doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.08.045

粘弹阻尼抗振结构双向渐进法拓扑动力学优化

贺红林　陶　结　刘尧弟　夏自强
（南昌航空大学航空制造工程学院，南昌 330063）

摘要：基于阻尼结构各层形变位移关系，推导了结构振动微分方程。构建了以阻尼比最大化为优化目标，阻尼材料用量为约束，阻尼单元状态为设计变量的拓扑优化数学模型。为寻找结构优化迭代方向，推导了模态阻尼比灵敏度。建立阻尼单元增删准则，利用独立网格滤波技术进行滤波处理，采用双向渐进优化算法对阻尼结构进行了拓扑优化。按常规渐进法优化后，1阶、3阶阻尼比增幅分别为54.51%、36.21%，而按双向渐进优化所得相应阶次的模态阻尼比增幅则分别达76.69%、58.36%，且可有效改善阻尼结构优化后的棋盘格现象。为验证双向渐进优化算法拓扑优化结果，对阻尼结构进行谐响应分析与仿真，结果表明：采用双向渐进法优化时，结构特定阶次响应幅值更低，减振效果更佳。

关键词：阻尼抗振结构；双向渐进法；模态阻尼比；拓扑动力学优化
中图分类号：TH113.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1000-1298(2016)08-0339-07

Dynamic Optimization of Damping Anti-vibration Structure Topology Based on BESO Method

He Honglin　Tao Jie　Liu Yaodi　Xia Ziqiang
(*School of Aeronautical Manufacturing*, *Nanchang Hangkong University*, *Nanchang* 330063, *China*)

Abstract: In order to lay a certain foundation for optimization of mechanical structure vibration reduction, the viscoelastic damping material optimal layout was studied. Damping materials dosage was restricted to realize structural lightweight design. Based on the Hamilton variation principle and the deformation displacement relationship of damping structure, structure vibration differential equation was deduced. A topological optimization mathematical model for constrained damping structure that used structure maximum damping ratio as the optimization goal, structure damping materials consumption as constraint condition, structure damping element status as design variables was built. To search structure topological optimization iteration direction, the modal damping ratio of sensitivity was derived. The constrained damping element adding and deleting criterion was presented, the program for constrained damping structure was established, and independent mesh filter method was adopted to avoid the checkerboard. The bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) can improve the utilization efficiency of damping materials, thus BESO was used to optimize the damping structure. After evolutionary structural optimization (ESO) for damping structure, the increases of the first and the third order damping ratios were 54.51% and 36.21%, respectively, while after BESO for damping structure, the increases were 76.69% and 58.36%, respectively, and the phenomenon of checkerboard was improved, the damping material layout was consistent with structural strain energy figure. To verify the result of topology optimization for damping layout, harmonic response analysis was carried out on the constrained layer damping structure, the simulation results showed that the structural response amplitude was low and vibration suppression effect was good by means of BESO method.

Key words: damping anti-vibration structure; bi-directional evolutionary structural optimization; modal damping ratio; topology dynamic optimization

---

收稿日期：2016-01-23　修回日期：2016-03-07
基金项目：国家自然科学基金项目(51265040、51565039)和江西省自然科学基金项目(20151BAB206036)
作者简介：贺红林(1967—)，男，教授，博士，主要从事复杂结构动力学优化和精密驱动技术研究，E-mail：hehonglin1967@nchu.edu.cn

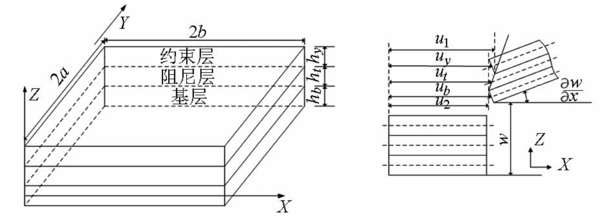
引言

对机械结构进行减振优化设计，可有效降低结构振动与噪声。传统设计是不断进行人工试凑及定性分析，主要依靠设计者的经验和直观判断来修改设计参数，不断被动地重复分析结构性能。而结构优化设计是将最优化原理与工程设计有机结合，利用数学工具和计算机技术，从众多方案中寻找出最佳设计方案，以缩短设计周期、提高设计的质量和效率。在结构布局确定的情况下，修改结构尺寸和形状的程度有限，不利于获得最优设计方案。而拓扑优化通过调整结构拓扑、改变材料布局，可在确保结构其他参数满足设计要求的前提下，使结构性能指标最优。许多金属薄板，如气流管道壁，受振动激励时，会产生较大噪声，若加大薄板厚度，可在相同激励条件下，降低结构振幅从而减小噪声，但这种简单加厚的方法并不一定经济合理[1]。故可在结构表面附加阻尼材料，当薄板结构振动时，部分能量可转换为热能，降低结构振动与噪声。但阻尼材料敷设位置的不同对于结构振动能量的损耗有着显著的影响。一般认为，对于约束阻尼结构，结构变形较大处阻尼材料耗能较多，可将阻尼材料敷设于模态应变较大处，但由于该方法忽视了阻尼层对结构模态的影响，且无法准确确定阻尼材料敷设位置，故仅可作为定性原则，较难利用该方法实现阻尼结构减振优化。因此，在满足确定的阻尼材料用量的前提下，将拓扑优化方法应用于阻尼材料优化配置。文献[2－13]的拓扑优化方法均存在不足之处，阻尼单元误删后，优化过程中不能恢复，可能较难得到全局最优解，且必须提供最大设计区域以供后续的优化删除，较多的单元数目导致优化分析时间过长[14－16]。双向渐进法在拓扑优化过程中不仅可删除低效单元，且可添加高效单元，从而使阻尼材料优化布局更为合理[17]，因此，本文在阻尼结构拓扑优化过程中引入双向渐进法。

1　约束阻尼结构数值建模

约束阻尼结构由基层、阻尼层、约束层构成[18]，厚度分别为 h_b、h_t、h_y，其有限元模型采用4结点矩形板单元，各结点有7个自由度，u_b、v_b 分别表示基层中面 X 与 Y 方向的位移，u_y、v_y 分别表示约束层中面 X 与 Y 方向的位移，w、θ_x、θ_y 分别表示阻尼结构中面在 Z 方向的位移，及绕 X、Y 轴方向的转角。

图1给出了约束阻尼结构变形几何关系。根据一阶剪切变形理论，阻尼结构各点在任意平面内 X 方向位移为



(a) 约束阻尼结构示意图　(b) 各层形变关系

图1　阻尼结构及各层变形几何关系

Fig. 1　Constrained damping structure and deformation of each layer

$$u = u_o - z(\partial w/\partial x) \quad (-h/2 \leqslant z \leqslant h/2) \tag{1}$$

式中　u_o——各层中面 X 方向位移

z——该点与中面的距离

h——阻尼结构各层厚度

根据式(1)可得阻尼层上顶端与下顶端 X 方向位移

$$\begin{cases} u_1 = u_y + \dfrac{h_y}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x} \\ u_2 = u_b - \dfrac{h_b}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \tag{2}$$

由图1各层之间变形关系，阻尼层绕 Y 轴转角与剪切变形可分别表示为

$$\varphi_x = (u_1 - u_2)/h_t \tag{3}$$

$$\vartheta_x = \varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{4}$$

则由式(2)～(4)可得

$$\vartheta_x = \frac{u_y - u_b}{h_t} + \left(\frac{h_y + h_b}{2h_t} + 1\right)\frac{\partial w}{\partial x} \tag{5}$$

由图1，阻尼层中性面 X 方向位移为

$$u_t = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \tag{6}$$

将式(2)代入式(6)，得

$$u_t = \frac{1}{2}\left(u_y + u_b + \frac{h_y - h_b}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{7}$$

阻尼层绕 X 轴的剪切变形与 Y 轴的位移可分别表示为

$$\vartheta_y = \frac{u_y - u_b}{h_t} + \left(\frac{h_y + h_b}{2h_t} + 1\right)\frac{\partial w}{\partial y} \tag{8}$$

$$v_t = \frac{1}{2}\left(v_y + v_b + \frac{h_y - h_b}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{9}$$

单元结点位移向量为

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = (u_{yi}, v_{yi}, u_{bi}, v_{bi}, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}) \quad (i = 1,2,3,4) \tag{10}$$

i 为单元结点量。定义单元自由度向量为

$$\boldsymbol{\Gamma}^e = (\boldsymbol{\Gamma}_1^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\Gamma}_3^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\Gamma}_4^{\mathrm{T}}) \tag{11}$$

根据平面矩形单元的位移模式，阻尼单元任一点的位移可表示为

$$\boldsymbol{N\Gamma}_e = (u_y, v_y, u_b, v_b, w, \theta_x, \theta_y) \tag{12}$$

另外，定义单元形函数矩阵 $\boldsymbol{N}$ 为

$$\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{N}_{uy}\quad \boldsymbol{N}_{vy}\quad \boldsymbol{N}_{ub}\quad \boldsymbol{N}_{vb}\quad \boldsymbol{N}_{w}\quad \boldsymbol{N}_{wx}\quad \boldsymbol{N}_{wy}] \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{N}_{uy}$、$\boldsymbol{N}_{vy}$、$\boldsymbol{N}_{ub}$、$\boldsymbol{N}_{vb}$、$\boldsymbol{N}_{w}$、$\boldsymbol{N}_{wx}$、$\boldsymbol{N}_{wy}$分别为单元结点自由度 u_y、v_y、u_b、v_b、w、θ_x、θ_y 的形函数向量。若将形函数位移分量代入式(7)、式(9)，则位移 u_t 与 v_t 的形函数向量为

$$\boldsymbol{N}_{ut}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}_{uy}+\boldsymbol{N}_{ub}-\frac{h_y-h_b}{2}\boldsymbol{N}_{wy}\right) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{N}_{vt}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{N}_{uy}+\boldsymbol{N}_{ub}+\frac{h_y-h_b}{2}\boldsymbol{N}_{wx}\right) \tag{15}$$

将形函数位移分量代入式(5)、式(8)，则得剪切应变 ϑ_x、ϑ_y 的形函数向量为

$$\boldsymbol{N}_{\vartheta xt}=\frac{1}{h_t}\left[\boldsymbol{N}_{uy}-\boldsymbol{N}_{ub}-\left(\frac{h_y+h_b}{2}+h_t\right)\boldsymbol{N}_{wy}\right] \tag{16}$$

$$\boldsymbol{N}_{\vartheta yt}=\frac{1}{h_t}\left[\boldsymbol{N}_{uy}-\boldsymbol{N}_{ub}+\left(\frac{h_y+h_b}{2}+h_t\right)\boldsymbol{N}_{wx}\right] \tag{17}$$

为求取阻尼结构各层的质量矩阵与刚度矩阵，可采用能量法与虚功原理，写出约束阻尼结构各层动能与应变能的虚功方程。基层应变能为

$$E_b^e=\frac{1}{2}\iiint_V(\sigma_{bx}\varepsilon_{bx}+\sigma_{by}\varepsilon_{by}+\tau_{bxy}\gamma_{bxy})\mathrm{d}V \tag{18}$$

式中　σ_{bx}、σ_{by}——基层某点的 X、Y 轴方向应力

ε_{bx}、ε_{by}——X、Y 轴方向应变

τ_{bxy}、γ_{bxy}——该点剪切应力、剪切应变

采用结点位移向量与形函数表示位移，根据应力应变几何方程，则式(18)可以表示为

$$E_b^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\left(h_b\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_b\boldsymbol{B}_b\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{\Gamma}^e+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\left(\frac{h_b^3}{12}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_b\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{\Gamma}^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_b^e\Gamma^e \tag{19}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_b^e=h_b\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}_b^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_b\boldsymbol{B}_b\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{h_b^3}{12}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_b\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{20}$$

式中　$\boldsymbol{B}_b$——基层应变转换矩阵

$\boldsymbol{B}$——阻尼结构应变转换矩阵

$\boldsymbol{D}_b$——基层弹性常数矩阵

$\boldsymbol{K}_b^e$——阻尼结构基层的刚度矩阵

基层的动能表达式为

$$T_b^e=\frac{1}{2}\rho_b\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u_b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v_b}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w_b}{\partial t}\right)^2\right]\mathrm{d}V \tag{21}$$

采用形函数及节点位移向量表示位移向量，则

$$T_b^e=\frac{1}{2}\rho_bh_b(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e)^{\mathrm{T}}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{N}_{uvwb}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_b^e\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e \tag{22}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_{uvwb}=\boldsymbol{N}_{ub}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{ub}+\boldsymbol{N}_{vb}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{vb}+\boldsymbol{N}_{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{w}$$

$$\boldsymbol{M}_b^e=\rho_bh_b\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{N}_{uvwb}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{23}$$

式中　$\boldsymbol{M}_b^e$——基层质量矩阵

阻尼层应变能为

$$E_t^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\left(h_t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{\Gamma}^e+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\left(\frac{h_t^3}{12}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{\Gamma}^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_t^e\boldsymbol{\Gamma}^e \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_t^e=h_t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}_t\mathrm{d}x\mathrm{d}y+h_t^3\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_t\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y/12 \tag{25}$$

式中　$\boldsymbol{B}_t$——阻尼层应变转换矩阵

$\boldsymbol{D}_t$——阻尼层弹性常数矩阵

$\boldsymbol{K}_t^e$——阻尼层刚度矩阵

由于阻尼材料的粘弹特性，阻尼层将会产生剪切变形，剪切势能可表示为

$$E_{\vartheta t}^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}Gh_t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(\boldsymbol{N}_{\vartheta xt}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\vartheta xt}+\boldsymbol{N}_{\vartheta yt}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\vartheta yt})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\boldsymbol{\Gamma}^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{\vartheta t}^e\boldsymbol{\Gamma}^e \tag{26}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{\vartheta t}^e=Gh_t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}(\boldsymbol{N}_{\vartheta xt}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\vartheta xt}+\boldsymbol{N}_{\vartheta yt}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\vartheta yt})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{27}$$

式中　$\boldsymbol{K}_{\vartheta t}^e$——阻尼层剪切刚度矩阵

G——阻尼层剪切弹性模量

阻尼层动能为

$$T_t^e=\frac{1}{2}\rho_t(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e)^{\mathrm{T}}h_t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{N}_{uvwt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e=\frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_t^e\dot{\boldsymbol{\Gamma}}^e \tag{28}$$

其中

$$\boldsymbol{N}_{uvwt}=\boldsymbol{N}_{ut}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{ut}+\boldsymbol{N}_{vt}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{vt}+\boldsymbol{N}_{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{w}$$

则阻尼层质量矩阵为

$$\boldsymbol{M}_t^e=\rho_th_t\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{N}_{uvwt}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{29}$$

约束层应变能计算式为

$$E_y^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\left(h_y\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{\Gamma}^e+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\left(\frac{h_y^3}{12}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_y\boldsymbol{B}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\boldsymbol{\Gamma}^e=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_y^e\boldsymbol{\Gamma}^e \tag{30}$$

其中
$$K_y^e = h_y \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} B_y^{\mathrm{T}} D_y B_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{12}h_y^3 \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} B^{\mathrm{T}} D_y B \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{31}$$

式中 K_y^e——约束层刚度矩阵

约束层动能为

$$T_y^e = \frac{1}{2}\rho_y h_y (\dot{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}} \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} N_{uvwy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \dot{\Gamma}^e = \frac{1}{2}(\dot{\Gamma}^e)^{\mathrm{T}} M_y^e \dot{\Gamma}^e \tag{32}$$

其中
$$N_{uvwy} = N_{uy}^{\mathrm{T}} N_{uy} + N_{vy}^{\mathrm{T}} N_{vy} + N_w^{\mathrm{T}} N_w$$

这样，约束层质量矩阵为

$$M_y^e = \rho_y h_y \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} N_{uvwy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{33}$$

由式(23)、(29)、(33)，可得到阻尼结构的总体单元质量矩阵为

$$M^e = M_b^e + M_t^e + M_y^e \tag{34}$$

由式(20)、(25)、(31)，得阻尼结构单元总体刚度阵为

$$K^e = K_b^e + K_t^e + K_y^e \tag{35}$$

由 Hamilton 变分原理公式，阻尼结构总体运动方程为

$$M\ddot{\Gamma} + K\Gamma = F \tag{36}$$

式中 M——结构总体质量矩阵
K——结构总体刚度矩阵
F——外激励矢量

2 约束阻尼结构拓扑优化

2.1 阻尼结构减振优化模型

有限元法是求解结构力学问题的基本数值方法，也是复杂结构动力学分析和拓扑优化的重要平台。工程结构受力条件复杂，较难得到准确的解析解，而有限元法则可以获得较为精确的数值解，在实现顺利求解复杂工程实际问题的同时，解的精度满足工程实际要求，且可高效可靠地解决振动响应问题，故可利用有限元方法建立阻尼结构拓扑优化模型。约束阻尼结构内部结构与阻尼材料特性均较为复杂，且对于粘弹性阻尼材料来说，其应力、应变、时间、温度之间的函数关系均呈现非线性，且阻尼材料特性方程易受到温度场、磁场、外力等因素的影响，为此必须寻找恰当的指标以衡量阻尼材料耗能效率。约束阻尼结构拓扑优化的实质是通过不断引入粘弹性阻尼材料以增大结构耗能效率，提升减振效果。但是引入的阻尼层及约束层材料过多可能会改变阻尼结构动态特性。在考虑以上各项因素的基础上，建立以结构模态阻尼比最大化为优化目标，以阻尼材料体积为约束条件，以阻尼单元存在状态为设计变量的拓扑优化模型，即为

$$\begin{cases} \mathrm{Find}\,\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \max \zeta_r \\ \mathrm{s.\,t.} \\ \qquad \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i - V \leqslant 0 \quad (V = \chi V_o) \\ \qquad (K - \lambda_r M)\Phi_r = 0 \end{cases} \tag{37}$$

式中 x_i——优化设计变量，其值为1时表明 i 单元处阻尼单元及相应的约束层单元存在，若其值为0，则表明 i 单元处阻尼单元及相应的约束层单元不存在
ζ_r——阻尼结构第 r 阶模态阻尼比
V——优化之前阻尼材料体积
χ——体积分数 V_o——阻尼单元体积
λ_r——结构第 r 阶特征值
Φ_r——结构第 r 阶模态振型

2.2 阻尼比灵敏度分析

阻尼结构受到外界激励而产生振动时，阻尼层与基层将发生微小的变形及滑移。接触面之间的摩擦会消耗振动能量，同时降低结构振幅。但能量、振幅等指标在工程实际振动中较难测量，较难作为实现优化目标最大化的途径。结构灵敏度是结构参数或设计变量的改变对力学特性影响的灵敏程度[19]。对优化目标进行灵敏度分析，是求取各个阻尼单元对目标函数贡献度的重要手段，且拓扑优化过程中是以阻尼单元灵敏度为重要评判依据，根据拓扑优化准则，实现删除低效、增加高效阻尼单元，并获得结构拓扑优化最优构型。式(36)自由振动微分方程的形式为

$$M\ddot{\Gamma} + K\Gamma = 0 \tag{38}$$

将自由振动微分方程转换为状态空间的形式

$$(\lambda \bar{A} + \bar{B})\Psi = 0 \tag{39}$$

其中 $\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$ $\bar{B} = \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}$ $\Psi = \begin{bmatrix} \Gamma \\ \dot{\Gamma} \end{bmatrix}$

定义约束阻尼结构第 r 阶模态阻尼比为

$$\zeta_r = -(\lambda_r + \bar{\lambda}_r)/(2\omega_r) \tag{40}$$

其中
$$\lambda_r = -\alpha_r + \mathrm{j}\beta_r$$

式中 λ_r、$\bar{\lambda}_r$——约束阻尼结构第 r 阶共轭特征值
ω_r——结构第 r 阶固有频率

结构阻尼变化较小时，阻尼比变化为

$$\Delta\zeta_r = -(\Delta\lambda_r + \Delta\bar{\lambda}_r)/(2\omega_r) \tag{41}$$

若结构产生较小变化，则有

$$(\lambda_r \bar{A} + \bar{B})\{\Delta\Psi_r\} + (\Delta\lambda_r \bar{A} + \Delta\bar{B} + \lambda_r \Delta\bar{A})\{\Psi_r\} = 0$$

左乘 $\{\Psi_r\}^{\mathrm{T}}$，则该式变为

$$\{\Psi_r\}^{\mathrm{T}}(\lambda_r \Delta\bar{A} + \Delta\bar{B})\{\Psi_r\} + \Delta\lambda_r \{\Psi_r\}^{\mathrm{T}}\bar{A}\{\Psi_r\} = 0$$

采用振型对矩阵 $\bar{A}$ 进行归一化处理，则上式变为

$$\{\Psi_r\}^{\mathrm{T}}(\lambda_r \Delta\bar{A} + \Delta\bar{B})\{\Psi_r\} + \Delta\lambda_r = 0 \quad (42)$$

其中 $\Delta\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \Delta M \\ \Delta M & 0 \end{bmatrix}$　$\Delta\bar{B} = \begin{bmatrix} \Delta K & 0 \\ 0 & -\Delta M \end{bmatrix}$

由式(34)、(35)推理可知，总体刚度矩阵与总体质量矩阵变化可表示为

$$\Delta \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_t + \boldsymbol{M}_y \quad (43)$$

$$\Delta \boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_t + \boldsymbol{K}_y \quad (44)$$

将式(42)代入式(41)，则阻尼比灵敏度变为

$$\Delta\zeta_r = Re(\{\Psi_r\}^{\mathrm{T}}(\lambda_r \Delta\bar{A} + \Delta\bar{B})\{\Psi_r\})/\omega_r \quad (45)$$

式中，$Re(\cdot)$ 表示提取复值实部运算。式(45)即阻尼结构第 r 阶阻尼比敏度的计算模型。

3　双向拓扑优化流程

3.1　双向渐进法优化思想

常规渐进优化算法在判断单元暂时处于低效状态后，便立即将该单元删除，且在后续优化迭代过程中不允许该单元参与计算与分析。若在某些迭代步中单元被误删除，则可能会影响优化结果的可靠性。而双向渐进优化算法在迭代过程中若判断单元为低效时，将该单元优化设计变量设为较小的值，在优化过程中若该单元被判定为高效，则将其恢复为实体单元。双向渐进优化的核心是在低效区域删除单元，在高效区域添加单元，关键是确定单元增加和删除准则，以提高单元利用效率，使得结构单元分布合理，并输出实用高效的拓扑构型。

3.2　双向优化单元增删准则

(1)按式(45)计算各阻尼单元灵敏度绝对值，对各单元灵敏度绝对值由大至小进行排序，形成数组 DS，删除 a_1 个灵敏度绝对值较小的阻尼单元。

(2)若当前删除率小于 χ_1，则当空洞区域灵敏度绝对值最大值大于单元增加阈值 $DS(N_1)$，将其恢复为实体阻尼单元。若当前删除率大于等于 χ_2，则当空洞区域灵敏度绝对值最大值大于单元增加阈值 $DS(N_2)$，将其恢复为实体阻尼单元。记录当前增加的阻尼单元个数。

(3)判断当前增加单元数量是否满足规定的增加单元数量 $a_2(a_2 < a_1)$，若不满足则重复步骤(2)，直至满足条件进行下一步拓扑优化流程，若还不满足 a_2，则进入步骤(4)。

(4)提取与所有空洞区域单元相邻的上下 2 个实体单元的灵敏度绝对值，提取该灵敏度集合中绝对值最大的阻尼单元。并将该阻尼单元上下 2 个单元中的空洞单元恢复为实体单元。记录增加单元数量，若不满足规定的增加单元数量 a_2，则重复步骤(4)，直至满足条件进行下一步拓扑优化流程。

3.3　优化模型双向渐进求解

为实现拓扑模型式(37)的优化求解，可根据优化目标灵敏度来实现阻尼单元的删除和增加。但由于有限元软件 ANSYS 中处理矩阵运算较为困难，可引入数值计算工具 Matlab 处理振型、矩阵等参数，在处理完成后以数组形式返回 ANSYS 中。考虑到拓扑优化过程中不可避免存在棋盘格现象，为此可选取 Sigmund 提出的独立网格滤波技术对阻尼单元灵敏度进行滤波处理[20]。图 2 给出了阻尼板双向渐进法优化迭代的程序实现流程，其主要步骤是：

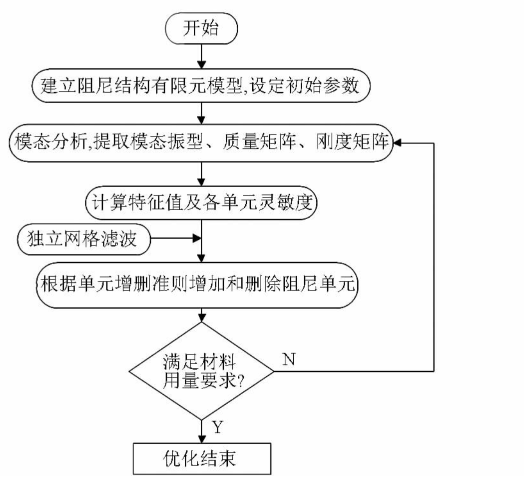


图 2　约束阻尼材料拓扑优化程序流程图

Fig. 2　Flow chart of constrained damping topology optimization

(1)建立拓扑优化有限元模型，设定阻尼结构相关边界条件，确定结构各项参数。

(2)对约束阻尼结构进行模态分析，提取出质量矩阵、刚度矩阵、模态振型等参数，计算特征值，按式(45)计算模态阻尼灵敏度。

(3)按单元增删准则进行增加或删除阻尼单元及相应的约束层单元。

(4)判断当前阻尼结构状态是否满足约束条件，若满足约束，则优化结束，输出优化后结构拓扑构型。若不满足约束，则重复循环优化流程(2)~(4)。

4　数值算例

为验证双向渐进优化算法的效果，选取矩形阻尼板为拓扑优化对象。矩形板长 0.4 m，宽 0.2 m。基层弹性模量为 70 GPa，密度 2 800 kg/m³，泊松比 0.3，厚度 0.004 5 m。粘弹性阻尼层弹性模量为 3.4 MPa，密度 1 000 kg/m³，泊松比 0.499，阻尼材料损耗因子取 0.8，厚度 0.001 5 m，约束层弹性模量为 70 GPa，密度 2 700 kg/m³，泊松比 0.3，约束层厚度 0.002 5 m。阻尼结构约束条件为左右两短边固定。

图 3 为约束阻尼结构实体模型及网格划分有限元模型，阻尼板网格划分为 20×20。图 4 为约束阻尼结构 1 阶、3 阶振型以及应变分布图，MX、MN 分别表示应变最大、最小的位置。图 5a、5b 为按双向渐进优化时，阻尼材料优化布局。图 5c、5d 为按单向渐进法删除阻尼材料时，阻尼结构拓扑构型。通过图 5 对比可见，阻尼结构应变较大处基本覆盖了阻尼材料，双向渐进法优化后，阻尼材料布局有效改善了棋盘格现象，且材料分布整体性较强。

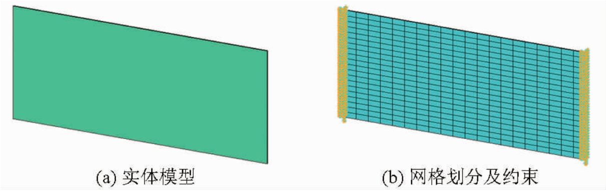


图 3　阻尼结构物理及有限元模型

Fig. 3　Physical and finite element models of constrained damping plate

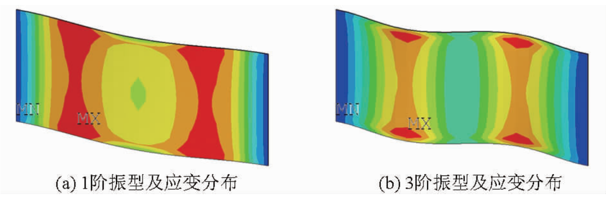


图 4　模态振型及应变分布图

Fig. 4　Modal shape and strain distributions

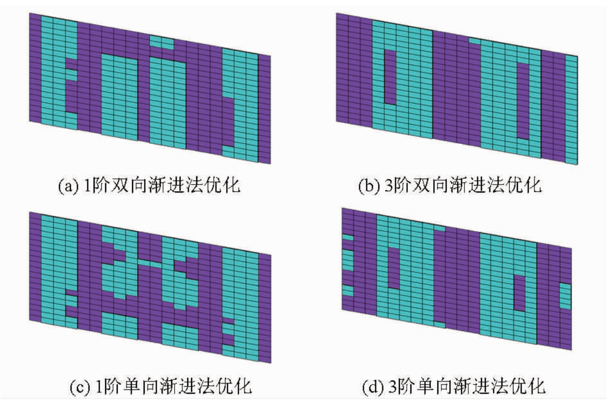


图 5　阻尼材料优化布局

Fig. 5　Optimal placement of constrained damping material

图 6 为约束阻尼结构优化迭代过程中，结构 1 阶、3 阶模态阻尼比变化曲线。可见，随着阻尼材料删除率不断增加，结构阻尼比均不断增大。但按

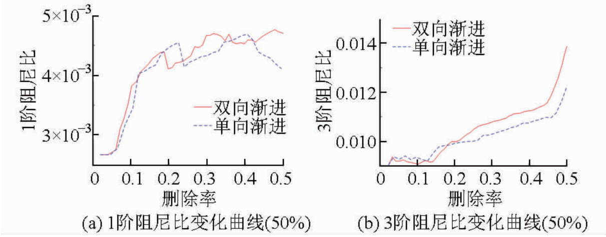


图 6　阻尼结构模态阻尼比随删除率的变化曲线

Fig. 6　Changes of damping ratio *vs* deletion ratio

双向渐进法对阻尼结构进行优化时，结构模态阻尼比增幅更大。

表 1 给出了阻尼结构优化前后模态阻尼比变化情况。可见，相比于阻尼结构优化前，采用单向渐进优化算法，1 阶、3 阶阻尼比增幅仅为 54.51%、36.21%，而双向渐进优化后，结构 1 阶、3 阶模态阻尼比增幅为 76.69%、58.36%。

表 1　优化前后阻尼比变化

Tab. 1　Changes of damping ratio before and after optimization

	优化迭代前	优化迭代后
1 阶单向渐进法	2.66×10^{-3}	4.11×10^{-3}
1 阶双向渐进法	2.66×10^{-3}	4.70×10^{-3}
3 阶单向渐进法	9.03×10^{-3}	1.23×10^{-2}
3 阶双向渐进法	9.03×10^{-3}	1.43×10^{-2}

图 7 为阻尼结构按双向、单向渐进法进行优化时，结构模态频率变化曲线。随着优化迭代的不断进行，阻尼结构模态频率均呈现先减后增的趋势。

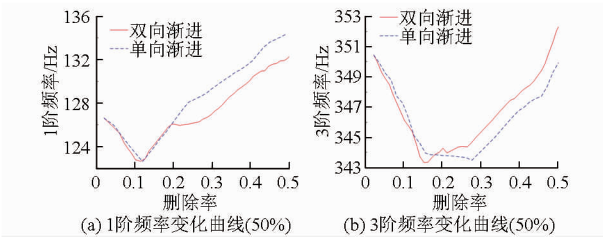


图 7　阻尼结构频率随删除率变化曲线

Fig. 7　Changes of modal frequency *vs* deletion ratio for damping structure

表 2 为优化前后结构模态频率的变化对比。通过对比可以发现，按双向渐进法对约束阻尼结构进行优化后，结构一阶频率变化幅度更小。

表 2　优化前后结构模态频率变化

Tab. 2　Comparison of the modal frequencies　Hz

	优化迭代前	优化迭代后
1 阶单向渐进法	126.63	134.43
1 阶双向渐进法	126.63	132.29
3 阶单向渐进法	350.45	350.00
3 阶双向渐进法	350.45	352.79

图 8 为阻尼结构拓扑优化后，结构谐响应特性

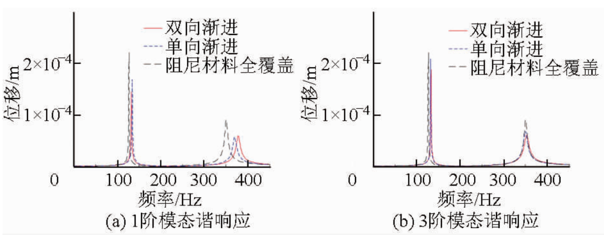


图 8　约束阻尼结构的频响特性曲线

Fig. 8　Characteristic curves of harmonic response for damping structure

曲线。扫频范围为 0 ~ 450 Hz，子步数为 4 500 步。通过对比可见，采用单向渐进法、双向渐进法对阻尼结构进行优化均可降低结构振动幅值。但按双向渐进算法优化后，阻尼结构的谐响应峰值则更低。

5　结论

（1）双向与单向渐进法优化后，阻尼单元基本覆盖在结构的模态应变较大位置。

（2）双向渐进法优化后可有效改善棋盘格现象，增强结构可制造性。

（3）相比于阻尼材料全覆盖，单向优化、双向渐进优化后，阻尼结构模态阻尼比均增大，但双向优化增幅更大，通过谐响应分析，可发现双向优化后结构振幅更低，减振优化效果明显。

参　考　文　献

1　洪宗辉，潘仲麟. 环境噪声控制工程[M]. 北京：高等教育出版社，2002.

2　王明旭，陈国平. 基于均匀化方法的约束阻尼柱壳结构动力学性能优化[J]. 中国机械工程，2011，22(8)：892 – 895.
WANG Mingxu, CHEN Guoping. Dynamics performance optimization of cylindrical shell with constrained damping layer using homogenization approach[J]. China Mechanical Engineering, 2011，22(8)：892 – 895. (in Chinese)

3　窦松然，桂洪斌，李承豪，等. 圆柱壳振动控制中约束阻尼拓扑优化研究[J]. 振动与冲击，2015，34(22)：149 – 153.
DOU Songran, GUI Hongbin, LI Chenghao, et al. Topological optimization for constrained damping in vibration control of cylindrical shell[J]. Journal of Vibration and Shcok，2015，34(22)：149 – 153. (in Chinese)

4　石慧荣，高溥，李宗刚，等. 局部约束阻尼柱壳振动分析及优化设计[J]. 振动与冲击，2013，32(22)：146 – 151.
SHI Huirong, GAO Pu, LI Zonggang, et al. Vibration analysis and optimization design of a cylindrical shell treated with constrained layer damping[J]. Journal of Vibration and Shock, 2013，32(22)：146 – 151. (in Chinese)

5　王睿，张晓鹏，亢战. 以动柔度为目标的结构阻尼材料层拓扑优化[J]. 振动与冲击，2013，32(22)：36 – 40.
WANG Rui, ZHANG Xiaopeng, Kang Zhan. Topology optimization of damping layer in structures for minimizing dynamic compliance[J]. Journal of Vibration and Shock ，2013，32(22)：36 – 40. (in Chinese)

6　郑伟光. 基于阻尼耗能的薄板结构低噪声拓扑优化方法研究[D]. 武汉：华中科技大学，2013.
ZHENG Weiguang. Research on topology optimization methods for low noise design of thin plates base on damping energy dissipation[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology，2013. (in Chinese)

7　郑玲，唐重才，韩志明，等. 车身结构阻尼材料减振降噪优化设计[J]. 振动与冲击 2015，34(9)：42 – 47.
ZHENG Ling，TANG Zhongcai，HAN Zhiming, et al. Optimal design of damping material topology configuration to suppress interior noise in vehicle[J]. Journal of Vibration and Shock ，2015，34(9)：42 – 47. (in Chinese)

8　郭中泽. 基于单元特性改变的渐进结构拓扑优化方法及应用研究[D]. 绵阳：中国工程物理研究院，2006.
GUO Zhongze. The research and application of evolutionary structural optimization based on element's properties change method [D]. Mianyang: China Academy of Engineering Physics，2006. (in Chinese)

9　李超，李以农，施磊，等. 圆柱壳体阻尼材料布局拓扑优化研究[J]. 振动与冲击，2012，31(4)：48 – 52.
LI Chao, LI Yinong, SHI Lei，et al. Topological optimization for placement of damping material on cylindrical sheels[J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(4): 48 – 52. (in Chinese)

10　张志飞，徐伟，徐中明，等. 抑制拓扑优化中灰度单元的双重 SIMP 方法[J]. 农业机械学报，2015，46(11)：405 – 410.
ZHANG Zhifei, XU Wei, XU Zhongming, et al. Double-SIMP method for gray-scale elements suppression in topology optimization[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(11)：405 – 410. (in Chinese)

11　王明旭，陈国平. 基于变密度方法约束阻尼层动力学性能优化[J]. 南京航空航天大学学报，2010，42(3)：283 – 287.
WANG Mingxu, CHEN Guoping. Dynamics performance optimization of constrained damping layer using variable density method [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2010，42(3)：283 – 287. (in Chinese)

12　开依沙尔·热合曼，买买提明·艾尼. 基于骨骼重建机理的连续体结构仿生拓扑优化方法[J]. 农业机械学报，2014，45(5)：340 – 345.
Kaysar· Rahman, Mamtimin · Geni. Bionic topology optimization method for continuum structures based on bone remodeling mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014，45(5)：340 – 345. (in Chinese)

13　占金青，杨康，黄志超. 基于节点变量法的连续体结构拓扑优化设计[J]. 农业机械学报，2014，45(9)：329 – 332.
ZHAN Jinqing, YANG Kang, HUANG Zhichao. Topology optimization of continuum structures using node variable method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014，45(9)：329 – 332. (in Chinese)

14　王明强，姚峰. 基于应力刚度约束的连续体双向渐进结构优化[J]. 机械设计，2008，25(9)：38 – 40.
WANG Mingqiang, YAO Feng. Bi-directional progressive structural optimization of continuous body based on constrains of stress and stiffness [J]. Journal of Machine Design, 2008, 25(9)：38 – 40. (in Chinese)

15　蒋亚礼，吕林华，杨德庆. 提高船用阻尼材料应用效果的优化设计方法[J]. 中国舰船研究，2012，7(4)：48 – 53.
JIANG Yali, LÜ Linhua, YANG Deqing. Design methods for damping materials applied to ships [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2012，7(4)：48 – 53. (in Chinese)

（下转第 412 页）

CUI Guohua, ZHANG Yanwei, ZHANG Yingshuang, et al. Configuration design and analysis of a new 3 – SPS/S spatial rotation parallel manipulator[J]. Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition, 2009, 39(Supp. 1): 200 – 205. (in Chinese)
13 齐明, 刘海涛, 梅江平, 等. 3 – PUS/PU 3 自由度并联机构运动学优化设计[J]. 天津大学学报, 2007, 40(6): 649 – 654.
QI Ming, LIU Haitao, MEI Jiangping, et al. Kinematics optimum design of a 3 – DOF parallel mechanism with 3 – PUS/PU architecture[J]. Journal of Tianjin University, 2007, 40(6): 649 – 654. (in Chinese)
14 季晔, 刘宏昭, 原大宁. 4 – SPS/PPU 型并联机构工作空间与尺度分析[J]. 农业机械学报, 2013, 44(11): 322 – 328.
JI Ye, LIU Hongzhao, YUAN Daning. Workspace and scale analysis of 4 – SPS/PPU parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(11): 322 – 328. (in Chinese)
15 沈惠平, 杨廷力, 马履中. 一类新型六自由度并联机构及其结构分析[J]. 中国机械工程, 2008, 19(6): 721 – 724.
SHEN Huiping, YANG Tingli, MA Lüzhong. A class of 6 – DOF parallel kinematic structures and structure analysis[J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(6): 721 – 724. (in Chinese)
16 刘玉斌, 赵杰, 蔡鹤皋. 新型 6 – PRRS 并联机器人运动学和动力学研究[J]. 吉林大学学报:工学版, 2008, 38(5): 1220 – 1224.
LIU Yubin, ZHAO Jie, CAI Hegao. Study on kinematics and dynamics of a novel 6 – PRRS parallel robot[J]. Journal of Jilin University: Engineering and Technology Edition, 2008, 38(5): 1220 – 1224. (in Chinese)
17 崔国华, 张海强, 徐丰, 等. 空间 3 – PUS – UP 并联机构运动灵巧性与刚度性能研究[J]. 农业机械学报, 2014, 45(12): 348 – 354.
CUI Guohua, ZHANG Haiqiang, XU Feng, et al. Kinematic dexterity and stiffness performance of spatial 3 – PUS – UP parallel manipulator[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(12): 348 – 354. (in Chinese)
18 杨继东, 杨中山, 刘栋, 等. H 形并联机构运动学分析与样机精插补控制实验[J]. 农业机械学报, 2014, 45(11): 324 – 329.
YANG Jidong, YANG Zhongshan, LIU Dong, et al. Kinematic analysis and experiment of H-shaped parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(11): 324 – 329. (in Chinese)
19 MARCO C, CECCARELLI M, LANNI C. A multi-objective optimum design of general 3R manipulators for prescribed workspace limits[J]. Mechanism and Machine Theory, 2004, 39(2): 119 – 132.
20 金国光, 王艳, 宋轶民, 等. 基于给定工作空间的球面变胞仿生关节机构优化设计[J]. 农业机械学报, 2013, 44(12): 288 – 293, 320.
JIN Guoguang, WANG Yan, SONG Yimin, et al. Optimum design of spherical metamorphic mechanism used for bionic joint based on prescribed workspace[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(12): 288 – 293, 320. (in Chinese)
21 张良安, 万俊, 谭玉良. Ahut – Delta 并联机构改进混沌粒子群算法尺度综合[J]. 农业机械学报, 2015, 46(8): 344 – 351.
ZHANG Liang'an, WAN Jun, TAN Yuliang. Dimensional synthesis of Ahut – Delta parallel mechanism based on improved chaotic particle swarm algorithm[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(8): 344 – 351. (in Chinese)
22 TSAI L W. Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators[M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1999.
23 赵杰, 王卫忠, 蔡鹤皋. 可重构机器人封闭形式的运动学逆解计算[J]. 机械工程学报, 2006, 42(8): 211 – 214.
ZHAO Jie, WANG Weizhong, CAI Hegao. Generation of closed-form inverse kinematics for reconfigurable robots[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(8): 211 – 214. (in Chinese)
24 黄真, 孔令富, 方跃法. 并联机器人机构学理论及控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1997.
25 于靖军, 刘辛军, 丁希仑, 等. 机器人机构学的数学基础[M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
26 LIU X J, WANG J. A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(9): 1210 – 1224.

(上接第 345 页)

16 MARY Baker. Analysis method to support design for damping [J]. Engineering with Computer, 2007, 23(1): 1 – 10.
17 QUERIN O M, STEVEN G P, XIE Y M. Evolutionary structural optimization using bi-directional algorithm [J]. Engineering Computations, 1998, 15(8): 1031 – 1048.
18 李以农, 谢熔炉, 王宜, 等. 约束阻尼结构拓扑优化设计的进化算法[J]. 重庆大学学报, 2010, 33(8): 1 – 6.
LI Yinong, XIE Ronglu, WANG Yi, et al. Topology optimization for constrained layer damping material in structures using ESO method[J]. Journal of Chongqing University, 2010, 33(8): 1 – 6. (in Chinese)
19 廖宇兰, 刘世豪, 孙佑攀, 等. 基于灵敏度分析的木薯收获机机架结构优化设计[J]. 农业机械学报, 2013, 44(12): 56 – 61.
LIAO Yulan, LIU Shihao, SUN Youpan, et al. Structural optimization for rack of cassava harvester based on sensitivity analysis [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(12): 56 – 61. (in Chinese)
20 SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboard, mesh dependencies, local minima[J]. Structural & Multidisciplinary Optimization, 1998, 16(1): 68 – 75.