

二十面体机构构型设计与分析

刘婧芳^{1,2} 曹亚柯^{1,2} 丁华锋^{1,2}

(1.北京工业大学机械工程与应用电子技术学院,北京 100124; 2.北京工业大学先进制造技术北京市重点实验室,北京 100124)

摘要: 基于具有对称性和对偶性的正十二面体,设计了一种以三、四、五边形为耦合节点的二十面体单移动可展机构。首先,在正十二面体的十个面上添加一种顶点,通过增加顶点种类以增加耦合节点种类,从而得到具有三、四、五边形结构的节点构件。根据构件连接情况设计四类替换构件,将替换构件用转动副(R副)依次连接,构造耦合机构基础模型。其次,基于螺旋理论应用分流法计算其自由度。最后,进行主动输入选取分析及构建耦合机构的三维模型,设置方向相反的驱动条件分别进行仿真运动,应用 Matlab 得到动平台和节点构件的位置变化曲线,仿真结果与理论分析结果相统一,表明提出的机构具有伸缩运动特性。

关键词: 多环耦合机构; 二十面体; 自由度; 运动分析

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2017)10-0370-10

Configuration Design and Analysis of Novel Icosahedron Mechanism

LIU Jingfang^{1,2} CAO Yake^{1,2} DING Huafeng^{1,2}

(1. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China
2. Beijing Key Laboratory of Advanced Manufacturing Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

Abstract: It has remained a great challenge to develop coupled mechanisms in kinematics. Polyhedrons with various appearance and symmetric configuration attract more and more attentions and provide possible basic modes for the design of coupled mechanisms. Based on the symmetry and duality of the regular dodecahedron, a movable icosahedron mechanism with single mobility was designed, where the coupling nodes were composed of triangles, quadrilaterals and pentagons. Firstly, in order to design the coupling nodes with triangles, quadrilaterals and pentagons, each vertex was added to the ten faces of the icosahedron and the node variety was increased by adding types of vertexes. The common edge of the original regular pentagon was replaced by four edges. Four edges made up a quadrilateral. The common edge of the original regular pentagon became a diagonal of the quadrilateral. Then four kinds of replacement components were designed according to the connection of each component, and the replacement components sequentially were connected by rotational joints to construct a basic model of the coupled mechanism. Secondly, mobility of the mechanism model was calculated by the shunting method based on screw theory. The coupled mechanism was divided into five identical branches according to the shunting tags. As long as the constraints of one branch were determined based on screw theory, the constraints of all branches to the moving platform was obtained. Then mobility of the coupled mechanism was obtained, which showed the coupled mechanism had a translational freedom. Finally, active input selection was analyzed and the three-dimensional model of the coupled mechanism was established. Two opposite driving conditions were set up in the simulation, and position curves of the moving platform and the node components were got by Matlab. The simulation results were consistent with theoretical results. It further showed that the proposed mechanism had the characteristics of stretching motion.

Key words: coupled mechanism; icosahedron; freedom; motion analysis

引言

随着机构向复杂化、空间化、多环化发展,近年

来多环耦合机构日益受到人们的重视。在结构上,与传统的并联机构比较而言,多环耦合机构定平台和动平台之间的连接不是若干个独立支链,而是将

并联机构与串联机构进行有效的结合,使其呈网状耦合结构。在功能上,多环耦合机构作为串联与并联机构的综合机型,具有特定的应用场合,因此在机构学中吸引了很多学者的关注。李晔卓等^[1]用转动副将平行四边形缩放单元和双三角锥单元连接,设计了一种可折叠双三角锥滚动耦合机构。李菊等^[2]设计了多喷枪协同式喷涂五轴机器人。此外,耦合机构常常作为核心机构应用于大型工业机械装备^[3-6]中,以适应其重大承载能力及结构复杂性。

由于正多面体结构具有紧凑结构和高度对称性等优点,可为多面体耦合机构设计提供基础。HOBERMAN 设计的魔术花球内部结构是典型的六面体耦合机构,通过转动副将三角形构件、四边形构件巧妙地组合起来,吸引了研究者应用多种方法对其结构原理和运动特性进行分析^[7-12]。俄罗斯宇航局的 AKIRA 等^[13]研制的四面体单元构架式耦合天线,应用于“自然号”、“联盟号”飞船以及“和平号”空间站上。文献^[14-15]设计了几种结构多面体耦合机构,这些耦合机构通过改变形状满足功能需求,并且已经应用于航空航天。由此可见这类机构具有良好的伸展和收缩性能,在运输过程可以收缩到极限位置,工作时刻又可以伸展到特定位置实现特有功能。

本文提出一种二十面体单移动机构。以正十二面体的高度对称性和对偶性的空间结构特点为基础,设计一种同时由三、四、五边形为耦合节点的二十面体基础结构。采用分流法^[16-17]求出其自由度,并对其运动输出特性进行理论分析。进行主动输入选取并构建耦合机构三维仿真模型,设置方向相反的驱动条件,对机构的动平台和节点构件的运动特性进行仿真以验证机构的正确性和合理性。

1 二十面体对称耦合机构模型构建

正十二面体具有结构简单,对称性强等优点,且正二十面体和正十二面体互为对偶,二十面体机构和正十二面体机构在性能上有一定的互补。但二十面体机构更复杂,其理论上的设计难度更大但设计的耦合节点种类更多,在装配上更难。因此选择正十二面体构件构建二十面体耦合机构。如图 1 所示,一个正十二面体由 12 个正五边形、20 个顶点和 30 条棱边组成,满足多面体欧拉定理^[18]。

1.1 建立耦合框架结构

依照正十二面体空间结构,建立相应的耦合结构基础框架,再通过确定框架中的顶点和棱边类型确定各构件类型,从而得到二十面体对称耦合机构。

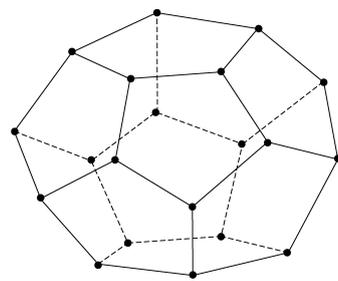
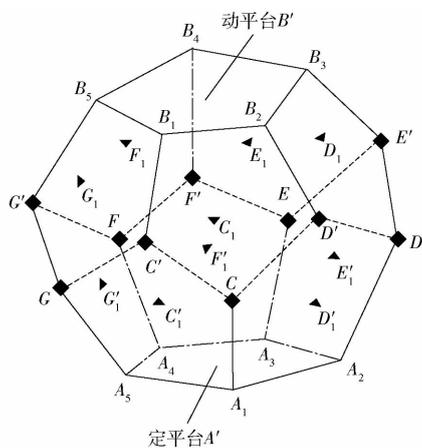


图 1 正十二面体空间结构

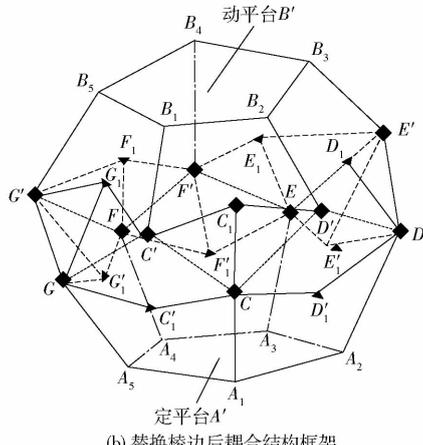
Fig.1 Structure of regular dodecahedron

(1) 标记组成框架的所有几何要素

考虑到整个耦合结构框架的对称性和稳定性,将相对平行的 2 个正五边形面 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 和 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ 简化,分别等效为汇聚了 5 条棱边顶点,记为 A' 和 B' ,定义为等效顶点。与等效顶点 A' 直接连接的顶点分别记为 C', D', E', F', G' ,与等效顶点 B' 直接连接的顶点分别记为 C, D, E, F, G ,与正五边形面 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 直接连接的 5 个面的中心分别记为 $C'_1, D'_1, E'_1, F'_1, G'_1$,与正五边形面 $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$ 直接连接的 5 个面的中心分别记为 C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 ,如图 2a 所示。



(a) 替换棱边前耦合结构框架



(b) 替换棱边后耦合结构框架

图 2 耦合结构框架

Fig.2 Frameworks of coupled structure

(2) 选择定平台和动平台构件

因为耦合框架结构具有对称性,选择互相平行

的且汇聚情况相同等效顶点 A' 和 B' 为耦合机构模型的定平台和动平台构件。

(3) 确定耦合节点构件及支链组成

为了方便区分顶点种类,如图 2a 所示,定义由正五边形(除正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 和 $B_1B_2B_3B_4B_5$) 棱边相交的点为一类顶点,用黑色四边形标示;正五边形(除了正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 和 $B_1B_2B_3B_4B_5$) 的中心点为二类顶点,用黑色三角形标示。如图 2b 所示,将同一个正五边形上的一个二类顶点分别与 3 个一类顶点连接,这样在相邻正五边形上的一类顶点之间的公共棱边替换成以其为对角线的四边形的 4 条棱边,这 4 条棱边都是一类顶点和二类顶点之间的连线。一类顶点汇聚了 4 条棱边,二类顶点汇聚了 3 条棱边,每 2 个相邻正五边形面上的一类顶点和二类顶点的连线交错相接且呈空间对称分布,由于每 2 个相邻正五边形因为有一个公共四边形,使各自所在的运动链间存在耦合关系,所以将一类顶点定义为一类耦合顶点,均作为一类耦合节点构件,将二类顶点定义为二类耦合顶点,均作为二类耦合节点构件。如图 2b 所示,将能够确定连接在定平台 A' 和动平台 B' 之间的由 20 个耦合节点构件通过连接构件顺次连接的各条耦合支链。

因此,构建耦合框架结构如图 2b 所示,含有 20 个面、40 条棱边、22 个顶点,仍然满足欧拉公式^[18]。

1.2 设计几何元素的替代构件

基于构建的耦合框架结构中构件的几何连接关系,采用 n 边形构件替代 n 条棱边汇聚的顶点的原则,设计 4 种替代构件。

为了满足构件之间相对运动的灵活性和简单性,本文耦合机构模型的运动副的构型设计只考虑 R 副。设计的 4 种类型的替代构件分别为:

(1) 等效顶点 A' 和 B' 处连接了 5 条对称且相等的棱边,将其设计成图 3a 所示的正五边形替代构件。

(2) 一类耦合顶点连接了 4 条棱边,图 3b 所示的四边形构件代替。

(3) 二类耦合顶点连接了 3 条棱边,图 3c 所示的三角形构件代替。

(4) 耦合框架中的每条棱边用图 3d 所示的一个二副杆替代,其两端 R 副轴线相互平行。

1.3 构建耦合机构模型

依照耦合结构框架的空间布局,所有的替代构件用 R 副顺次连接,构建耦合机构模型。

按照图 2b 所示耦合框架结构,选择 2 个正五边形,10 个正三角形,10 个四边形,40 个连杆替代构件依次连接,得到图 4 所示的二十面体耦合机构模

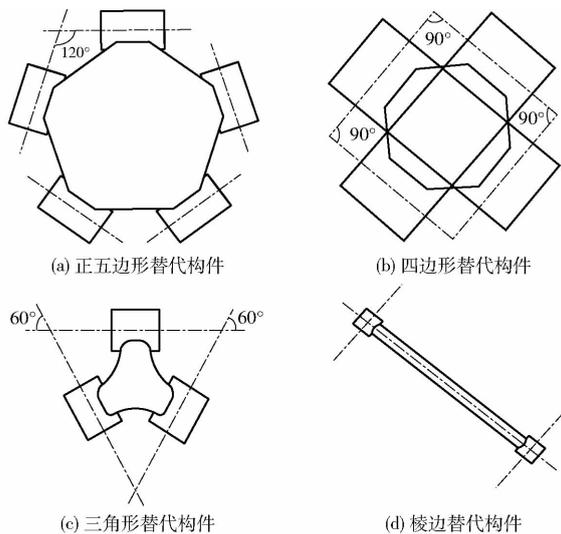


图 3 替换构件

Fig. 3 Replaced components

型。其中,构件 M_1 和 D_1 分别替代等效顶点 A' 和 B' ,构件 L_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) 分别替代一类顶点,构件 S_j ($j = 1, 2, \dots, 10$) 分别替代二类顶点。然后再将构件 L_i ($i = 1, 2, \dots, 10$) 和构件 S_j ($j = 1, 2, \dots, 10$),动平台及定平台通过 40 条相同的棱边连接,从而形成由三、四、五边形组成的二十面体单移动多环耦合机构(图 4)。

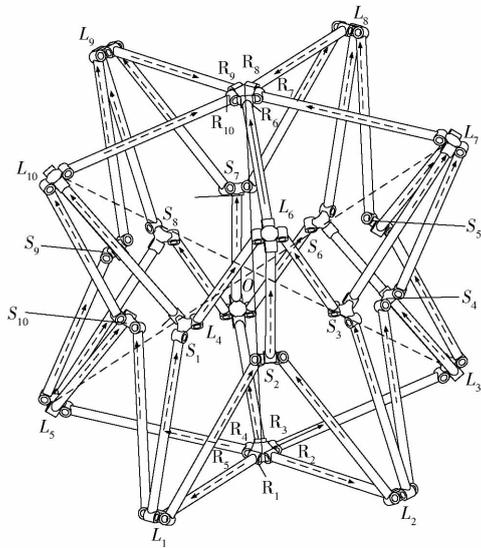


图 4 二十面体耦合机构

Fig. 4 Icosahedron coupling mechanism

如图 4 所示,一个二十面体单移动多环耦合机构包含 20 个面,40 条棱边,22 个顶点,满足多面体欧拉定理^[19]。

2 二十面体机构的解耦及自由度分析

运用以螺旋理论为基础的独立运动分流标记法^[16-17]对上述构建的耦合机构基础模型的自由度数及动平台的运动性质进行分析,从而验证构建耦合机构的正确性。

2.1 独立支链的判别

选择 M_1 为定平台, D_1 为动平台。按照运动分流法, 由于动平台 D_1 上连接 5 个转动副 R_6 、 R_7 、 R_8 、 R_9 和 R_{10} , 因此将该多环耦合机构拆分为 5 个独立运动链。 R_6 、 R_7 、 R_8 、 R_9 和 R_{10} 所在的分支分别记为 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 和 F_5 , 且耦合结构 C_1 、 C_2 、 C_3 、 C_4 和 C_5 连接在定平台上, 5 个分支 $C_1 - L_6 - R_{63} - R_6$ 、 $C_2 - L_7 - R_{73} - R_7$ 、 $C_3 - L_8 - R_{83} - R_8$ 、 $C_4 - L_9 - R_{93} - R_9$ 和 $C_5 - L_{10} - R_{103} - R_{10}$ 作用在动平台上, 这 5 个节点构件均有 2 个运动副指向定平台, 且有 3 个运动副指向离动平台最近的节点构件, 因此相对于定平台连接各节点构件又拆分为 3 个独立链 C_{k1} 、 C_{k2} 和 C_{k3} ($k = 1, 2, \dots, 5$)。如图 4 所示, 将机构动平台实现的运动传输路线用箭头在构建的耦合结构中标出。

因为在初始时刻拆分的 5 个独立运动链关于中心点 O 分布对称, 故分析自由度时分析其中的 1 条独立运动链即可, 这里分析图 4 中第一分支法 $F_1: C_1 - L_6 - R_{63} - R_6$, 该分支的结构组成如图 5 所示。

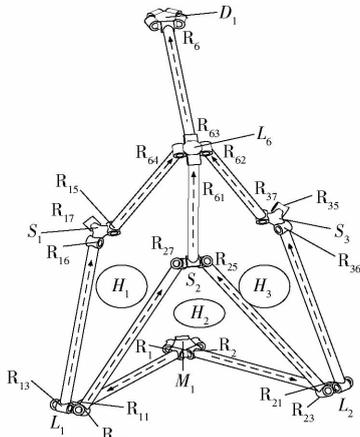


图 5 分支 F_1
Fig. 5 Branch F_1

2.2 独立运动链分支 C_1 的分析

初始时刻, 各个独立运动分支是里面含有一个人字形构件的“六边形”, 所以每个分支本身有各自的对称平面。耦合结构 C_1 可以等效为图 6 所示中的 3 条并联支链, 分别标记为 C_{11} 、 C_{12} 和 C_{13} 。每个并联支链都包含一个八杆单环结构, 分别标记为 H_1 、 H_2 、 H_3 (图 5)。

$$C_1: \begin{bmatrix} C_{11}: R_1 - R_{11} - L_1 - \begin{bmatrix} R_{13} - R_{16} - S_1 - R_{15} - R_{64} \\ R_{12} - R_{27} - S_2 - R_{26} - R_{61} \end{bmatrix} \\ C_{12}: \begin{bmatrix} R_1 - R_{11} - L_1 - R_{12} - R_{27} \\ R_2 - R_{21} - L_2 - R_{24} - R_{25} \end{bmatrix} - S_2 - R_{26} - R_{61} \\ C_{13}: R_2 - R_{21} - L_2 - \begin{bmatrix} -R_{24} - R_{25} - S_2 - R_{26} - R_{61} \\ -R_{23} - R_{36} - S_3 - R_{37} - R_{62} \end{bmatrix} \end{bmatrix} - L_6 - R_{63} - R_6$$

图 6 分支 F_1 结构框图

Fig. 6 Block diagram of branch F_1

对于分支 C_{12} , 为了方便建立坐标系, 对图 5 中分支 C_1 的镜像视图进行分析, 如图 7 所示。

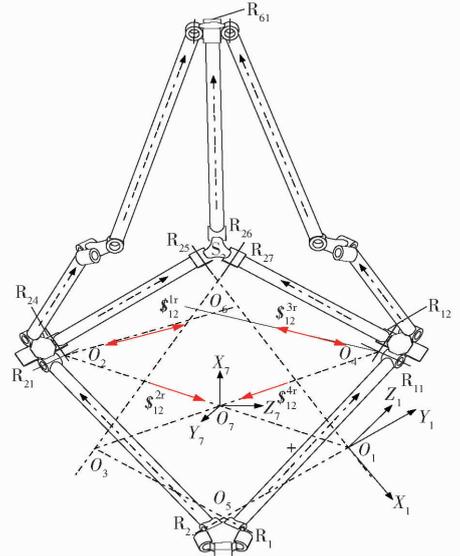


图 7 分支 H_{12}^1 和 H_{12}^2 的约束分析

Fig. 7 Constraint analysis of branch H_{12}^1 and H_{12}^2

由于其结构具有对称性, 将 C_{12} 的环 H_2 分成连接在耦合节点 S_2 上的 2 个并联分支 H_{12}^1 和 H_{12}^2 , 分别为 $R_1 - R_{11} - R_{12} - R_{27}$ - 和 $R_2 - R_{21} - R_{24} - R_{25}$ - 。先分析分支 H_{12}^2 的自由度, 将坐标原点 O_1 建在 R_{25} 和 R_2 轴线的交点, R_2 的轴线方向为 Y_1 轴, R_{25} 的轴线方向为 X_1 轴, R_{25} 和 R_2 轴线所在平面垂线的方向为 Z_1 轴, 建立如图 7 坐标系 $O_1X_1Y_1Z_1$, R_{21} 和 R_{24} 轴线的交点为 O_2 , 设 O_2 在 $O_1X_1Y_1Z_1$ 中坐标为 $O_2 = (l_2, m_2, n_2)$ 的运动螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_2 = (0 \ 1 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{21} = (0 \ 1 \ 0; \ -n_2 \ 0 \ l_2) \\ \mathcal{S}_{24} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ n_2 \ -m_2) \\ \mathcal{S}_{25} = (1 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (1)$$

求反螺旋, 得到分支 H_{12}^2 的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{12}^{1r} = (0 \ 0 \ 0; \ 0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_{12}^{2r} = (l_2 \ m_2 \ n_2; \ 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (2)$$

约束力 \mathcal{S}_{12}^{2r} 和约束力偶 \mathcal{S}_{12}^{1r} 被支链 H_{12}^2 施加给节点构件 S_2 , 节点杆件 S_2 绕 R_2 和 R_{25} 轴线决定平面法线方向的转动被 O_1O_2 直线方向的约束力 \mathcal{S}_{12}^{2r} 所限制, 沿 O_1O_2 方向的移动被 R_2 和 R_{25} 所在平面法线方向的约束力偶 \mathcal{S}_{12}^{1r} 所限制。

将坐标原点 O_3 建在 R_1 和 R_{27} 轴线交点, 坐标原点 O_4 建在 R_{11} 和 R_{12} 轴线交点, O_5 为 R_1 和 R_2 轴线交点, O_6 为 R_{25} 和 R_{27} 轴线交点, O_7 为 O_2O_7 与 O_4O_7 的轴线交点。则如图 7 所示与 H_{12}^2 结构对称的分支 H_{12}^1 , 约束力 \mathcal{S}_{12}^{4r} 和约束力偶 \mathcal{S}_{12}^{3r} 被支链 H_{12}^1 施加给节点构件 S_2 , 节点杆件 S_2 绕 R_1 和 R_{27} 轴线决定平面法线方

向的转动被 O_3O_4 直线方向的约束力 \mathcal{S}_{12}^{4r} 所限制,沿 O_3O_4 方向的移动被 R_1 和 R_{27} 所在平面法线方向的约束力偶 \mathcal{S}_{12}^{3r} 所限制。若约束力用单向箭头表示,约束力偶用双向箭头表示,则 S_2 受到垂直于平面 $O_3O_5O_6$ 的约束力偶 \mathcal{S}_{12}^{3r} 和沿直线 O_3O_4 的约束力 \mathcal{S}_{12}^{4r} 。

如图 7 所示,某个平面被 \mathcal{S}_{12}^{1r} 和 \mathcal{S}_{12}^{3r} 约束力偶共同决定,该平面的轴线通过 \mathcal{S}_{12}^{2r} 和 \mathcal{S}_{12}^{4r} 约束力的交点 O_7 ,该平面法线方向为耦合节点构件 S_2 允许的节距为零的转动运动 \mathcal{S}_{12}^{1r} 的转轴矢量方向。2 个约束力决定平面的法线方向为 S_2 的移动运动螺旋 \mathcal{S}_{12}^{2r} 。8 杆机构的对称平面为过直线 O_5O_6 的平面, \mathcal{S}_{12}^{1r} 、 \mathcal{S}_{12}^{2r} 和 \mathcal{S}_{12}^{3r} 、 \mathcal{S}_{12}^{4r} 分别对称的分布在对称平面两侧,则在该对称平面上分布有 S_2 允许的 2 个运动螺旋,而且 \mathcal{S}_{12}^{2r} 是箭头向前,倾斜于该图的投影平面且在 8 杆机构对称中线 O_5O_6 后面。在图 7 中建立坐标系 $O_7X_7Y_7Z_7$,8 杆机构的中间对称平面为 $X_7O_7Y_7$,使对称平面的法线方向为 Z_7 轴所在方向。由此得到,位于对称平面内的移动和轴线过 O_7 点的转动为节点构件 S_2 相对于定平台的两个等效广义运动副。分支 $H_{12} - R_{26} - R_{61}$ 的运动螺旋系在 $O_7X_7Y_7Z_7$ 中为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{12}^{1r} = (1 & 1 & 0; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{2r} = (0 & 0 & 0; & e_1 & f_1 & 0) \\ \mathcal{S}_{26} = (0 & 0 & 1; & e_2 & f_2 & 0) \\ \mathcal{S}_{61} = (0 & 0 & 1; & e_3 & f_3 & 0) \end{cases} \quad (3)$$

求反螺旋,得到分支 C_{12} 的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{12}^{11r} = (0 & 0 & 1; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{12r} = (0 & 0 & 0; & 1 & -1 & 0) \end{cases} \quad (4)$$

约束力 \mathcal{S}_{12}^{11r} 和约束力偶 \mathcal{S}_{12}^{12r} 被分支 C_{12} 施加给耦合节点 L_6 , Z_7 方向的移动和沿 $X_7O_7Y_7$ 平面的转动被限制。 \mathcal{S}_{12}^{12r} 垂直于 $X_7O_7Y_7$ 平面,平行于定平台 M_1 所在平面, \mathcal{S}_{12}^{11r} 在 $X_7O_7Y_7$ 平面上。

同理由于环 H_{11} 、 H_{13} 都含有与 H_{12} 类似的 8 杆机构,且分支 C_{11} 、 C_{13} 关于对称平面对称。因此分支 C_{11} 对节点构件 L_6 的约束螺旋为约束力 \mathcal{S}_{11}^{1r} 和约束力偶 \mathcal{S}_{11}^{2r} ,限制了节点杆件 L_6 沿过环 H_1 且过 R_{13} 和 R_{12} 交点的法平面的移动和转动。分支 C_{13} 对节点构件 L_6 的约束螺旋为约束力 \mathcal{S}_{13}^{1r} 和约束力偶 \mathcal{S}_{13}^{2r} ,限制了节点杆件 L_6 沿过环 H_3 且过 R_{23} 和 R_{24} 交点的法平面的移动和转动。因为分支 C_{11} 、 C_{13} 关于对称平面对称,所以分支 C_{11} 、 C_{13} 对节点杆件 L_6 的运动为在对称平面内的转动和移动,则其约束为其反螺旋。

对于耦合节点 L_6 ,在坐标系 $O_7X_7Y_7Z_7$ 中约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{13}^{1r} = (0 & 0 & 0; & 1 & -1 & 0) \\ \mathcal{S}_{13}^{2r} = (1 & 0 & 0; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{13}^{3r} = (0 & 0 & 1; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{13}^{4r} = (0 & 0 & 0; & 0 & 0 & 1) \\ \mathcal{S}_{12}^{11r} = (0 & 0 & 1; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{12r} = (0 & 0 & 0; & 1 & -1 & 0) \end{cases} \quad (5)$$

L_6 的运动螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{1rr} = (1 & 1 & 0; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_1^{2rr} = (0 & 0 & 0; & 0 & 1 & 0) \end{cases} \quad (6)$$

分支 $C_1 - R_6$ 的运动螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{1rr} = (1 & 1 & 0; & 0 & 0 & 0) \\ \mathcal{S}_1^{2rr} = (0 & 0 & 0; & 0 & 1 & 0) \\ \mathcal{S}_{63} = (0 & 0 & 1; & p_2 & q_2 & 0) \\ \mathcal{S}_6 = (0 & 0 & 1; & p_3 & q_3 & 0) \end{cases} \quad (7)$$

反螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{1r} = (0 & 0 & 0; & 1 & -1 & 0) \\ \mathcal{S}_1^{2r} = (0 & 0 & 1; & 0 & 0 & 0) \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)可以看出限制沿 Z_7 方向的移动约束力和限制动平台沿 X_7 、 Y_7 轴方向的转动约束力偶被分支 $C_1 - L_6 - R_{63} - R_6$ 施加给动平台。约束力偶 \mathcal{S}_1^{2r} 中间对称平面 $X_7O_7Y_7$ 内,约束力 \mathcal{S}_1^{1r} 与定平台 M_1 所在平面平行。

2.3 整个机构的分析

由对称性可知, $C_1 - R_6$ 、 $C_2 - R_7$ 、 $C_3 - R_8$ 、 $C_4 - R_9$ 、 $C_5 - R_{10}$ 5 个独立支链也分别施加给动平台 2 个约束力偶,每个支链的其中一个约束力偶与定平台 M_1 所在平面垂直且平行于 5 个分支对称平面的交线,另一个约束力偶与定平台 M_1 所在平面平行且通过 5 个独立支链对称平面的交线。在定平台 M_1 上投影为点 O 的直线 L 为 5 个支链的对称平面在初始时刻的交线。使 Z 轴与 L 重合, XOY 位于 M_1 所在平面,则建立如图 8 所示的 $OXYZ$ 坐标系,使其为整个耦合机构的坐标系。在该坐标系下,5 个分支作用于动平台的约束螺旋系为

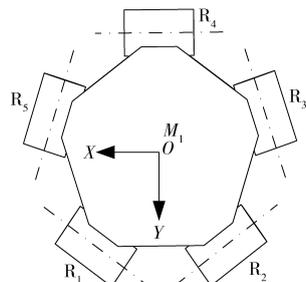


图 8 定平台 M_1 俯视图

Fig. 8 Top view of fixed platform M_1

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{S}_1^{1r} &= (0 \ 0 \ 0; 0 \ s_1 \ t_1) \\ \mathcal{S}_1^{2r} &= (1 \ 0 \ 0; 0 \ s_2 \ t_2) \\ \mathcal{S}_2^{1r} &= (0 \ 0 \ 0; r_3 \ s_3 \ t_3) \\ \mathcal{S}_2^{2r} &= (1 \ 1 \ 0; r_4 \ s_4 \ t_4) \\ \mathcal{S}_3^{1r} &= (0 \ 0 \ 0; r_5 \ s_5 \ t_5) \\ \mathcal{S}_3^{2r} &= (1 \ 1 \ 0; r_6 \ s_6 \ t_6) \\ \mathcal{S}_4^{1r} &= (0 \ 0 \ 0; r_7 \ s_7 \ t_7) \\ \mathcal{S}_4^{2r} &= (1 \ 1 \ 0; r_8 \ s_8 \ t_8) \\ \mathcal{S}_5^{1r} &= (0 \ 0 \ 0; r_9 \ s_9 \ t_9) \\ \mathcal{S}_5^{2r} &= (1 \ 1 \ 0; r_{10} \ s_{10} \ t_{10}) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

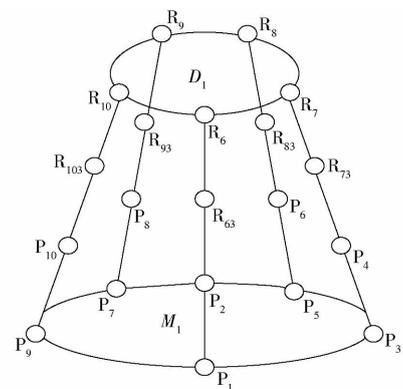


图 9 等效并联机构结构示意图

Fig. 9 Schematic diagram of equivalent parallel mechanism

求二次反螺旋为

$$\mathcal{S}'' = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \quad (10)$$

由式(10)可以看出,动平台 D_1 在初始位置只有 Z 轴方向的移动自由度,即动平台 D_1 在图 4 所示初始位形下运动为沿 Z 方向的上下移动。由于式(9)中有线性相关的约束螺旋系,因此新的耦合机构具有 0 个公共约束,5 个冗余约束。为了进一步说明所求自由度的正确性,下文用修正的 G-K 公式法^[7] 计算新机构在初始位置该机构的自由度。

2.4 等效并联机构输出件的自由度分析

图 9 所示的并联机构为整个二十面体耦合机构的等效图。等效并联机构由 20 个运动副、17 个构件、5 个支链组成,每个支链各提供给动平台 1 个约束力和 1 个约束力偶。有 10 个约束螺旋作用于动平台 D_1 ,由于每个支链的约束力偶都在其所在分支的对称平面内且为 $\mathcal{S}_i^{2r} (i=1,2,\dots,5)$,但没有相同的方向,每个支链的约束力都与定平台 M_1 平行但不共轴,则 $\lambda = 0$,存在 3 个冗余约束即 $\nu_1 = 1$ 。由于式(9)中 $\text{rank} \{ \mathcal{S}_i^{1r} \wedge \mathcal{S}_i^{2r} \} = 5 (i=1,2,\dots,5)$,故 $\nu = 5$ 。从式(9)可以看出每一个支链没有局部自由度,即 $\xi = 0$ 。由修正的 G-K 公式^[3],计算动平台 D_1 的自由度为

$$M = (6 - \lambda)(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + \nu - \xi = 6 \times (17 - 20 - 1) + 20 + 5 = 1 \quad (11)$$

- 式中 M ——机构动平台 D_1 自由度
- λ ——公共约束数
- n ——定平台构件数目
- g ——运动副数目
- f_i ——第 i 个运动副的自由度
- ν ——并联冗余约束
- ξ ——新耦合机构中存在的局部自由度

由于新机构在运动过程中各运动副之间的几何

特性保持不变,因此图 8 所示坐标系 $OXYZ$ 永远成立,依照 2.1~2.3 节的拆分原则可得到求解各分支的运动螺旋系也保持不变。那么,新机构依然可以用图 9 所示并联机构等效代替,所以机构的自由度具有全周性,自由度为 1。

3 主动输入选取

机构所选取的输入数目和机构自由度数应相等,这样机构才能实现确定的运动。由于本机构只有一个沿 Z 竖直方向的移动,因此添加一个转动副,一般选择机架副。由于本机构具有对称性,因此在其中一个分支添加驱动即可。因此选择在 R_1 、 R_2 、 R_3 、 R_4 和 R_5 的任何一个机架副添加驱动作为输入副即可,本文选择 R_2 作为主动副。根据赵铁石等^[19] 提出的如何判断添加原动件的方法,对机构的输入选取进行分析。

基本思想为:将所选作为输入的所有主动副锁定后,计算所有分支对于动平台发生的总的约束反螺旋系

$$\mathcal{S}^r = (\mathcal{S}_1^r \ \mathcal{S}_2^r \ \dots \ \mathcal{S}_i^r \ \mathcal{S}_1^{r*} \ \mathcal{S}_2^{r*} \ \dots \ \mathcal{S}_j^{r*}) \quad (12)$$

式中 \mathcal{S}_i^r ——并联机构原有的结构约束螺旋
 i ——6 与机构自由度的差值
 \mathcal{S}_j^{r*} ——刚化所有主动副后新增的约束螺旋
 即如果刚化后机构总动平台上的约束反螺旋系的秩 \mathcal{S}^r 等于 6,即 $\text{dim}(\mathcal{S}^r) = 6$,则所选择的输入是合理的;否则为不合理,重新选择。

根据上述方法,对于本文提出的二十面体耦合机构,在初始位型下,独立运动链分支 C_1 分支的运动螺旋系为式(1)。在这里刚化转动副 R_2 ,即在分支中去掉转动副及在式(1)去掉螺旋。则约束螺旋系式(2)又增加了一个沿 X_1 方向的约束力,且产生对原点的距为沿 Y_1 轴方向的力偶分量可得。

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{12}^{1r} = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_{12}^{2r} = (l_2 \ m_2 \ n_2; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{3r} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ n_2 \ 0) \end{cases} \quad (13)$$

此时 H_{12} 变成了 7 杆机构, 原来节点构件 S_2 受过 O_7 点相对于定平台 2 个等效广义运动副, 分别为位于对称平面内的移动和转动。此时由于转动副 R_2 刚化, 则位于对称平面内的转动被约束掉。则在图 7 坐标系 $O_7X_7Y_7Z_7$ 中得 H_{12} 运动螺旋为

$$\mathcal{S}_{12}^{1rr} = (1 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \quad (14)$$

分支 $H_{12} - R_{26} - R_{61}$ 的运动螺旋系在 $O_7X_7Y_7Z_7$ 中为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{12}^{1rr} = (1 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{26} = (0 \ 0 \ 1; e_2 \ f_2 \ 0) \\ \mathcal{S}_{61} = (0 \ 0 \ 1; e_3 \ f_3 \ 0) \end{cases} \quad (15)$$

求反螺旋, 可得到分支 C_{12} 的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{12}^{11r} = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{12r} = (0 \ 0 \ 0; 1 \ -1 \ 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{13r} = (a_1 \ b_1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (16)$$

同理由于环 H_{11} 、 H_{13} 都含有与 H_{12} 中 R_2 没有刚化前类似的 8 杆机构, 且分支 C_{11} 、 C_{13} 关于对称平面对称。用相同的分析方法得到对于耦合节点 L_6 , 在坐标系 $O_7X_7Y_7Z_7$ 中, 其约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{13}^{1r} = (0 \ 0 \ 0; 1 \ -1 \ 0) \\ \mathcal{S}_{13}^{2r} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{13}^{3r} = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{13}^{4r} = (0 \ 0 \ 0; 0 \ 0 \ 1) \\ \mathcal{S}_{12}^{11r} = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{12r} = (0 \ 0 \ 0; 1 \ -1 \ 0) \\ \mathcal{S}_{12}^{13r} = (a_1 \ b_1 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (17)$$

对其求反螺旋得到 L_6 的运动螺旋为在 $X_7O_7Y_7$ 面内的移动, 从而得到分支 $C_1 - R_6$ 的运动螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{11r} = (1 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_{63} = (0 \ 0 \ 1; p_2 \ q_2 \ 0) \\ \mathcal{S}_6 = (0 \ 0 \ 1; p_3 \ q_3 \ 0) \end{cases} \quad (18)$$

反螺旋为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{1r} = (0 \ 0 \ 0; 1 \ -1 \ 0) \\ \mathcal{S}_1^{2r} = (0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0) \\ \mathcal{S}_1^{3r} = (c_1 \ d_1 \ 0; 0 \ 0 \ 0) \end{cases} \quad (19)$$

在该坐标系下, 5 个分支作用于动平台的约束螺旋系为

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1^{1r} = (0 \ 0 \ 0; 0 \ s_1 \ t_1) \\ \mathcal{S}_1^{2r} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ s_2 \ t_2) \\ \mathcal{S}_1^{3r} = (0 \ k_1 \ g_1; r_3 \ s_3 \ t_3) \\ \mathcal{S}_2^{1r} = (0 \ 0 \ 0; r_4 \ s_4 \ t_4) \\ \mathcal{S}_2^{2r} = (1 \ 1 \ 0; r_5 \ s_5 \ t_5) \\ \mathcal{S}_2^{3r} = (h_6 \ k_6 \ g_6; r_6 \ s_6 \ t_6) \\ \mathcal{S}_3^{1r} = (0 \ 0 \ 0; r_7 \ s_7 \ t_7) \\ \mathcal{S}_3^{2r} = (1 \ 1 \ 0; r_8 \ s_8 \ t_8) \\ \mathcal{S}_3^{3r} = (h_9 \ k_9 \ g_9; r_9 \ s_9 \ t_9) \\ \mathcal{S}_4^{1r} = (0 \ 0 \ 0; r_{10} \ s_{10} \ t_{10}) \\ \mathcal{S}_4^{2r} = (1 \ 1 \ 0; r_{11} \ s_{11} \ t_{11}) \\ \mathcal{S}_4^{3r} = (h_{12} \ k_{12} \ g_{12}; r_{12} \ s_{12} \ t_{12}) \\ \mathcal{S}_5^{1r} = (0 \ 0 \ 0; r_{13} \ s_{13} \ t_{13}) \\ \mathcal{S}_5^{2r} = (1 \ 1 \ 0; r_{14} \ s_{14} \ t_{14}) \\ \mathcal{S}_5^{3r} = (h_{15} \ k_{15} \ g_{15}; r_{15} \ s_{15} \ t_{15}) \end{cases} \quad (20)$$

令 $\mathcal{S}^r = \mathcal{S}_i^r (i=1, 2, \dots, 5; j=1, 2, 3)$, 则由式(20)

可知, $\dim(\mathcal{S}^r) = 6$ 。

综上所述, 二十面体耦合机构在 R_2 处添加转动副作为主动输入是合理的。

4 运动特性分析

应用 ProE 构建耦合机构的三维实体模型, 利用 Matlab 得到动平台和节点构件的位置变化曲线, 在仿真上来进一步分析二十面体耦合机构的自由度及运动特性。

4.1 耦合机构仿真模型建立

耦合机构的整体坐标系 $OXYZ$ 如图 8 所示, Z 轴垂直定平台 M_1 所在平面竖直向上, X 轴与 R_4 轴线平行, Y 轴由右手螺旋定则决定, 构建耦合机构的三维模型如图 10 所示。以动平台 M_1 、10 个四边形节点构件及 10 个三角形节点构件的几何中心为位移测量点。对各构件上位移测量点的位移进行仿真, 在给定的驱动条件下, 将仿真结果利用 Matlab 绘制成时间-位移变化曲线。设置 2 种驱动条件分别进行仿真从而体现耦合机构的伸缩特性。

4.2 构件运动特性仿真分析(驱动 1)

在 R_2 轴线上中点位置设置转动马达 1, 驱动马达 1 的旋转方向用箭头标注如图 10 所示, 由右手螺旋法则大拇指沿 R_2 轴线方向指出纸面, 马达 1 旋转方向四指握拳方向。马达选用伺服电机, 设置如图 11 所示。图 11a 表示转动轴为 R_1 轴线, 图 11b 表示所加伺服电机的速度为常数 $2(^{\circ})/s$, 图 11c 表示所加伺服电机的终止时间为 10 s, 帧频为 2.5, 最小间隔

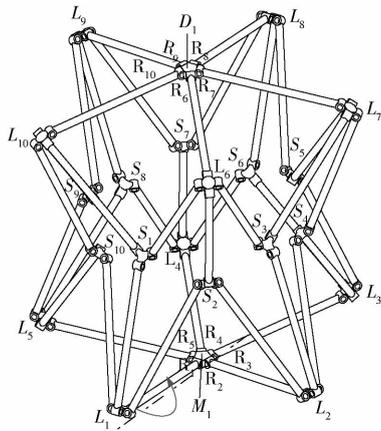
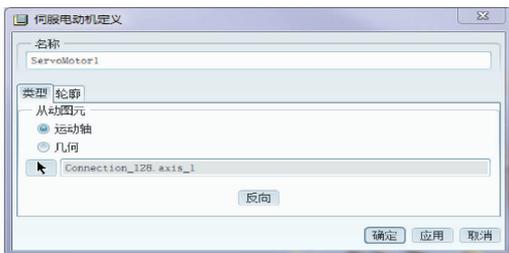
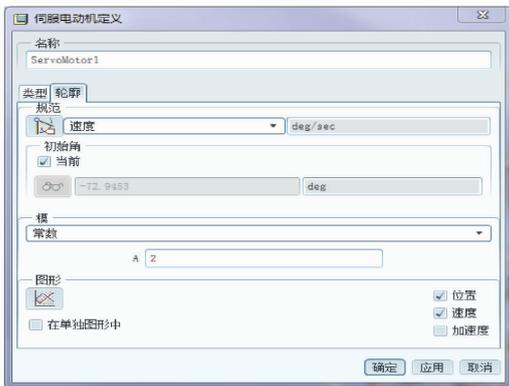


图 10 驱动 1 设置

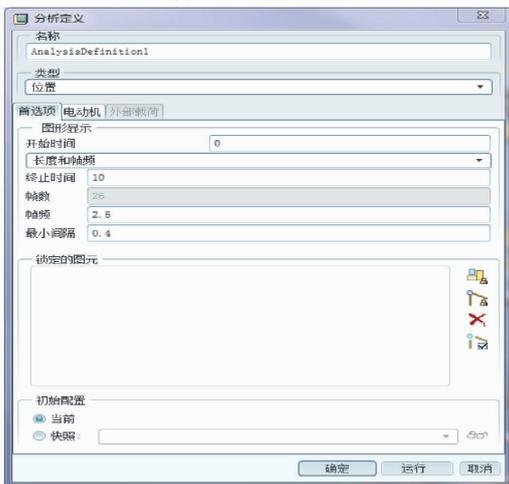
Fig. 10 Setting of drive 1



(a) 伺服电机轴线设置



(b) 伺服电机速度设置



(c) 伺服电机时间及步长设置

图 11 伺服电机的具体设置

Fig. 11 Specific settings of servo motor

为 0.4 s。

在仿真时间内,动平台 D_1 沿坐标系 $OXYZ$ 3 个

坐标轴的位移变化曲线如图 12 所示。由图 12 可看出,仿真过程中动平台沿 X 轴(下三角符号)和 Y 轴(实线)的数值始终为 0,即 D_1 在这 2 个坐标轴没有位移变化,沿 Z 轴(空心圆)有缓慢的上升趋势,这表明动平台只有一个沿 Z 轴方向的移动运动,符合第 2 节耦合机构的自由度理论分析结果,说明了设计的机构合理性。

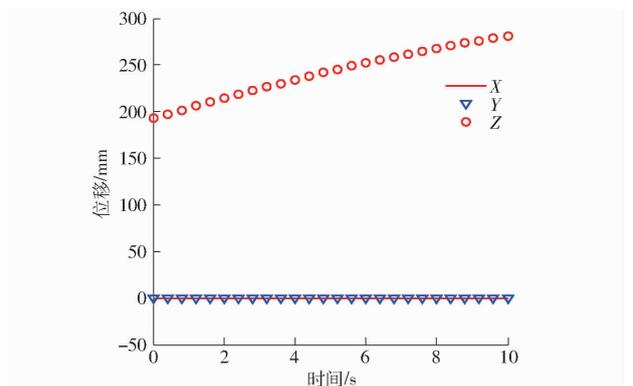


图 12 动平台 D_1 沿各轴位移变化曲线

Fig. 12 Changing curves of displacement of D_1 along shaft

为了分析两类耦合节点构件的运动特性,将不同的四边形节点构件 $L_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 在同一时刻沿各坐标轴的位移变化进行仿真,并绘制相应的时间-位移变化曲线,见图 13;同样的,三角形节点构件 $S_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ 在同一时刻沿各坐标轴的位移变化曲线见图 14。

由图 13 对比可知,在马达 1 驱动条件下, $L_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 在 Z 轴的数值相同,即始终处于同一高度。 $L_i (i = 6, 7, \dots, 10)$ 在 Z 轴的数值相同,即始终处于同一高度。其中,耦合构件 L_4, L_6 在 X 轴方向位移始终为 0,仅在平面 YOZ 内运动,沿 Y 轴数值变化相同但运动方向相反。沿 Y 轴运动方向相反但数值变化相同,表明平面 YOZ 为 L_5 和 L_{10} 的运动对称平面。构件 L_1 和 L_9, L_2 和 L_8, L_3 和 L_7 也有与 L_5 和 L_{10} 相同的位移变化趋势,所以平面 YOZ 也是构件 L_1 和 L_9, L_2 和 L_8, L_3 和 L_7 的运动对称平面。综合各坐标轴的仿真结果可知, $L_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 和 $L_i (i = 6, 7, \dots, 10)$ 沿 Z 轴数值增大的过程中,沿 X 轴和 Y 轴的数值均有向 0 靠近的趋势,即 10 个四边形节点构件在上升过程中,伴随有向机构对称中心 O 汇聚的运动趋势。

由图 14 可见,在马达 1 驱动条件下, $S_j (j = 1, 3, \dots, 9)$ 在 Z 轴的数值相同,即始终处于同一高度。 $S_j (j = 2, 4, \dots, 10)$ 在 Z 轴的数值相同,即始终处于同一高度。其中构件 S_2, S_7 在 X 轴方向位移始终为 0,仅在平面 YOZ 内运动,沿 Y 轴数值变化相同但运动方向相反。构件 S_9, S_{10} 在 X 轴方向位移相同,沿

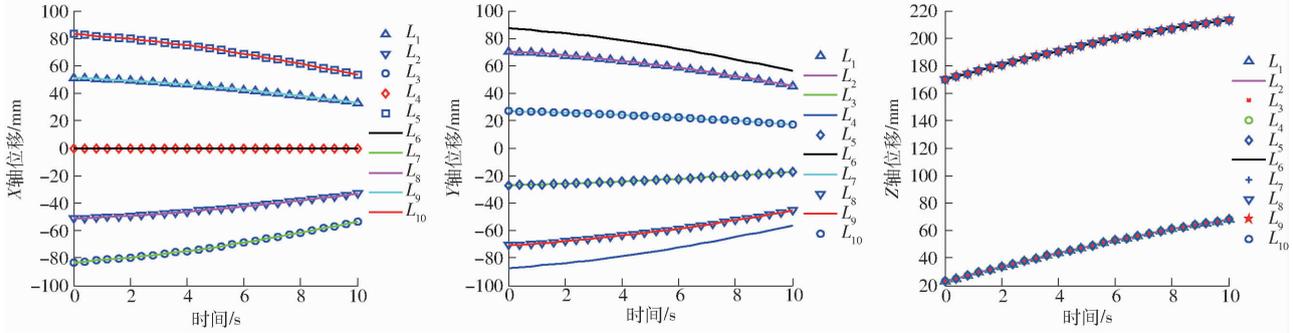


图 13 节点构件 L_i 沿各坐标轴位移变化曲线

Fig. 13 Changing curves of displacement of joint L_i along axes

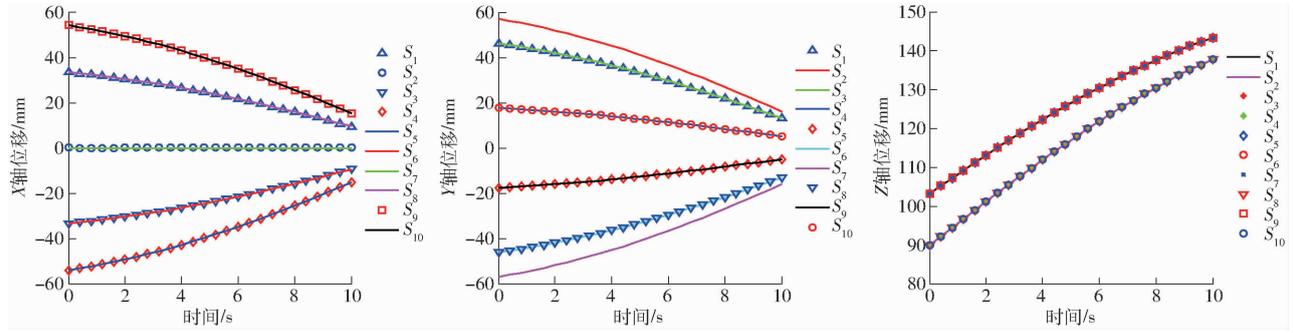


图 14 节点构件 S_i 沿各坐标轴位移变化曲线

Fig. 14 Changing curves of displacement of joint S_i along axes

Y 轴数值变化相同但运动方向相反,表明平面 YOZ 为 S_9 和 S_{10} 的运动对称平面。构件 S_1 和 S_8, S_3 和 S_6, S_4 和 S_5 也有与 S_9 和 S_{10} 相同的位移变化趋势,所以平面 YOZ 也是构件 S_1 和 S_8, S_3 和 S_6, S_4 和 S_5 的运动对称平面。

综合各坐标轴的仿真结果, $S_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ 沿 Z 轴数值增大的过程中,沿 X 轴和 Y 轴的数值均有向 0 靠近的趋势,即 10 个三角形节点构件在上升过程中,伴随有向机构对称中心 O 汇聚的运动趋势。

为了体现网状连接的节点构件 $L_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 和 $S_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ 在仿真过程中的位移变化关系,将这 20 个耦合节点构件与动平台的运动仿真结果绘制在一个三维空间坐标中,见图 15。

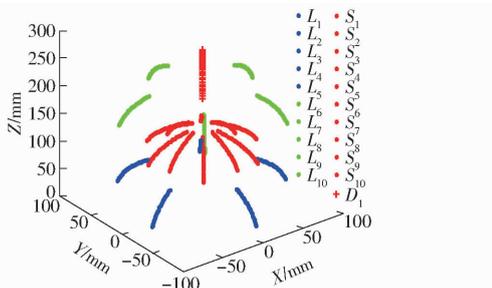


图 15 动平台及节点构件位移变化曲线图

Fig. 15 Changing curves of displacement of moving platform and joints

$D_1 (+)$ 沿 Z 轴向上运动过程中,伴随有耦合节点构件 $L_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 和 $S_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ (圆点) 上升并向机构中心 O 汇聚的运动特性。

4.3 对称耦合机构可展性

为了对该耦合机构的运动特性进行仿真,设置一个与图 10 中马达 1 仅转向相反的驱动条件,以观察耦合机构运动过程中的收缩运动特性。由仿真结果可以看出,二十面体耦合机构是具有一个移动自由度的对称可展耦合机构。运动时,耦合点构件 $L_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 和 $S_j (j = 1, 2, \dots, 10)$ 在特定的驱动条件下可以实现往复伸展、收缩运动。图 16 是机构在不同仿真时刻对应的位形变化,其中图 16a、图 16b 和图 16c 为马达 1 驱动仿真条件下的位形变形,图 16a、图 16d 和图 16e 为马达 2 驱动仿真条件下的位形变形。

5 结论

(1) 针对正十二面体的对称性,首先增加顶点种类从而增加耦合节点的种类,设计了一种由三、四、五边形组成的对称耦合机构。针对正十二面体的对偶性再构建相应的耦合基础框架,设计节点替代构件,设计连杆连接耦合节点得到一种二十面体可展耦合机构。

(2) 为了判断整个机构的运动性质,用分流法进行自由度分析,结果表明构建的耦合机构具有 1

由图 15 可以看出,在马达 1 的驱动下,动平台

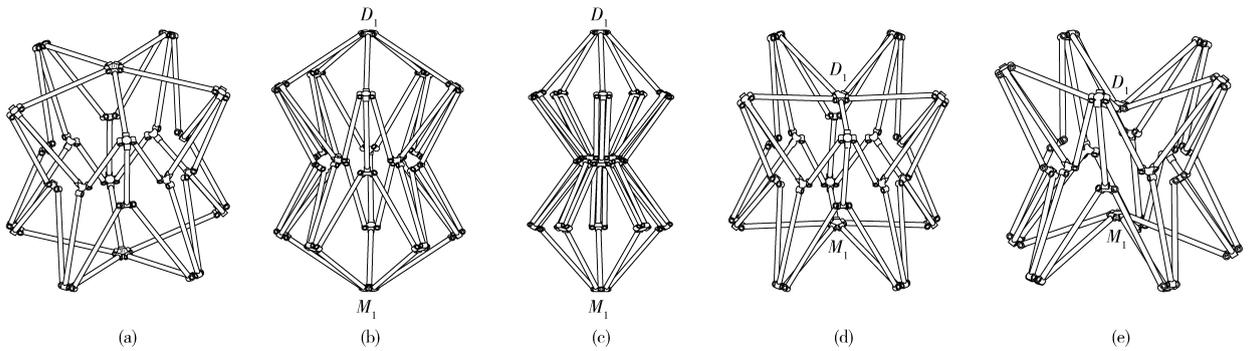


图 16 可展机构位形伸缩变化示意图

Fig. 16 Schematic diagrams of deployable mechanism

个移动自由度。构建机构的三维实体模型并进行运动特性分析,结果表明了机构的相对耦合节点可实现

运动特性相反的运动特性,相邻耦合节点构件可实现同收缩的运动特性。

参 考 文 献

- 李晔卓,田耀斌,姚燕安. 可折叠双三角锥滚动机构[J]. 机械工程学报, 2014, 50(11): 68-79.
LI Yehua, TIAN Yaobin, YAO Yan'an. Foldable triangular bipyramid rolling mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(11): 68-79. (in Chinese)
- 李菊,赵德安,沈惠平,等. 多喷枪协同式喷涂五轴混联机器人设计[J/OL]. 农业机械学报, 2012, 43(4): 216-220. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20120441&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.04.041.
LI Ju, ZHAO Dean, SHEN Huiping, et al. Design of 5-axes hybrid robot with several spray guns for collaborative spraying[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(4): 216-220. (in Chinese)
- YAN C, GAO F, GUO W. Coordinated kinematic modelling for motion planning of heavy-duty manipulators in an integrated open die forging centre[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 2009, 223(10): 1299-1313.
- 丁华锋,曹宇,杨真真,等. 基于 D-H 法的多连杆正铲挖掘机运动学分析与包络图绘制[J]. 燕山大学学报, 2014, 3(1): 197-203.
- BAKER B. Using an expandable toy in discussing rotational motion[J]. Physics Teacher, 2005, 43(4): 247.
- YOU Zhong. Motion structures extend their reach [J]. Materials Today, 2007, 10(12): 52-57.
- 黄真,刘婧芳,李艳文. 论机构自由度[M]. 北京:科学出版社,2011.
- WEI Guowu, DING Xilun, DAI Jiansheng. Mobility and geometric analysis of the Hoberman switch-pitch ball and its variant [J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2010, 2(3): 1049-1059.
- KIPER G, SOYLEMEZ E, KISISEL A O. Polyhedral linkages synthesized using cardan motion along radial axes [C] // Proceedings of 12th IFToMM World Congress, Besancon, France, 2007: 471-477.
- WEI Guowu, DAI Jiansheng. A spatial eight-bar linkage and its association with the deployable platonic mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2014, 6(2): 021010(1-9).
- WEI Guowu, YAO Chen, DAI Jiansheng. Synthesis, mobility, and multifunction of deployable polyhedral mechanisms with radially reciprocating motion[J]. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 2014, 136(9): 091003(1-12).
- 高慧芳,刘婧芳,余跃庆. 向心运动耦合机构设计与分析[J/OL]. 农业机械学报, 2016, 47(6): 373-380, 356. http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20160649&flag=1. DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.06.049.
GAO Huifang, LIU Jingfang, YU Yueqing. Design and analysis of coupled radial mechanism[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 373-380, 356. (in Chinese)
- AKIRA M, SATESHI H, MITSUNOBU W. Key technologies for high accuracy large mesh antenna reflectors [J]. Acta Astronautica, 2003, 53(11): 899-908.
- ZI Bin, DING Huafeng, CAO Jianbin, et al. Integrated mechanism design and control for completely restrained hybrid-driven based cable parallel manipulators[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications, 2014, 74: 643-661.
- 杨毅,丁希仑. 基于空间多面体向心机构的伸展臂设计研究[J]. 机械工程学报, 2011, 47(5): 26-34.
YANG Yi, DING Xilun. Design and analysis of mast based on spatial polyhedral linkages mechanism along radial axes [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(5): 26-34. (in Chinese)
- 刘婧芳,黄晓欧,余跃庆,等. 多环耦合机构末端件自由度计算的等效法[J]. 机械工程学报, 2014, 50(23): 13-19.
LIU Jingfang, HUANG Xiaou, YU Yueqing, et al. Equivalent method of output mobility calculation for a novel multi-loop coupled mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014, 50(23): 13-19. (in Chinese)
- 高慧芳,刘婧芳,黄晓欧. 基于独立运动分流标记法的多环耦合机构自由度分析方法[J]. 北京工业大学学报, 2015, 41(11): 1658-1664.
GAO Huifang, LIU Jingfang, HUANG Xiaou. Method of mobility calculation for a coupled mechanism based on independent motion shunting measurement [J]. Journal of Beijing University of Technology, 2015, 41(11): 1658-1664. (in Chinese)
- 薛玉梅. 欧拉定理及多面体欧拉公式[J]. 山西师范大学学报:自然科学版, 2009, 23(增刊 2): 6-7, 25.
- 赵铁石,黄真. 欠秩空间并联机器人输入选取的理论和应用[J]. 机械工程学报, 2000, 36(10): 81-85.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. The theory and application of input selection for under rank space parallel robot [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2000, 36(10): 81-85. (in Chinese)