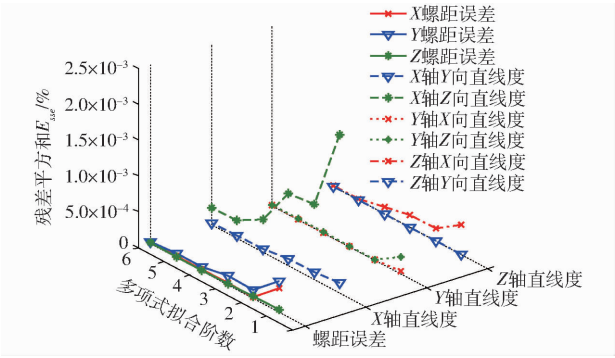

图 9　多项式拟合效果

Fig. 9　Polynomial fitting effect

图 9 显示了多项式拟合机床误差的拟合效果，螺距误差的多项式拟合效果较好，3 阶以上的残差平方和均小于 0.000 03，而直线度的误差非线性的特征更为明显，如 X 轴 Z 向直线度需要 5 阶以上的拟合才达到 0.000 3，说明误差补偿应当从只关注螺距误差和垂直度误差转换为更关注于直线度误差。

以线性插补的补偿效果为基准，高阶多项式的拟合效果如图 10 所示。

图 10 显示了多项式拟合阶数对机床误差拟合效果的影响，螺距误差的多项式拟合效果较好，采用 3 阶即可提高拟合精度 59.4%～92.5%，5 阶可提高 64.0%～93.2%；各轴直线度的误差各不相同，X 轴 3 阶提高 26.4%～54.3%，而 Y 轴可提高 75.5%～95.5%，Z 轴为 37.4%～57.3%。普通数控系统可选用 3 阶多项式拟合即可达到满意的补偿效果，高档数控机床则可选择更高阶的补偿函数，进一步提高误差补偿的效果。

3.3　基于机床误差张量模型的误差补偿

令插值点间距 $l_x = 20$ mm，以 3 阶多项式拟合正向误差为例，建立 X、Y 和 Z 轴的三向误差函数

$$\begin{cases} P_x(x) = 5.25\times10^{-4} - 7.33\times10^{-6}x - \\ \qquad 4.68\times10^{-8}x^2 - 1.31\times10^{-12}x^3 \\ P_y(x) = -2.36\times10^{-3} - 1.62\times10^{-6}x + \\ \qquad 3.15\times10^{-8}x^2 - 2.85\times10^{-11}x^3 \\ P_z(x) = -2.33\times10^{-2} + 1.61\times10^{-4}x - \\ \qquad 2.15\times10^{-7}x^2 + 7.23\times10^{-11}x^3 \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} P_x(y) = 5.22\times10^{-2} + 1.53\times10^{-4}y + \\ \qquad 1.81\times10^{-7}y^2 + 1.73\times10^{-10}y^3 \\ P_y(y) = -2.60\times10^{-2} + 3.67\times10^{-5}y + \\ \qquad 2.02\times10^{-7}y^2 + 3.94\times10^{-11}y^3 \\ P_z(y) = 1.17\times10^{-3} + 6.13\times10^{-5}y + \\ \qquad 7.29\times10^{-8}y^2 - 9.76\times10^{-11}y^3 \end{cases} \tag{13}$$

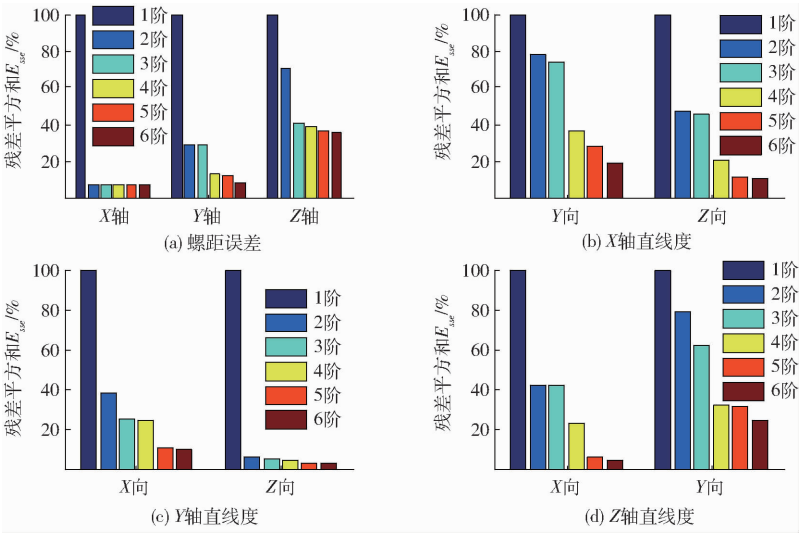

图 10 多项式阶数拟合效果对比

Fig. 10 Comparisons of polynomial fitting effect by polynomial order

$$\begin{cases} P_x(z) = 7.52\times10^{-2} + 1.19\times10^{-4}z - \\ \quad 1.81\times10^{-7}z^2 + 8.54\times10^{-11}z^3 \\ P_y(z) = 3.07\times10^{-3} + 3.33\times10^{-6}z - \\ \quad 6.21\times10^{-8}z^2 - 1.24\times10^{-10}z^3 \\ P_z(z) = -2.55\times10^{-2} - 1.24\times10^{-4}z - \\ \quad 3.51\times10^{-7}z^2 - 4.89\times10^{-10}z^3 \end{cases} \tag{14}$$

该型号车铣复合机床采用 SINUMERIK 840D 型数控系统，通过扩展 840D 型数控系统 SAG 悬垂误差补偿功能[27]来实现数控机床误差张量补偿。在 840D 型系统内 SAG 悬垂误差补偿属插值补偿，提供基准轴和补偿轴选择，如定义基准轴 $AN_CEC_INPUT_AXIS[6] = (X)，定义补偿轴 $AN_CEC_OUTPUT_AXIS[6] = (Y)，则代表第 6 项 SAG 误差补偿为相对于 X 轴 Y 方向上的误差，将悬垂误差以直线度误差代替，则可实现 X 轴 Y 向直线度误差的补偿，其他各轴以此类推。

以球杆仪的圆度误差检测实验验证机床张量误差模型，即将误差张量模型转换为表 3 所列误差表，通过西门子 840D 的 SAG 补偿功能实现误差补偿，以 XY 轴插补运动做圆度误差检测为例，结果如图 11 所示。

分别检测 XY 平面、XZ 平面和 YZ 平面的圆度误差，为避免动态误差影响，优化动态参数，并将进给率设定为 1 000 mm/min，检测 3 次取均值，检测结果如表 4 所示。

XY、XZ 和 YZ 平面的原始圆度误差在 7.4 ~ 10.3 之间，表明机床原始精度较高，在单独补偿各轴螺距误差后，3 个平面的圆度误差增加 12.2% ~ 27.7%，表明空间误差的补偿是三轴误差的综合，单独的螺距误差无法优化多轴的联动精度。通过采用多项式拟合的机床误差张量模型实施补偿后，XY 平面圆度误差降低 22.3%，XZ 平面圆度误差降低 18.9%，XZ 平面圆度误差增加 7.2%，由于 XY 为主要加工面，检测数据较多，考虑到误差张量模型的补偿为综合优化，对 XY 平面的优化效果较好。另一方面，实际误差的误差函数的拟合阶数越高，误差补偿效果越好。圆度误差的检测表明，在较高的机床原始精度下单纯补偿激光干涉仪测量的定位误差已被证明不仅对圆度误差没有改善反而会增加圆度误差，但采用张量模型实施误差补偿确实提高了机床的插补精度。

4 结论

(1)提出了数控机床的误差张量模型建模方法。通过设定机床信息、建立张量模型及设定检测参数 3 个流程建立数控机床误差张量模型。张量误差模型可以定义为基础阶、扩展阶和误差阶 3 部分。

(2)建立了机床误差张量模型的误差检测流程和主要检测参数。通过设定误差张量模型阶数、设定误差张量模型维数及插值点间距、设定采样路径、检测定位误差、检测直线度误差和数据处理 6 个步骤建立机床空间误差张量模型。由实验数据分析可得，定位误差采用低阶多项式拟合的精度不足，采用 5 阶多项式拟合计算时间增加近 50%，但精度提高不足 10%，采用 4 阶多项式拟合可以较好地对误差进行拟合。

(3)实验验证误差张量模型实施误差补偿的有效性。建立基于分轴步进对角线法的机床误差张量

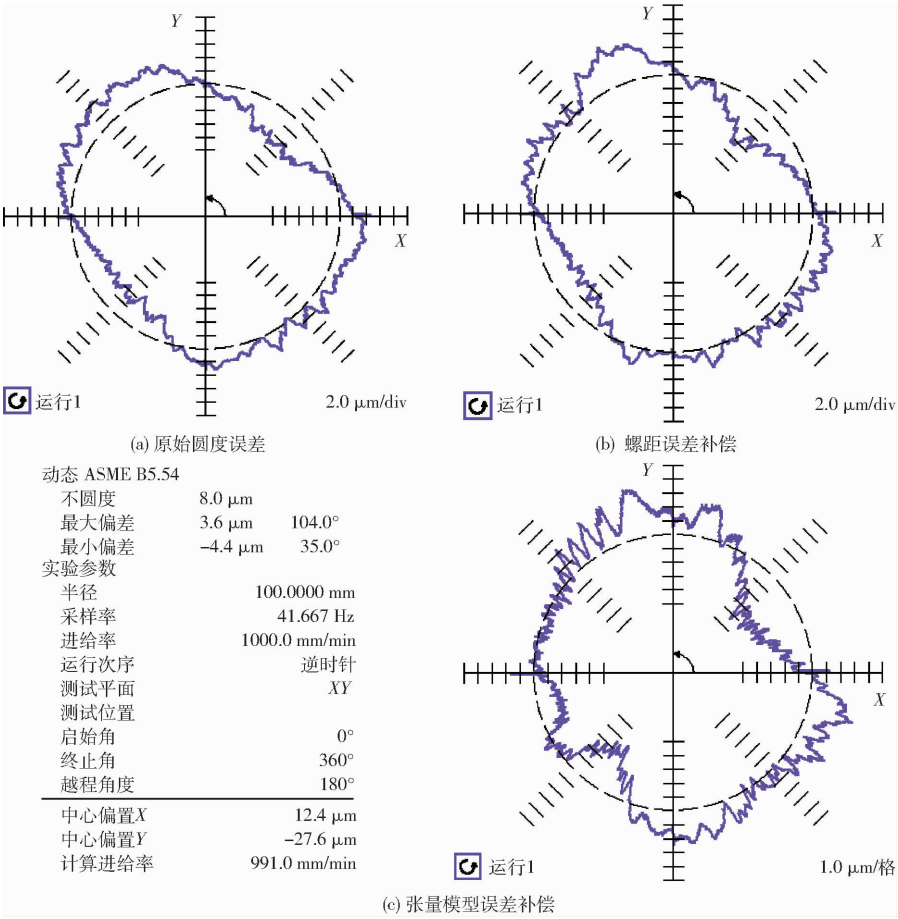

图 11　误差补偿效果(圆度误差检测)

Fig. 11　Compensation effects by roundness error test

表 4　球杆仪圆度误差

Tab. 4　Roundness error by ballbar test

序号	补偿方式		圆度误差/μm			备注
	螺距	直线度	*XY*	*XZ*	*YZ*	
1	无	无	10.3	7.4	8.3	原始误差
2	线性	无	13.1	8.3	10.6	常用方法
3	线性	线性	12.6	10.7	9.7	简化模型
4	线性	3 阶	11.2	8.9	9.8	
5	3 阶	3 阶	8.0	7.5	8.9	张量模型
6	3 阶	5 阶	8.0	6.0	8.9	

模型。螺距误差的多项式拟合效果较好，3 阶以上的残差平方和小于 0.000 03，而直线度的误差需要 5 阶以上的拟合。采用球杆仪进行圆度误差检测实验，在机床原始精度较高(圆度误差 10 μm)条件下，通过误差张量模型仍能进一步提高 20% 左右，而通用的螺距误差补偿则会降低多轴联动的精度 12.2% ~27.7%。

参　考　文　献

1　DONMEZ M A, BLOMQUIST D S, HOCKEN R J, et al. A general methodology for machine tool accuracy enhancement by error compensation[J]. Precision Engineering, 1986, 8(4): 187 – 196.

2　CHANA R, MANUKID P. Geometric and force errors compensation in a 3-axis CNC milling machine[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2004, 44(12 – 13):1283 – 1291.

3　LIN Y, SHEN Y. Modelling of five-axis machine tool metrology models using the matrix summation approach [J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2003, 21(4): 243 – 248.

4　TUTUNEA-FATAN O R, FENG H Y. Configuration analysis of five-axis machine tools using a generic kinematic model [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2004, 44(11): 1235 – 1243.

5　SCHWENKE H, KNAPP W, HAITJEMA H, et al. Geometric error measurement and compensation of machines—an update[J]. CIRP Annals-Manufacturing Technology, 2008, 57(2):660 – 675.

6　刘又午，章青，赵小松，等. 数控机床全误差模型和误差补偿技术的研究[J]. 制造技术与机床，2003, 7(4): 46 – 50.
LIU Youwu, ZHANG Qing, ZHAO Xiaosong, et al. Research on total error model and error compensation of CNC machine tool[J]. Manufacturing Technology & Machine Tool, 2003, 7(4): 46 – 50. (in Chinese)

7　沈金华，李永祥，鲁志政，等. 数控车床几何和热误差综合实时补偿方法应用[J]. 四川大学学报：工程科学版，2008，40(1): 163 – 166.
SHEN Jinhua, LI Yongxiang, LU Zhizheng, et al. A real-time compensation method for the geometric and thermal error on CNC turning machine[J]. Journal of Sichuan University: Engineering Science Edition, 2008, 40(1): 163 – 166. (in Chinese)

8　王维，杨建国，姚晓栋，等. 数控机床几何误差与热误差综合建模及其实时补偿[J]. 机械工程学报，2012，48(7): 165 – 170, 179.

WANG Wei, YANG Jianguo, YAO Xiaodong, et al. Synthesis modeling and real-time compensation of geometric error and thermal error for CNC machine tools[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2012, 48(7): 165 – 170, 179. (in Chinese)

9 王秀山,杨建国,闫嘉钰. 基于多体系统理论的五轴机床综合误差建模技术[J]. 上海交通大学学报, 2008, 42(5): 761 – 764, 769.
WANG Xiushan, YANG Jianguo, YAN Jiayu. Synthesis error modeling of five-axis machine tools based on multi-body system theory [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2008, 42(5): 761 – 764, 769. (in Chinese)

10 粟时平,李圣怡,王贵林. 基于空间误差模型的加工中心几何误差辨识方法[J]. 机械工程学报, 2002, 38(7): 121 – 125.
SU Shiping, LI Shengyi, WANG Guilin. Identification method for errors of machining center based on volumetric error model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(7): 121 – 125. (in Chinese)

11 李小力. 数控机床综合几何误差的建模及补偿研究[D]. 武汉:华中科技大学, 2006.
LI Xiaoli. Modelling and compensating for comprehensive geometric error of NC machine tools[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006. (in Chinese)

12 郭然,付国强,孙磊,等. 基于切比雪夫多项式的数控机床几何误差参数化建模[J/OL]. 农业机械学报, 2015, 46(5): 336 – 343. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20150547&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2015.05.047.
GUO Ran, FU Guoqiang, SUN Lei, et al. Chebyshev polynomials based parametric modeling of geometric errors for CNC machine tools[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(5): 336 – 343. (in Chinese)

13 张成新,高峰,李艳,等. 基于分段拟合的机床大尺寸工作台热误差补偿模型[J]. 机械工程学报, 2015, 51(3): 146 – 152.
ZHANG Chengxin, GAO Feng, LI Yan, et al. Model of thermal error compensation of large size worktable for machine tools based on piece wise fitting [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(3): 146 – 152. (in Chinese)

14 王维,杨建国. 基于插值算法的数控机床复合误差补偿技术[J]. 上海交通大学学报, 2014, 48(1): 12 – 15.
WANG Wei, YANG Jianguo. Compound error compensation technique for CNC machine tools based on interpolation method[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2014, 48(1): 12 – 15. (in Chinese)

15 阳红,方辉,刘立新,等. 基于热误差神经网络预测模型的机床重点热刚度辨识方法[J]. 机械工程学报, 2011, 47(11): 117 – 124.
YANG Hong, FANG Hui, LIU Lixin, et al. Method of key thermal stiffness identification on a machine tool based on the thermal error neural network prediction model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11): 117 – 124. (in Chinese)

16 TANG H, DUAN J, LAN S, et al. A new geometric error modeling approach for multi-axis system based on stream of variation theory[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2015, 92: 41 – 51.

17 齐继宝,杨伟民. 基于微分变化构造法的数控机床几何误差补偿方法[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(9): 398 – 405. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20160953&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2016.09.053.
QI Jibao, YANG Weimin. Differential change construction based geometric error compensation for machine tools [J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(9): 398 – 405. (in Chinese)

18 阳红,向胜华,刘立新,等. 基于最优权系数组合建模的数控机床热误差在线补偿[J/OL]. 农业机械学报, 2012, 43(5): 216 – 221. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20120537&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2012.05.037.
YANG Hong, XIANG Shenghua, LIU Lixin, et al. Online compensation for CNC machine thermal error based on optimal weights-based combined modeling[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(5): 216 – 221. (in Chinese)

19 邢元,张连洪,何柏岩,等. 基于多体理论的数控机床精度逆设计方法[J/OL]. 农业机械学报, 2014, 45(3): 282 – 287. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx? flag = 1&file_no = 20140346&journal_id = jcsam. DOI: 10.6041/j.issn.1000-1298.2014.03.046.
XING Yuan, ZHANG Lianhong, HE Baiyan, et al. Precision reverse design of numerical controlled (NC) machine on the basis of multibody theory[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(3): 282 – 287. (in Chinese)

20 MCKEOWN P A, LOXHAM J. Some aspects of the design of high precision measuring machines[J]. Annals of CIRP, 1973, 22(1): 139.

21 WU Fenghe, QIAO Lijun, YAO Lingpan. Deformation compensation of ram components of super-heavy-duty CNC floor type boring and milling machine[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2012(25): 269 – 275.

22 KOLDA T G, BADER B W. Tensor decompositions and applications[J]. SIAM Review, 2009, 51(3): 455 – 500.

23 GB/T 17421.2—2016 机床检验通则 第 2 部分:数控轴线的定位精度和重复定位精度的确定[S].
GB/T 17421.2—2016 Test code for machine tools—Part 2: determination of accuracy and repeatability of positioning numerically controlled axes[S]. (in Chinese)

24 ISO 230 – 2 – 2014 Test code for machine tools—Part 2: determination of accuracy and repeatability of positioning numerically controlled axes[S].

25 李德珍,李宪凯. 五轴车铣复合加工技术的现状与发展趋势[J]. 航空制造技术, 2009(12): 47 – 50.
LI Dezhen, LI Xiankai. Current status and development trend of five-axis turning/milling complex maching technology[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2009(12): 47 – 50. (in Chinese)

26 WANG C. A definition of volumetric error[J]. Manufacturing Engineering, 2005, 134(1): 16 – 17.

27 SINUMERIK 840D sl Manufacturer/Service[DB/OL]. http://www.automation.siemens.com.