

# Tripod 并联机器人工作空间完全解析与实验验证

牟家旺<sup>1</sup> 于今<sup>1</sup> 吴超宇<sup>1</sup> 程敏<sup>1,2</sup> 钱小吾<sup>3</sup>

(1. 重庆大学机械传动国家重点实验室, 重庆 400044; 2. 浙江大学流体动力与机电系统国家重点实验室, 杭州 310027;  
3. 镇江高等专科学校数理化工系, 镇江 212002)

**摘要:** 针对 Tripod 并联机器人工作空间一般用数值搜索方法研究, 难以给出边界曲面准确表达的问题, 提出一种曲面扫略分析与机械结构形位分析相结合的方法来解析 Tripod 并联机器人的工作空间。以正逆解的算法为基础, 得到并联机器人各单开链扫略空间范围及其包络曲面表达式, 用三维软件布尔运算得出各支链公共的工作空间, 在考虑虎克铰约束和杆件干涉的情况下, 再依据机械结构形位分析得到机器人实际工作空间及边界曲面表达式, 并对工作空间的奇异性进行了分析。通过三坐标测量仪器测出实际的工作空间与理论分析解析出来的空间进行对比来验证解析方法的正确性, 从而为机器人机械结构参数设计和工作空间计算奠定基础。

**关键词:** 并联机器人; 曲面扫略分析; 形位分析; 工作空间; 边界曲面表达式

中图分类号: TP242 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2017)07-0368-08

## Workspace Resolution of Tripod Parallel Manipulator and Experimental Verification

MOU Jiawang<sup>1</sup> YU Jin<sup>1</sup> WU Chaoyu<sup>1</sup> CHENG Min<sup>1,2</sup> QIAN Xiaowu<sup>3</sup>

(1. *The State Key Laboratory of Mechanical Transmissions, Chongqing University, Chongqing 400044, China*  
2. *State Key Laboratory of Fluid Power and Mechatronics Systems, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*  
3. *Department of Mathematics, Physics and Chemistry, Zhenjiang College, Zhenjiang 212002, China*)

**Abstract:** Aiming at the difficulty of using accurate analytical formulas to represent the Tripod parallel robot workspace boundary surfaces, a method called surface-sweep analysis combined with the shape of mechanical structure analysis was proposed to give an accurate expression to the workspace of Tripod parallel manipulator. On account of the Tripod parallel robot, the geometric model of the parallel robot was set up and the architecture of the parallel robot and the driving mode of the parallel robot were introduced. Based on the algorithm of forward and inverse kinematics solution, the scope of sweeping space and envelope surface expression of this sweeping space considering one of the robot parallel's open chains were obtained. Then, the six envelope surfaces were drawn in sequence and the overlap part of the six sweeping space was solved. In 3-D software, the public workspace can be obtained by using boolean operation algorithm. Then, under the consideration of mechanical structure of shape analysis and physical constraints, the actual workspace and boundary surface expression of robot can be obtained. Furthermore, the singularity of the obtained workspace was analyzed. According to the comparison of workspace measured by the three coordinate measuring instrument and the workspace obtained by 3-D software, the validity of this analytic method was verified by using the error analysis method, which layed foundation for the next step to figure out the influence of mechanical parameters on the workspace and do some work on the size optimization of the parallel robot.

**Key words:** parallel robot; surface-sweep analysis; shape analysis; workspace; boundary surface expression

收稿日期: 2016-10-31 修回日期: 2016-11-28

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51375507)、重庆市基础与前沿研究计划项目(cstc2016jcyjA0253)和流体传动与机电系统国家重点实验室开放基金项目(GZKF-201503)

**作者简介:** 牟家旺(1992—),男,博士生,主要从事智能控制、机器人与流体传动研究,E-mail: moujiawang@qq.com

**通信作者:** 于今(1964—),男,副教授,主要从事流体传动与智能控制、机器人研究,E-mail: yj93@cqu.edu.cn

## 引言

自从 CLAVEL<sup>[1]</sup> 提出 Delta 三自由度并联机器人以来,由于其具有更好的承载能力、运动精度和刚度而被广泛应用于工程中,也一直是国际上研究的热点。国内外研究的少自由度并联机器人多为转动副的 Delta 机器人,而 Tripod 并联机器人是以平移副代替转动副,在大尺寸结构参数的情况下,电机的负载转动惯量更小,有更好的应用前景。在把并联机器人应用于工程实际过程中,首先需要解决的问题就是确定一个已知机械结构参数的机器人工作空间。现有 Tripod 并联机器人工作空间的研究很多,大多采用数值法中的三维搜索法<sup>[2-3]</sup>或者用计算机辅助模拟法确定工作空间<sup>[4]</sup>。GOSELIN<sup>[5]</sup>则利用圆弧相交的方法来确定 6 自由度并联机器人的定姿态工作空间,并给出了工作空间的 3 维表示,此法以求工作空间的边界为目的,且可以直接计算工作空间的体积。FICHER<sup>[6]</sup>采用固定 6 个位姿参数中的 3 个姿态参数和一个位置参数,而变换其他 2 个参数研究了 6 自由度并联机器人的工作空间。MASORY 等<sup>[7]</sup>同时考虑到各关节转角的约束、各杆长的约束和机构各构件的干涉来确定并联机器人的工作空间,且采用数值积分的方法计算工作空间的体积,比较接近实际。采用数值法虽然直观,但是存在计算时间长,边界曲面存在误差,不能求解完全的解。LI 等<sup>[8]</sup>提出一种综合考虑空间利用率和全局空间灵活度的工作空间优化方法,其核心的工作空间求解还是采用数值搜索法。

相对于解析法,数值法求解无法获得准确的边界曲面方程,只能有直观的认识,无法准确获取空间尺寸与机械结构尺寸的数学关系,从而无法根据空间需求定向地调整机械结构参数<sup>[9-11]</sup>。

本文采用曲面扫略分析结合机械结构形位约束的数形方法,以正逆解<sup>[12-14]</sup>的算法为基础,分析方程特点得到并联机器人单开链子空间范围,求解边界曲面的解析表达式,从而得出空间尺寸与机械结构尺寸的关系,为以空间尺寸为标准的设计提供理论依据。

## 1 Tripod 机器人运动学模型建立

Tripod 并联机构由上、下 2 个等边三角形平台及 3 条完全相同的支链组成,如图 1 所示,每条支链都由 1 个平移运动的电缸(平移副 P)和 1 个平行四边形机构组成,电缸与上面静平台以一个固定角度固定,电缸滑块与平行四边形机构以虎克铰(U 副)连接,平行四边形与下面的动平台也以虎克铰(U

副)连接。由空间自由度计算公式可知,此机构有 3 个自由度,动平台只能实现 3 个方向的平动。根据运动副的连接顺序,Tripod 机器人又叫 3-PUU 型并联机器人。

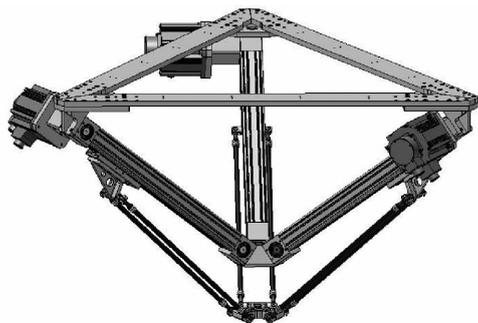


图 1 并联机器人三维模型

Fig. 1 3-D model of parallel mechanism

在静平台上固连基坐标  $OXYZ$ ,坐标原点位于静平台中心, $X$ 轴过点  $A_1$ , $Y$ 轴平行于  $A_2A_3$ 。 $OA_1$ 到  $A_1B$ 、 $OA_2$ 到  $A_2B$ 、 $OA_3$ 到  $A_3B$ 的转角分别为  $\alpha_1$ 、 $\beta_1$ 、 $\theta_1$ ,静平台为边长为  $L$ 的等边三角形,动平台为边长为  $R$ 的等边三角形,平行四边形杆件机构简化为一个杆,如图 2 中  $C_iD_i$ 长度为  $M$ 。滑块距离  $A_i$ 点的距离为滑块的滑行距离  $s_i$ ;根据杆长约束建立方程式

$$\sqrt{|C_iD_i|^2} = M \quad (1)$$

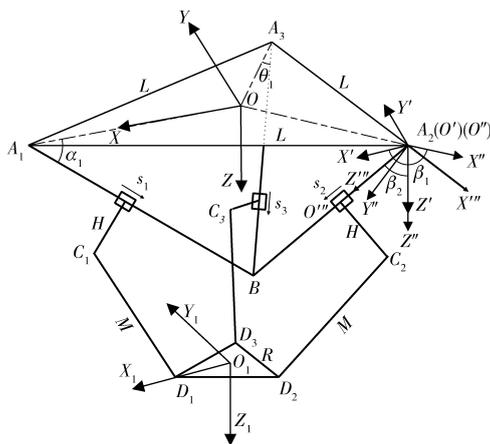


图 2 并联机器人运动简图

Fig. 2 Kinematic diagram of parallel mechanism

设坐标系  $OXYZ$  中  $C_i$ 、 $D_i$ 的坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ 、 $(X_i, Y_i, Z_i)$ ,则式(1)可整理为

$$(x_i - X_i)^2 + (y_i - Y_i)^2 + (z_i - Z_i)^2 = M^2 \quad (2)$$

以第 2 条支链为例,平移坐标系  $OXYZ$  原点到  $A_2$  得到坐标系  $O'X'Y'Z'$ ,绕  $Z'$ 轴逆时针旋转坐标系  $O'X'Y'Z'$ ,角度为  $\beta_1$ ,使  $X$ 轴平行于  $OA_2$ 得到坐标系  $O''X''Y''Z''$ ,再绕  $Y''$ 轴顺时针旋转坐标系  $O''X''Y''Z''$ ,角度为  $\beta_2$ ,使  $Z''$ 轴平行于电缸方向得到坐标系  $O'''X'''Y'''Z'''$ 。则在坐标系  $O'''X'''Y'''Z'''$ 下  $C_2$ 点的坐标为  $(H, 0, s_2)$ ,则在坐标系  $OXYZ$  下的坐标  $(x_2, y_2, z_2)$ 为

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{AB} \begin{bmatrix} H \\ 0 \\ s_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6}L \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 & 0 & -\frac{L}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\beta_1 & 0 & \sin\beta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta_2 & 0 & \cos\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在动平台上固连坐标系  $O_1X_1Y_1Z_1$ , 坐标原点位于动平台中心点  $O_1$ ,  $X_1$  轴过点  $D_1$ ,  $Y_1$  轴平行于  $D_2D_3$ 。在坐标系  $OXYZ$  中, 令坐标系  $O_1X_1Y_1Z_1$  的原点坐标为  $(X, Y, Z)$ , 研究机器人的工作空间即研究动平台中心点, 即  $O_1(X, Y, Z)$  可到达的运动空间, 则  $D_2$  坐标为

$$\begin{cases} X_2 = X - \frac{\sqrt{3}}{6}R \\ Y_2 = Y - \frac{R}{2} \\ Z_2 = Z \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)、(4)代入式(2)中得到

$$\begin{aligned} & \left[ X - \left( \frac{\sqrt{3}}{6}R - \frac{\sqrt{3}}{6}L - H\cos\beta_1\cos\beta_2 + s_2\cos\beta_1\sin\beta_2 \right) \right]^2 + \\ & \left[ Y - \left( \frac{R}{2} - \frac{L}{2} - H\cos\beta_2\sin\beta_1 + s_2\sin\beta_1\sin\beta_2 \right) \right]^2 + \\ & [Z - (s_2\cos\beta_2 - H\sin\beta_2)]^2 = M^2 \end{aligned} \quad (5)$$

同理其他 2 条支链的方程为

$$\begin{aligned} & \left[ X - \left( \frac{\sqrt{3}}{3}L - \frac{\sqrt{3}}{3}R + H\cos\alpha_1 + s_1\sin\alpha_1 \right) \right]^2 + Y^2 + \\ & [Z - (s_1\cos\alpha_1 - H\sin\alpha_1)]^2 = M^2 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \left[ X - \left( \frac{\sqrt{3}}{6}R - \frac{\sqrt{3}}{6}L - H\cos\theta_1\cos\theta_2 + s_3\cos\theta_1\sin\theta_2 \right) \right]^2 + \\ & \left[ Y - \left( \frac{L}{2} - \frac{R}{2} - H\cos\theta_2\sin\theta_1 + s_3\sin\theta_1\sin\theta_2 \right) \right]^2 + \\ & [Z - (s_3\cos\theta_2 - H\sin\theta_2)]^2 = M^2 \end{aligned} \quad (7)$$

在已知电缸行程  $s_1, s_2, s_3$  情况下, 3 个未知数 3 个方程联立方程式(5)~(7)得到动平台中心坐标  $(X, Y, Z)$ , 即为 3-PUU 机器人运动学正解; 在已知动平台中心坐标  $(X, Y, Z)$  的情况下联立方程式(5)~(7)得到每个电缸的行程  $s_i$ , 即为 3-PUU 机器人运动学逆解。

## 2 工作空间解析

观察式(5)~(7)为空间球面方程形式, 令所描述的球面分别表示为  $\psi_i (i=1, 2, 3)$ 。球心的坐标在机械结构参数  $L, R, H, \alpha_i, \beta_i, \theta_i$  为定值时, 球面  $\psi_i$  只随着  $s_i$  的变化而移动。当电缸的行程  $s_i$  变化时, 圆心的轨迹分别为

$$\begin{cases} \frac{x_1 - \left( \frac{\sqrt{3}}{3}L - \frac{\sqrt{3}}{3}R + H\cos\alpha_1 \right)}{\sin\alpha_1} = \frac{z_1 + H\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = s_1 \\ y_1 = 0 \quad (s_{\min} < s_1 < s_{\max}) \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{x_2 - \left( \frac{\sqrt{3}}{6}R - \frac{\sqrt{3}}{6}L - H\cos\beta_1\cos\beta_2 \right)}{\cos\beta_1\sin\beta_2} = \\ & \frac{y_2 - \left( \frac{R}{2} - \frac{L}{2} - H\cos\beta_2\sin\beta_1 \right)}{\sin\beta_1\sin\beta_2} = \\ & \frac{z_2 - H\sin\beta_2}{\cos\beta_2} = s_2 \quad (s_{\min} < s_2 < s_{\max}) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{x_3 - \left( \frac{\sqrt{3}}{6}R - \frac{\sqrt{3}}{6}L - H\cos\theta_1\cos\theta_2 \right)}{\cos\theta_1\sin\theta_2} = \\ & \frac{y_3 - \left( \frac{L}{2} - \frac{R}{2} - H\cos\theta_2\sin\theta_1 \right)}{\sin\theta_1\sin\theta_2} = \\ & \frac{z_3 - H\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = s_3 \quad (s_{\min} < s_3 < s_{\max}) \end{aligned} \quad (10)$$

上述 3 条轨迹分别记作  $L_i (i=1, 2, 3)$ 。当电缸的行程  $s_i$  变化时, 球面  $\psi_i$  的圆心沿着空间直线  $L_i$  连续移动, 球面  $\psi_i$  扫过的三维空间就是动平台中心  $O_1$  在支链  $i$  约束下的变化范围, 如图 3 所示。

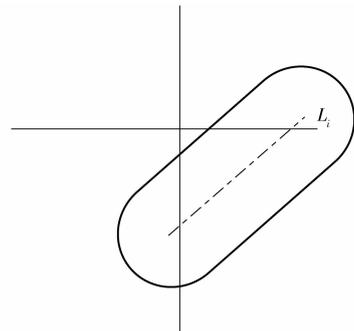


图3 单开链子空间边界截面图

Fig. 3 Sectional view of single-open-chain sub-space boundary

根据球面在空间中的扫略过程分析可知, 每个支链空间的外边界面可分为 3 部分, 前后两端各有 2 个半球面, 中间为空间圆柱面, 圆柱面轴线过  $L_i$ , 如图 4 所示。

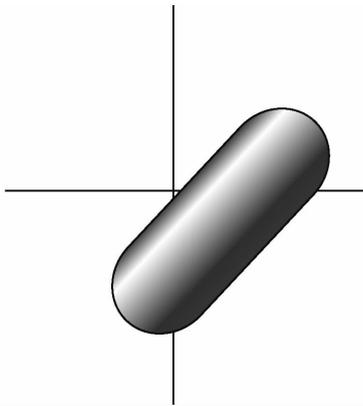


图 4 单开链子空间三维图

Fig. 4 3-D model of single-open-chain sub-space

当给定  $s_i$  变化范围时, 两端球面的方程已知, 则求解单支链运动空间边界曲面方程的问题简化为求中间空间圆柱面方程的问题。由于此空间圆柱面的准线和母线方程都容易求得, 联立 2 个方程, 则可以求出空间任意方向圆柱面的表达式。由下文可知, 圆柱面不是空间的边界面, 所以方程结果不在文中详细描述。

根据上述分析, 并代入并联机器人机械结构参数:  $L = 1\ 300.41\ \text{mm}$ ,  $R = 103.923\ \text{mm}$ ,  $M = 610\ \text{mm}$ ,  $H = 98.5\ \text{mm}$ ,  $\alpha_1 = -52^\circ$ ,  $\beta_1 = -120^\circ$ ,  $\beta_2 = -52^\circ$ ,  $\theta_1 = 120^\circ$ ,  $\theta_2 = -52^\circ$ 。当 3 个支链约束下确定的 3 个三维空间求交集时, 得到的公共空间就是动平台中心  $O_1$  在不考虑其他约束条件下的理想可达空间, 如图 5 所示。

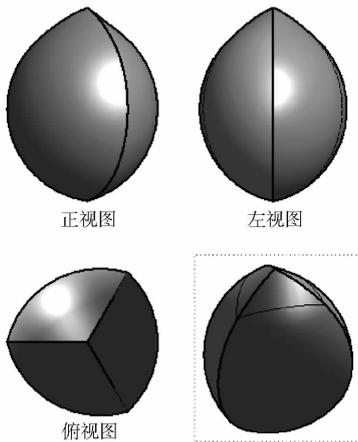


图 5 理想可达空间三视图

Fig. 5 Three views of ideal reachable space

结合机器人的机械结构形位特征, 对上述可达空间进行形位分析。当式(5)~(7)中  $s_i$  取最小值时, 得到的 3 个球面分别为 3 个支链中一条支链滑块在上极限位置, 另外 2 个支链滑块任意运动得到的面。根据实际情况中电缸和平行四边形连杆机构的安装位置约束可知, 动平台中心  $O_1$  只可能出现在以这 3 个球面为上边界面的以下空间中, 否则平行

四边形机构将会和电缸发生干涉, 所以在上述动平台  $O_1$  理想可达空间中切去这 3 个球体的空间, 得到考虑了杆件干涉、不考虑虎克铰限制的可达空间, 如图 6 所示。

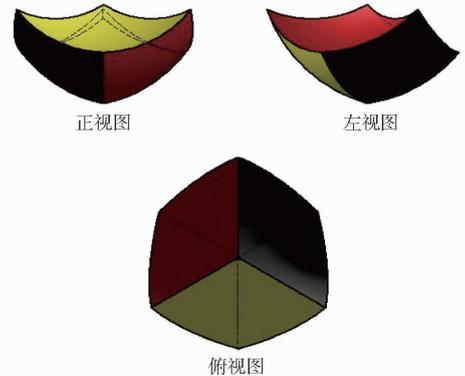


图 6 工作空间三视图

Fig. 6 Three views of workspace

空间由上下各 3 个球面包络出来, 黑色上凹面是式(5)取  $s_i$  为最小值时确定的球面, 黑色下凸面是式(5)取  $s_i$  为最大值时确定的球面, 红色上凹面是式(6)取  $s_i$  为最小值时确定的球面, 红色下凸面是式(6)取  $s_i$  为最大值时确定的球面, 黄色上凹面是式(7)取  $s_i$  为最小值时确定的球面, 黄色下凸面是式(7)取  $s_i$  为最大值时确定的球面。

### 3 虎克铰约束分析

研究的 Tripod 机器人虎克铰结构如图 7 所示。

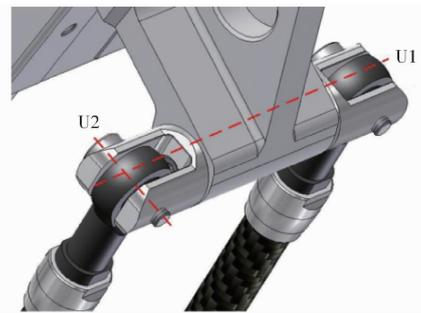


图 7 虎克铰结构图

Fig. 7 Diagram of Hooke hinge structure

与传统的虎克铰不同, 所设计的虎克铰第 1 个自由度的旋转副 U1 在物理上没有角度限制, 可以  $360^\circ$  的旋转, 旋转轴为 U1 第 2 个自由度的旋转副 U2 有角度限制, 旋转轴为 U1, 建立虎克铰的简化模型, 如图 8 所示。

过轴线 U1, 垂直于 U2 轴线创建平面 2, 其法向量设为  $n_1$ ; 过 U2 旋转副的对称中心, 平行于轴线 U2 并垂直于轴线 U1 创建平面 1, 其法向量设为  $n_2$ 。以第 2 条支链为例, 由于旋转副 U1 没有结构上的角度限制, 所以虎克铰的约束主要来自于旋转副 U2, 由结构特点可知, 旋转副 U2 的旋转范围关于平

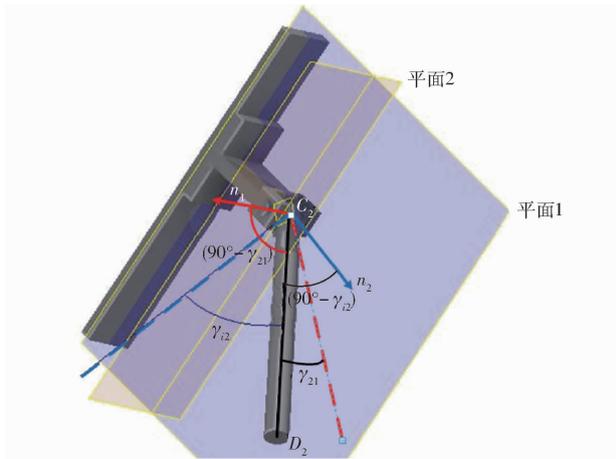


图8 虎克铰角度说明图

Fig. 8 Diagram of Hooke hinge angle

面1对称,设杆件 $C_2D_2$ 与平面1的夹角为 $\gamma_{21}$ ,所以与平面1的法向量 $n_1$ 的夹角为 $90^\circ - \gamma_{21}$ ,根据几何关系可知

$$\gamma_{21} = \arcsin \frac{n_1^T C_2D_2}{|C_2D_2| |n_1|} \quad (11)$$

根据实际的结构限制可知,  $-40^\circ \leq \gamma_{21} \leq 40^\circ$ , 由于 $n_1$ 为平面1的法向量,可得

$$n_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

由前文论述可知

$$\begin{cases} \overrightarrow{C_2D_2} = (x_2 - X_2, y_2 - Y_2, z_2 - Z_2) \\ |C_2D_2| = M \end{cases} \quad (13)$$

将式(3)、(4)、(12)、(13)代入式(11)中,并代入机器人结构参数,可得

$$-40^\circ \leq \gamma_{21} = \arcsin \frac{\sqrt{3}X - Y}{1220} \leq 40^\circ \quad (14)$$

整理可得

$$1220 \sin(-40^\circ) \leq \sqrt{3}X - Y \leq 1220 \sin 40^\circ \quad (15)$$

同样的方法可得到其他2条支链的方程,支链1为

$$610 \sin(-40^\circ) \leq Y \leq 610 \sin 40^\circ \quad (16)$$

支链3为

$$1220 \sin(-40^\circ) \leq -\sqrt{3}X - Y \leq 1220 \sin 40^\circ \quad (17)$$

将上述表达式(15)~(17)表示成几何描述即为工作空间必须为表达式所表示的6个平面包围的范围内,如图9所示。

由图9可知,用扫略分析结合机械结构形位分析方法得到的工作空间(图6)都在虎克铰约束范围内,满足虎克铰约束条件。

#### 4 奇异性分析

奇异位形是当机构进入某种临界状态时所具有

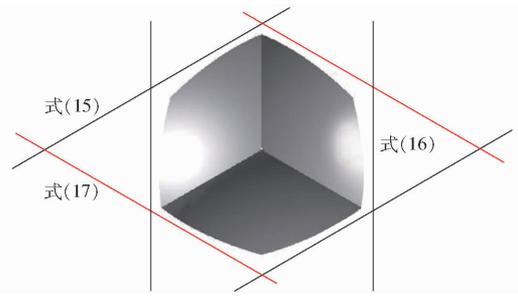


图9 虎克铰约束的范围

Fig. 9 Range of Hooke hinge constraint

的特定形态,在这种临界状态下,机构的实际自由度不再与理论自由度相等,即存在两种情况:一是机构丧失了应有的自由度;二是机构获得了额外的自由度。机构自由度的丧失意味着机构某种功能的丧失;机构获得额外的自由度则意味着即使锁定所有的驱动输入,机构在外力的作用下仍能运动,导致机构失控。一般而言,机构奇异位形研究的内涵体现在2个方面:对于确定的机构,找出它的所有奇异位形以及如何有效地避免机构奇异位形。分析式(5)~(7)可知,其描述的是动平台坐标 $O_1(X, Y, Z)$ 与电缸位移 $S(s_1, s_2, s_3)$ 的关系,可表示为

$$F(Q, S) = O \quad (18)$$

式中  $Q$ ——动平台位置矢量

$S$ ——平移驱动副的位置矢量

对零矢量方程(18)中各分量 $Q$ 、 $S$ 、 $O$ 分别对时间求导,可得

$$J_Q \dot{Q} + J_S \dot{S} = 0 \quad (19)$$

其中

$$J_Q = \frac{\partial F}{\partial Q} \quad J_S = \frac{\partial F}{\partial S}$$

由式(19)可知当 $\det(J_S) = 0$ 时,存在非零向量 $Q$ 产生零矢量 $S$ ,当 $\det(J_Q) = 0$ 时,存在非零向量 $S$ 产生零矢量 $Q$ ,第1种情况即为逆运动学奇异,给定一个指定的运动方向,却得不到驱动的平移量,这一类情况多发生于机器人工作空间边界处,所有图5所示的工作空间边界(其中包括单支链工作空间球体交界处)都是奇异位置,第2种情况即为正运动学奇异,给定驱动的平移量,末端动平台位置矢量不变,即无论驱动如何运动,动平台始终不变。由于这一类奇异位置会在工作空间内部,所以本文主要讨论这一类奇异位置。令 $J = -J_S^{-1} J_Q$ 时,则 $\dot{S} = J\dot{Q}$ 。将式(5)~(7)对时间 $t$ 进行求导,得到

$$\begin{bmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{t} & \frac{-2Y}{t} & \frac{n}{t} \\ \frac{l}{r} & \frac{p}{r} & \frac{q}{r} \\ \frac{u}{s} & \frac{v}{s} & \frac{w}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned}
 m &= -2(X + 0.79s_1 - 751.4) \\
 n &= 2(0.62s_1 - Z + 77.6) \\
 l &= -2(X - 0.39s_2 + 375.7) \\
 p &= -2(Y - 0.69s_2 + 650) \\
 q &= 2(0.62s_2 - Z + 77.6) \\
 u &= -2(X - 0.39s_3 + 375.7) \\
 v &= -2(Y + 0.68s_3 - 650) \\
 w &= 2(0.62s_2 - Z + 77.6)
 \end{aligned}$$

则

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{m}{t} & \frac{-2Y}{t} & \frac{n}{t} \\ \frac{l}{r} & \frac{p}{r} & \frac{q}{r} \\ \frac{u}{s} & \frac{v}{s} & \frac{w}{s} \end{bmatrix} \quad (21)$$

即  $\mathbf{J}$  是该并联机构的雅可比矩阵, 当  $\det(\mathbf{J}) = 0$  时, 表明机构位于奇异位, 机构丧失一个自由度。求  $|\mathbf{J}| = 0$ , 经过化简得到

$$|\mathbf{J}| = \frac{m}{t} \begin{vmatrix} 1 & \frac{-2Y}{m} & \frac{n}{m} \\ 0 & \frac{q}{r} + \frac{2Yp}{mr} & \frac{l}{r} - \frac{np}{mr} \\ 0 & \frac{v}{s} + \frac{2Yu}{ms} & \frac{w}{s} - \frac{nu}{ms} \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

由此得到

$$\frac{mq + 2Yq}{tr} = \frac{mw - nu}{ms} = \frac{ml - nq}{mr} = \frac{mv + 2Yu}{ts} \quad (23)$$

则  $qw = lv, pw = ul, pv = qu$ , 然后代入方程(5)~(7)。得到当  $X = Y = Z = 0$  时,  $|\mathbf{J}| = 0$ , 也就是静平台的原点位置时, 此时上下平台半径相等, 三支架平行, 机构位于奇异位置。由于  $Z = 0$ , 所以静平台与动平台在同一平面。但此位置实际上是机构不能达到的位置, 所以工作空间除边界外内部不存在奇异位置。

### 5 样机工作空间扫描实验验证

为验证所提出的工作空间解析方法的正确性, 进行了样机工作空间扫描实验。实验所用 3-PUU 并联机器人如图 10 所示, 并联机器人机械结构参数与上述理论分析的机器人参数相同。采用 FARO 公司激光跟踪仪 Vantage (测试精度为  $(16 + 0.8) \mu\text{m}/\text{m}$ ) 和相应的辅助装夹设备来实时测量动平台中心的位置。

空间扫描方法具体如下: 3-PUU 机器人在手动模式下, 选定一个  $Z$  平面进行扫描, 扫描的轨迹为先从  $(X, Y) = (0, 0)$  的点开始,  $X$  单轴运动到负极限位置, 再将  $Y$  轴单轴在  $X, Z$  坐标固定的条件下从负极限运动到正极限位置, 激光跟踪仪以  $Y$  轴运动 5 mm 为一个步长, 记录一个点的坐标位置。当  $Y$  轴

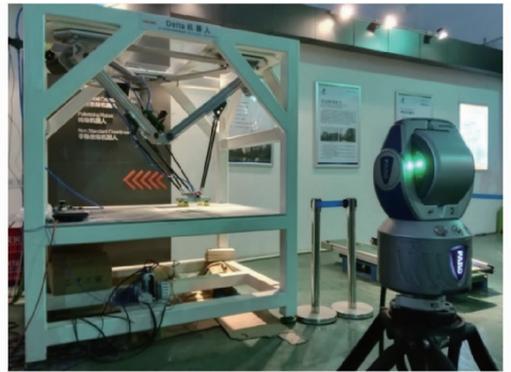


图 10 测试设备现场图

Fig. 10 Scene diagram of test equipment

运动到正极限位置后,  $X$  坐标增加 10 mm, 再重复上述  $Y$  轴操作, 完成整个  $Z$  平面的扫描。测试现场图如图 10 所示。由于难以对机器人完整的工作空间进行直接对比, 为了验证理论计算的结果, 任意选取 2 个  $Z$  切面来进行平面比较, 比较理论计算和实验测试得到的空间切面是否相同, 验证理论结果的正确性。由理论分析结果可知, 工作空间上下两部分的切面形状存在较大的差异, 所以在上下两部分分别选取 2 个平面进行验证, 一个平面为  $Z = 750 \text{ mm}$  所对应的平面; 另一个平面为  $Z = 1000 \text{ mm}$  所对应的平面; 将理论分析空间切面和实验测试空间切面的数据放在一起对比, 如图 11、12 所示。

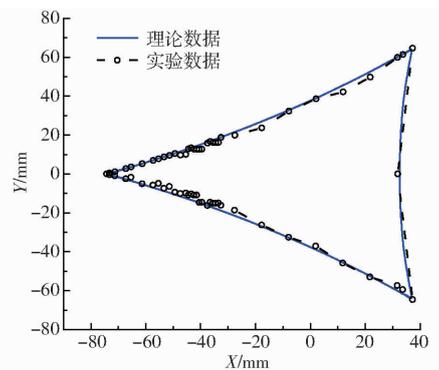


图 11  $Z = 750 \text{ mm}$  理论和测试数据对比

Fig. 11 Comparison of theory and test data of  $Z = 750 \text{ mm}$  plane

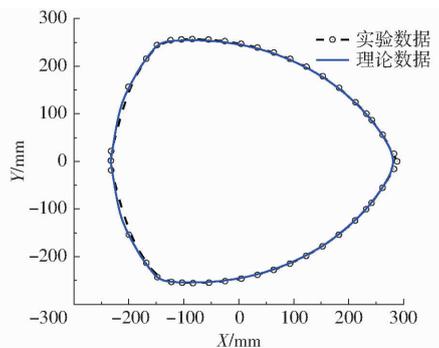


图 12  $Z = 1000 \text{ mm}$  理论和测试数据对比

Fig. 12 Comparison of theory and test data of  $Z = 1000 \text{ mm}$  plane

如图 11、12 所示,2 个切面的大小、形状基本一致。为了证明理论和实际测试数据吻合,以每个测试边界点为圆心画圆,使每个圆与理论数据曲线相切,记录每个圆的半径。以测试点的 X 轴坐标为横坐标,以对应圆的半径为纵坐标,作出理论与测试数据分析图,如图 13 所示。

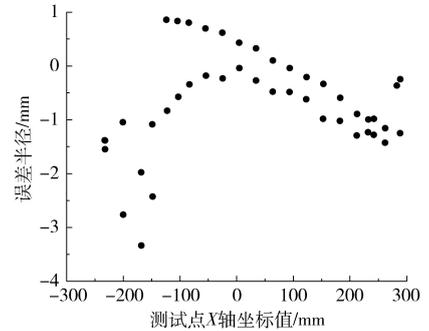
由图 13 可知,2 个平面的误差范围绝对值最大为 3.337 mm,都小于 5 mm,即小于一个步长。考虑到测试数据由于机器人安装误差、控制器运动控制误差和测试误差的细微影响,上述误差在允许范围内,可以证明理论和实际测试数据吻合,理论分析结果正确。

## 6 结论

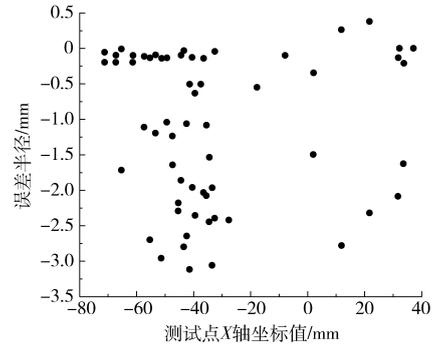
(1) 建立 Tripod 并联机器人运动学模型,并得出了机器人运动学正逆解。

(2) 在正逆解的基础上,提出了一种 Tripod 并联机器人工作空间解析方法:通过分析曲面扫略范围结合机械结构形位约束得到工作空间包络曲面的数学模表达,从而根据曲面表达式建立工作空间重要尺寸参数和机械结构参数之间的数学关系,从而获得了精确的机器人三维工作空间表达式,解决了常用数值分析法所不能解决的问题。

(3) 考虑了虎克铰的限制,并做了理论分析,得出分析所得工作空间满足虎克铰的限制;并做了空



(a)  $Z=1000$  mm



(b)  $Z=750$  mm

图 13  $Z=1000$  mm 与  $Z=750$  mm 平面误差

Fig. 13 Error analysis of data of  $Z=1000$  mm and  $Z=750$  mm plane

间奇异性分析,没有奇异点出现。

(4) 最后,用实验测试的空间三维扫描数据和理论计算工作空间进行对比,结果一致,证明了所提出的工作空间解析方法的正确性,从而为机器人工作空间计算、机械结构参数设计等提供了理论依据。

## 参 考 文 献

- 1 CLAVEL R. Une nouvelle structure de manipulateur parallèle pour la roboti quelégère [J]. APPI., 1989, 23: 501 - 519.
- 2 QIAN Y U, WANG Q, CHEN G, et al. Workspace and singularity analysis of 3/3 - RRRS parallel [J]. Journal of Theoretical and Applied Information Technology, 2013, 48(3): 1423 - 1429.
- 3 REZAEI A, AKBARZADEH A, NIA P M, et al. Position, Jacobian and workspace analysis of a 3 - PSP spatial parallel manipulator[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2013, 29(4): 158 - 173.
- 4 YU M L, WANG J R, LI J, et al. Kinematics analysis of exoskeletons rehabilitation robot based on ADAMS [C] // Advanced Materials Research, 2012, 479: 2333 - 2338.
- 5 GOSELIN C M. Determination of the workspace of 6 - DOF parallel manipulators [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1990, 112(3): 331 - 336.
- 6 FICHER E F. A Stewart-platform based manipulator: general theory and practical construction [J]. International Journal of Robotics Research, 1986, 5(2): 157 - 182.
- 7 MASORY O, WANG J. Workspace evaluation of Stewart platforms [J]. Advanced Robotics, 1994, 9(4): 443 - 461.
- 8 LI Y, XU Q. A new approach to the architecture optimization of a general 3 - PUU translational parallel manipulator [J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2006, 46(1): 59 - 72.
- 9 HARADA T, DONG K, ITOIGAWA T. Design optimization of active scanning probe using parallel link mechanism [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2012, 13(8): 1387 - 1394.
- 10 RUGBANI A, SCHREVE K. Modeling and analysis of the geometrical errors of a parallel manipulator micro-CMM [C] // International Precision Assembly Seminar, 2012: 105 - 117.
- 11 陈根良,王皓,来新民,等. 基于广义坐标形式牛顿-欧拉方法的空间并联机构动力学正问题分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(7): 41 - 48.
- 12 CHEN Genliang, WANG Hao, LAI Xinmin, et al. Workspace resolution and mechanism optimization on Delta parallel mechanism driven by prismatic pair [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(7): 41 - 48. (in Chinese)
- 13 ZHAO Y, QIU K, WANG S, et al. Inverse kinematics and rigid-body dynamics for a three rotational degrees of freedom parallel

- manipulator[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2015, 31: 40 – 50.
- 13 牛雪梅, 高国琴, 刘辛军, 等. 三自由度驱动冗余并联机构动力学建模与试验[J]. *农业工程学报*, 2013, 29(16): 31 – 41. NIU Xuemei, GAO Guoqin, LIU Xinjun, et al. Dynamics modeling and experiments of 3 – DOF parallel mechanism with actuation redundancy[J]. *Transactions of the CSAE*, 2013, 29(16): 31 – 41. (in Chinese)
- 14 张清华, 张宪民. 平面 3 – RRR 柔性并联机器人残余振动主动控制[J/OL]. *农业机械学报*, 2013, 44(2): 232 – 237, 266. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20130242&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20130242&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.02.042. ZHANG Qinghua, ZHANG Xianmin. Active residual vibration control of planar 3 – RRR flexible parallel robots [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013, 44(2): 232 – 237, 266. (in Chinese)
- 15 黄田, 汪劲松, WHITEHOUSE D J. Stewart 并联机器人位置空间解析[J]. *中国科学(E 辑)*, 1998, 28(2): 136 – 145. HUANG Tian, WANG Jinsong, WHITEHOUSE D J. Workspace resolution on Stewart parallel mechanism [J]. *Science in China (Series E)*, 1998, 28(2): 136 – 145. (in Chinese)
- 16 梅江平, 高奔, 谭杨, 等. 3 – SPR 并联机构运动学分析[J/OL]. *农业机械学报*, 2012, 43(8): 215 – 220. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20120839&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20120839&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.08.039. MEI Jiangping, GAO Ben, TAN Yang, et al. Kinematic analysis of 3 – SPR parallel mechanism [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2012, 43(8): 215 – 220. (in Chinese)
- 17 崔国华, 周海栋, 王南, 等. 基于 Isight 的 3 – UPS – S 并联机器人机构多目标优化[J/OL]. *农业机械学报*, 2013, 44(9): 261 – 266. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20130945&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20130945&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.09.045. CUI Guohua, ZHOU Haidong, WANG Nan, et al. Multi-objective optimization of 3 – UPS – S parallel mechanism based on Isight [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013, 44(9): 261 – 266. (in Chinese)
- 18 LEE K M, SHAH D K. Dynamic analysis of a three degrees of freedom in parallel actuated manipulator[J]. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, 1988, 4(3): 361 – 367.
- 19 张彦斌, 张树乾, 吴鑫. 3 – CRPa 移动并联机构运动学分析与仿真[J/OL]. *农业机械学报*, 2012, 43(7): 200 – 205. [http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view\\_abstract.aspx?file\\_no=20120737&flag=1](http://www.j-csam.org/jcsam/ch/reader/view_abstract.aspx?file_no=20120737&flag=1). DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.07.037. ZHANG Yanbin, ZHANG Shuqian, WU Xin. Kinematic analysis and simulation of 3 – CRPa translational parallel mechanism [J/OL]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2012, 43(7): 200 – 205. (in Chinese)
- 20 冯李航, 张为公, 龚宗洋, 等. Delta 系列并联机器人研究进展与现状[J]. *机器人*, 2014, 36(3): 375 – 384. FENG Lihang, ZHANG Weigong, GONG Zongyang, et al. Developments of Delta-like parallel manipulators—a review [J]. *Robot*, 2014, 36(3): 375 – 384. (in Chinese)
- 21 高名旺, 张宪民, 刘晗. 3 – RRR 高速并联机器人运动学设计与实验[J]. *机器人*, 2013, 35(6): 716 – 722. GAO Mingwang, ZHANG Xianmin, LIU Han. Experiment and kinematic design of 3 – RRR parallel robot with high speed [J]. *Robot*, 2013, 35(6): 716 – 722. (in Chinese)

~~~~~

(上接第 412 页)

- 11 LI M, ZHANG Y F, QIU Z M. Toward effective mechanical design reuse: CAD model retrieval based on general and partial shapes [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(12): 1 – 8.
- 12 BAI J, GAO S M, TANG W H, et al. Design reuse oriented partial retrieval of CAD models [J]. *Computer-Aided Design*, 2010, 42(12): 1069 – 1084.
- 13 SUNIL V B, AGARWAL R, PANDE S S. An approach to recognize interacting features from B-Rep CAD models of prismatic machined parts using a hybrid (graph and rule based) technique[J]. *Computer in Industry*, 2010, 61(7): 686 – 701.
- 14 QUINTANA V, RIVEST L, PELLERIN R, et al. Will model-based definition replace engineering drawings throughout the product lifecycle? A global perspective from aerospace industry [J]. *Computers in Industry*, 2010, 61(5): 497 – 508.
- 15 ALEMANNI M, DESTEFANIS F, VEZZETTI E. Model-based definition design in the product lifecycle management scenario [J]. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 52(1): 1 – 14.
- 16 OSADA R, FUNKHOUSER T, CHAZELLE B, et al. Shape distributions[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2002, 21(4): 807 – 832.
- 17 陈纯. 计算机图像处理技术与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.
- 18 JAYANTI S, KALYANARAMAN Y, IYER N, et al. Developing an engineering shape benchmark for CAD models [J]. *Computer-Aided Design*, 2006, 38(9): 939 – 953.
- 19 MA L J, HUANG Z D, WANG Y W. Automatic discovery of common design structures in CAD models [J]. *Computers & Graphics*, 2010, 34(5): 545 – 555.
- 20 SHAO Y, LIU Y, LI C. Intermediate model based efficient and integrated multidisciplinary simulation data visualization information reuse [J]. *Advances in Engineering Software*, 2015, 90: 138 – 151.