

# 并联机构方位特征集的符号推导方法

廖明<sup>1</sup> 刘安心<sup>1</sup> 沈惠平<sup>2</sup> 杭鲁滨<sup>3</sup> 方虎生<sup>1</sup> 杨廷力<sup>2</sup>

(1. 解放军理工大学野战工程学院, 南京 210007; 2. 常州大学机械工程学院, 常州 213164;  
3. 上海工程技术大学机械工程学院, 上海 201620)

**摘要:** 并联机构的方位特征集与其拓扑结构特征存在密切联系, 方位特征集的程序化推导方法对于机构拓扑结构分析与设计具有重要意义。系统论述了拓扑结构多项式、方位关系组及方位特征集等基本概念, 采用拓扑结构多项式表达并联机构的支路及运动副排列结构, 通过方位关系组描述运动副轴线之间的方位关系。基于并联机构动平台的运动输出特性, 提出了运动特征空间的概念, 根据运动特征空间的相关性建立了2种消元规则, 即串联消元规则和并联消元规则。这两种消元规则在拓扑结构多项式与方位关系组之间建立了一种“商”运算关系, 并可进行迭代消元, 其运算结果即为方位特征集。利用并联机构的字符串描述形式, 对部分并联机构的方位特征集进行了基于符号的推导分析, 其结果验证了所提出消元规则的有效性。研究成果为面向计算机辅助的并联机构拓扑结构特征分析及类型综合提供了必要的理论与方法基础。

**关键词:** 并联机构; 方位特征集; 拓扑结构多项式; 方位关系组

**中图分类号:** TH112      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1298(2016)03-0395-10

## Symbolic Derivation of Position and Orientation Characteristics of Parallel Mechanism

Liao Ming<sup>1</sup> Liu Anxin<sup>1</sup> Shen Huiping<sup>2</sup> Hang Lubin<sup>3</sup> Fang Husheng<sup>1</sup> Yang Tingli<sup>2</sup>

(1. College of Field Engineering, PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China

2. College of Mechanical Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China

3. College of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** Position and orientation characteristics (POC) of parallel mechanism describes the relative motion properties between arbitrary two links of parallel mechanism. POC has close relationship with topological characteristics of parallel mechanism. Whereas, POC of general parallel mechanism cannot be obtained easily sometimes. So it is important for topological structural analysis or design to program the POC calculation. Some important concepts were analyzed systematically such as the topological polynomial expression, the orientation group and POC, etc. The aligning structures of limbs and pairs of parallel mechanism were expressed by the topological polynomial expression. The orientation group provides the orientation relationships shared by axes of all pairs and limbs of parallel mechanism. With the motion characteristics of movable platform of parallel mechanism considered, a conception of motion characteristic space was proposed. Based on the correlation among motion characteristic spaces, two elimination principles were constructed; serial elimination and parallel one. These elimination principles build the quotient relationships between topological polynomial expression and orientation group, supporting for iteration calculations with the POC of parallel mechanism and returned as the result. Based on the string description, POCs of some parallel mechanism were derived with symbolic fashion and the

收稿日期: 2015-08-31 修回日期: 2015-10-15

基金项目: 国家自然科学基金项目(51475050)和南京师范大学教育部重点实验室开放基金项目(2014VGE01)

作者简介: 廖明(1978—),男,讲师,博士,主要从事机器人机构学及立体测量研究, E-mail: netlm99@qq.com

通信作者: 刘安心(1968—),男,教授,博士生导师,主要从事机器人机构学研究, E-mail: liuanxin@136.com

results validated the proposed method. The results of this paper lay some necessary theory and methodology foundations for the computer aided analysis of topological structural characteristics and prototype synthesis of parallel mechanism.

**Key words:** parallel mechanism; position and orientation characteristics; topological polynomial expression; position and orientation group

## 引言

并联机器人机构的拓扑结构是实现并联机构原始创新的出发点和先决条件,也是并联机构型综合的重要依据和基础<sup>[1]</sup>。并联机构往往具有复杂的多环路拓扑结构,涉及多种运动副类型及复杂的排列结构和顺序,运动副轴线之间的方位关系多达6种<sup>[2]</sup>。因此,并联机构拓扑结构特征分析是一项较为复杂的任务。通过研究并联机构拓扑结构特征的推演规律,构造便于计算机实现的拓扑结构特征分析方法,对于并联机构的理论研究及机构创新设计等均具有重要现实意义。

目前机构学界存在3种机构拓扑结构分析方法:螺旋理论、位移子群、方位特征集。其中方位特征集方法的数学形式简单,几何意义明确,可得到机构的非瞬时拓扑结构特征<sup>[3-6]</sup>。国内已有不少关于方位特征集方法的相关研究及应用<sup>[7-13]</sup>。目前并联机构的计算机表示方法已有大量研究,主要有符号表示和矩阵表示两类<sup>[14-20]</sup>。但这些表示方法主要用于机构简图绘制、同构体辨识等方面,而在此基础上针对并联机构拓扑结构特征的程序化分析方法的相关研究仍然较少。

并联机构的拓扑结构特征是指在运动副及构件的大小可以改变,但尺度约束类型不变的条件下,机构还能保持不变的一些特性或不变量<sup>[21]</sup>。目前机构拓扑结构学已经揭示了12种拓扑结构特征,其中大部分拓扑结构特征能够从方位特征集直接或间接导出,如:自由度、过约束度、冗余度、消极运动副、BKC耦合度、运动输入输出解耦性等<sup>[22-24]</sup>。因此,方位特征集具有基础性作用。但方位特征集的计算涉及人工判读,当机构的拓扑结构比较复杂时,这一过程往往十分繁复,容易导致错误结果。因此,根据方位特征集的内在规律,研究适合于计算机程序实现的方位特征集计算方法,对于机构拓扑结构特征分析及类型综合均有重要现实意义。本文从运动空间相关性的角度,重新定义方位特征集的运算方法,并归纳为两种消元规则。该消元方法与一般意义上的代数多项式消元不同,而是建立在前期关于并联机构的符号描述方法基础之上,其中涉及拓扑结构多项式及方位关系组等基本概念<sup>[25]</sup>。因而该消元

规则表现为一种符号运算,其结果为方位特征集的一种符号表示。

## 1 并联机构的符号表示及方位特征集

### 1.1 并联机构拓扑结构的符号表示

拓扑结构多项式给出了并联机构各支路拓扑结构的符号描述,具有形式简洁、信息量大等优点,适合于基于符号的并联机构拓扑结构特征分析与推导。

#### (1) 拓扑结构多项式

定义1:拓扑结构多项式是由运动副的“积”构成支路,以支路的“和”构成并联机构的一种符号描述<sup>[25]</sup>。在该多项式描述中,支路的阶定义为该支路所含运动副的数目。并有如下事实:所有支路的阶的和即为机构运动副总数目;多项式的项数即为支路数目;多项式的项的“和”满足通常意义上的交换律和结合律;而多项式的项内部的“积”一般不满足通常意义上的交换律;多项式中任意两项的组合表示一个环路;并联机构独立环路数为多项式的项数减1。一般并联机构的拓扑结构多项式表示为

$$P_M = L_1 + L_2 + \dots + L_k = \sum_{i=1}^k L_i = \sum_{i=1}^k (J_{i1} J_{i2} \dots J_{ik_i}) = \sum_{i=1}^k \left( \prod_{j=1}^{k_i} J_{ij} \right) \quad (1)$$

式中  $L_i$ ——第  $i$  条支路

$J_{ij}$ ——支路  $L_i$  中的第  $j$  个运动副

SOC 支路可直接表示为拓扑结构多项式的一项,即:  $L = J_1 J_2 \dots J_k$ , 并约定其中所包含的运动副序列起于基础平台,而终止于动平台。如图 1a 所示机构的拓扑结构多项式为

$$P_M = L_1 + L_2 + L_3 =$$

$$R_{11} R_{12} C_{13} + R_{21} R_{22} C_{23} + R_{31} R_{32} C_{33}$$

HSOC 支路可以通过 SOC 支路的“和”、“积”等方式组合而成。如图 1b 所对应的 HSOC 支路可描述为:  $L = R_1 R_2 (R_5 R_6 + R_7 R_8) R_3 R_4$ , 其中 4 个转动副 ( $R_5$ 、 $R_6$ 、 $R_7$ 、 $R_8$ ) 分别构成 2 个 SOC 子支路  $R_5 R_6$ 、 $R_7 R_8$ , 其等效移动副为  $P[4R]$ 。当支路中没有 HSOC 支路时,称其为线性支路,否则为非线性支路。完全由线性支路构成的并联机构称为线性并联机构,否则为非线性并联机构。由于 HSOC 支路可

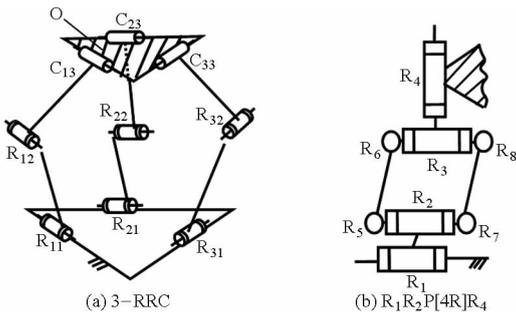


图1 并联机构的拓扑结构多项式符号描述示例

Fig. 1 Polynomial symbolic description of PM topological structure

以被等效为SOC支路,下文仅涉及线性并联机构(由于POC集理论存在一定局限性,对于特殊的子并联机构(如平行四边形机构4R)不能得到正确的方位特征集<sup>[26]</sup>,因而目前本文方法不能直接用于含HSOC支路的并联机构)。

拓扑结构多项式基本性质:多项式中代表支路的项的前后顺序发生交换时,不影响机构拓扑结构的唯一性。这一性质对于方位特征的程序化分析十分有利。

## (2) 运动副方位关系的符号表示

尺度约束类型将相邻运动副之间的方位关系归纳为6种基本类型,即:平行( $//$ )、共轴( $- -$ )、垂直( $\perp$ )、空间共点( $\cdot$ )及共面( $\#$ )、其他情形( $\wedge$ )<sup>[26]</sup>。这里将尺度约束拓展至任意运动副之间的方位关系,其中包括相邻或不相邻的轴线之间的空间方位关系。

定义2:方位关系链是多个运动副通过特定的方位关系产生关联,使得其中任意2个运动副之间的方位关系被完全确定下来。方位关系链可表示为

$$O_{\text{chain}} = J_1 \% J_2 \% \dots \% J_k \quad (2)$$

式中符号‘ $\%$ ’表示6种典型方位关系之一。若方位关系链中可能存在冗余,则需要进行约简,如 $O_1 = R_1 // R_2 // R_3 // R_1$ ,可以约简为 $O_1 = R_1 // R_2 // R_3$ ;  $O_2 = R_1 // R_2 \perp R_3 \perp R_1$ ,可以约简为 $O_2 = R_1 // R_2 \perp R_3$ 。详细的约简方法参见文献<sup>[25]</sup>。

并联机构一般需要多个方位关系链才能给出所有运动副之间方位关系的完备表示。并约定每条支路中的运动副构成一个方位关系链,支路之间可以构成多个方位关系链。并联机构中所有方位关系链一起构成该机构的方位关系组。方位关系组可表示为

$$O_{PM} = \{ O_{ij} | 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq k \} \quad (3)$$

式中, $k$ 为支路数,当 $i = j$ 时,令 $O_{ij} = O_i$ ,即第 $i$ 条支路的方位关系链。显然有 $O_{ij} = O_{ji}$ 。如图1a的方位关系组可表示为: $O_1 = R_{11} // R_{12} // C_{13}$ ,  $O_2 = R_{21} // R_{22} // C_{23}$ ,  $O_3 = R_{31} // R_{32} // C_{33}$ ,  $O_{12} = R_{11} // R_{21}$ ,

$$O_{23} = R_{21} // R_{31}, O_{13} = R_{11} // R_{31} \circ$$

## 1.2 并联机构的方位特征集

POC集表示构件位移的存在性及其方位特征,并不是构件的真实位移<sup>[26]</sup>。对于任意构件 $i$ 上的选定基点相对于构件 $j$ 的方位特征集定义为

$$M_{ij} = \left[ \begin{array}{l} t_1^1(\text{dir.}) \cup t_2^1(\text{dir.}) \cup t_3^1(\text{dir.}) \\ r_1^1(\text{dir.}) \cup r_2^1(\text{dir.}) \cup r_3^1(\text{dir.}) \end{array} \right] \quad (4)$$

式中  $M_{ij}$ ——构件 $i$ 相对于构件 $j$ 的POC集

$t_k^1(\text{dir.})$ ——构件 $i$ 存在的有限移动方位特征, $k=1,2,3$

$r_k^1(\text{dir.})$ ——构件 $i$ 存在的有限转动方位特征, $k=1,2,3$

POC集维数定义为POC集中独立元素数,记为 $\dim(M) = \dim(M(t)) + \dim(M(r))$ ,  $\dim(M(t))$ 、 $\dim(M(r))$ 分别为独立移动元素数目及独立转动元素数目,其取值范围均为:(0,1,2,3)。

串联机构末端构件的POC集由各运动副相对于同一参考基点的POC集的“并”运算得到,而并联机构运动输出构件的POC集则由各个支路末端构件(相对于同一基点)的POC集的“交”运算得到<sup>[26]</sup>,分别表示为

$$\begin{cases} M_{bi} = \bigcup_{j=1}^{m_i} M_{Jj} \\ M_{Pa} = \bigcap_{i=1}^k M_{bi} \end{cases} \quad (5)$$

式中  $M_{bi}$ ——支路 $i$ 末端构件的POC集

$M_{Jj}$ ——运动副 $J_j$ 相对于参考基点的POC集

$m_i$ ——支路 $i$ 的运动副数目

$M_{Pa}$ ——并联机构运动输出构件的POC集

$k$ ——支路数目

采用 $t(*)$ 、 $r(*)$ 表示POC集的移动特征和旋转特征,并统称为运动特征,表示为 $m(*)$ 。如图1a所示并联机构,其支路的POC集为: $M_{bi} = [t(R_{i1}) \cup t(R_{i2}) \cup t(C_{i3}), r(R_{i1}) \cup r(R_{i2}) \cup r(C_{i3})] = [t^3, r^1]$  ( $i=1,2,3$ ;根据支路运动副之间的方位关系,该并联机构动平台的POC集为: $M_{Pa} = M_{b1} \cap M_{b2} \cap M_{b3} = [t^3, r^0]$ ,即“3平移、0转动”。关于并联机构3-RRC的POC集推导过程请参考第3节。

## 2 并联机构方位特征集的代数运算规则

### 2.1 方位特征集的代数运算

对于机构末端构件上任意一点,其POC集由相对于每个运动副的POC集通过一定的运算规则得到。本文将其中涉及的运算方法或规则统称为POC集的代数运算。不失一般性,令POC集的参考

点为动平台上任意一点(不在任意运动副的轴线上),且参考点不被显式表示出来。运动副  $J$  的 POC 集可表示为:  $\text{POC}(J) = [t(J), r(J)]$ 。

POC 集的代数运算包括“乘法”和“加法”两种类型,POC 集之间的“乘”法运算定义为:  $\text{POC}(J_1) * \text{POC}(J_2) = [t(J_1) * t(J_2), r(J_1) * r(J_2)]$ ; POC 集之间的“加”法运算定义为:  $\text{POC}(J_1) + \text{POC}(J_2) = [t(J_1) + t(J_2), r(J_1) + r(J_2)]$ 。因此,POC 集的代数运算被转化为关于运动特征  $t(*)$ 、 $r(*)$  的代数运算。本文将 POC 集的“乘”运算对应于 POC 集的“并”运算,适用于支路的方位特征集;将 POC 集的“加”运算对应于 POC 集的“交”运算,适用于并联机构的方位特征集。

## 2.2 运动特征空间

任意 2 个运动副  $J_1$ 、 $J_2$ , 其运动特征  $m(J_1)$ 、 $m(J_2)$  之间存在特定的方位关系,并表示为:  $m(J_1) \% m(J_2)$ 。若有“ $m(J_1) // m(J_2)$ ”,则认为  $m(J_1)$  与  $m(J_2)$  线性相关,即可以相互替换;反之表示为“ $m(J_1) ! // m(J_2)$ ”,即两者相互独立。又以  $\#(m(J_1), m(J_2))$  表示由  $m(J_1)$ 、 $m(J_2)$  所张成的运动特征平面,若有“ $\#(m(J_1), m(J_2)) // m(J_3)$ ”,则认为  $m(J_1)$ 、 $m(J_2)$ 、 $m(J_3)$  之间存在相关关系,即可由其中两者构成的运动特征平面  $\#(*, *)$  代替另一个运动特征。如可用  $\#(m(J_1), m(J_2))$  替换  $m(J_3)$ ,或者  $\#(m(J_2), m(J_3))$  替换  $m(J_1)$ ,等等。又若“ $\#(m(J_1), m(J_2)) // \#(m(J_3), m(J_4))$ ”,则认为这两个运动特征平面之间存在相关关系,因而可以相互替换。在未引起歧义的情况下,可将  $\#(m(J_1), m(J_2))$  简记为  $m(J_1, J_2)$ ,即运动特征平面;而  $m(J_1, J_2, J_3)$  则表示一个三维的运动特征,简记为  $m[3]$ 。显然,运动特征  $m[3]$  能够表达其他任何维度的运动特征。

根据运动特征之间的相关关系,引入运动特征空间的概念。

定义 3: 运动特征空间为由一组互不相关的运动特征所张成的空间,简称运动空间。自然地,任意一个运动特征构成一维运动空间,2 个互不相关的一维运动特征构成二维运动空间,3 个互不相关的一维运动特征则构成三维运动空间,分别记作:  $m(J_i)$ 、 $m(J_i, J_j)$ 、 $m(J_i, J_j, J_k)$ 。零维特征空间记作:  $m[0]$ ,表示不存在的运动。根据方位特征集的运动学意义可知,运动特征空间的维数不大于 3,即:  $\dim(m) \leq 3$ 。

## 2.3 串联机构方位特征集的代数运算方法

利用运动特征空间的概念及其相关性,可以大大简化 POC 集的运算结果,本文将这一简化过程称

为运动特征消元。对于串联机构而言,运动特征消元表现为运动特征“积”序列的逐渐简化。下面首先引入适用于串联机构的运动特征消元规则:串联消元规则。

对于运动特征的积序列:  $m(J_1 J_2 \cdots J_n) = m(J_1) m(J_2) \cdots m(J_n)$ ,根据运动特征之间的相关关系,最终可以简化合并至不超过 3 个相互独立的运动特征的积:  $m(J_i) m(J_j) m(J_k) = m(J_i, J_j, J_k)$ ,其中  $1 \leq (i, j, k) \leq n$ 。串联消元规则适用于支路的 POC 集计算,并可表示为运动特征积序列与相应方位关系链之间的一种“商”运算。

$$\frac{m(J_1) m(J_2) \cdots m(J_n)}{J_1 \% J_2 \% \cdots \% J_n} = m(J_i, J_j, J_k) \quad (6)$$

式中“商”运算规则是:对于任意 2 个运动特征  $m(J_i)$ 、 $m(J_j)$ ,根据分母上的方位关系  $J_i \% J_j$  进行相关性判别,若  $m(J_i) // m(J_j)$ ,则可消去  $m(J_j)$  及分母中的  $J_{i+1}$  或  $m(J_i)$  与  $J_i$ 。当无法再进行消元时,则将分母略去(需要根据后续消元的需要而定)。

为了正确应用式(6)所示的消元规则,需要根据方位关系链判别运动特征之间的相关关系。同时注意到以下事实:运动特征“积”序列内部的排列顺序与消元结果无关。因此,可以对运动特征积序列进行排序,先将其中存在相关关系的运动特征子序列进行消元。表 1 总结了常见的若干种消元模式,“%”所在的行表示某类方位关系链,后续  $t(*)$ 、 $r(*)$  表示相应移动特征和旋转特征及其消元结果。

如运算“ $m(R_1) m(R_2) m(C_3) / (R_1 // R_2 // C_3)$ ”的消元过程为

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t(R_1) t(R_2) t(C_3)}{R_1 // R_2 // C_3} = \frac{t(R_1, R_2) t(// C_3) t(\perp C_3)}{R_1 // C_3} = \\ t(R_1, R_2) t(\perp C_3) = t(R_1, R_2, C_3) \\ \frac{r(R_1) r(R_2) r(C_3)}{R_1 // R_2 // C_3} = \frac{r(R_1) r(C_3)}{R_1 // C_3} = \frac{r(R_1)}{R_1} = r(R_1) \end{array} \right.$$

推导时,注意到运动副 C 可以视作一个转动副与移动副的串联,故其移动特征表示为:  $t(C) = t(// C) * t(\perp C)$ ,即平行于 C 副轴线的移动和垂直于 C 副轴线的移动的“积”。

根据式(1)关于支路的拓扑结构多项式描述形式,对于支路  $L = J_1 J_2 \cdots J_n$ ,及其方位关系链  $O_L$ ,定义算子  $\text{POC}_L(*)$

$$\text{POC}_L(L, O_L) = \frac{m(L)}{O_L} = \frac{[t(L), r(L)]}{O_L} = \frac{[t(J_1 J_2 \cdots J_n), r(J_1 J_2 \cdots J_n)]}{J_1 \% J_2 \% \cdots \% J_{k_L}} = \frac{\left[ \prod_{j=1}^n t(J_j), \prod_{j=1}^n r(J_j) \right]}{J_1 \% J_2 \% \cdots \% J_{k_L}} = [t_{base}, r_{base}]_L \quad (7)$$

表1 运动特征序列的消元模式

Tab.1 Elimination modes of motion characteristic production serials

%	$P_1 // P_2$	$P_1 - - P_2$	$P_1 \perp P_2$	$P_1 \wedge P_2$	
$t(P_1, P_2)$	$t(P_1)$	$t(P_1)$	$t(P_1, P_2)$	$t(P_1, P_2)$	
%	$\#(P_1, P_2) // P_3$	$\#(P_1, P_2)! // P_3$			
$t(P_1, P_2, P_3)$	$t(P_1, P_2)$	$t[3]$			
%	$R_1 // R_2$	$R_1 - - R_2$	$R_1 \perp R_2$	$R_1 \cdot R_2$	$R_1 \wedge R_2$
$t(R_1, R_2)$	$t(R_1, R_2)$	$t(R_1)$	$t(R_1, R_2)$	$t(R_1, R_2)$	$t(R_1, R_2)$
$r(R_1, R_2)$	$r(R_1)$	$r(R_1)$	$r(R_1, R_2)$	$r(R_1, R_2)$	$r(R_1, R_2)$
%	$R_1 // R_2 // R_3$	$R_1 // R_2 - - R_3$	$R_1 // R_2 \perp R_3$	$R_1 \perp R_2 \perp R_3$	$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$
$t(R_1, R_2, R_3)$	$t(R_1, R_2)$	$t(R_1, R_2)$	$t[3]$	$t[3]$	$t[3]$
$r(R_1, R_2, R_3)$	$r(R_1)$	$r(R_1)$	$r(R_1, R_3)$	$r[3]$	$r[3]$
%	$R_1 // P_2$	$R_1 - - P_2$	$R_1 \perp P_2$	$R_1 \perp P_2$	$R_1 \wedge P_2$
$t(R_1, P_2)$	$t(R_1, P_2)$	$t(R_1, P_2)$	$t(R_1, P_2)$	$t(R_1, P_2)$	$t(R_1, P_2)$
$r(R_1, P_2)$	$r(R_1)$	$r(R_1)$	$r(R_1)$	$r(R_1)$	$r(R_1)$
%	$R_1 // R_2 // P_3$	$R_1 // R_2 \perp P_3$	$R_1 \perp R_2 \perp P_3$	$R_1 \perp R_2 // P_3$	
$t(R_1, R_2, P_3)$	$t[3]$	$t(R_1, R_2)$	$t[3]$	$t[3]$	

式中  $t_{base}$ 、 $r_{base}$  分别表示支路  $L$  的移动特征空间和旋转特征空间, 可根据串联消元规则计算得到。对于 HSOC 支路, 可将其中的并联子支路视作一个拓扑结构单元, 并以其等效运动副代替, 从而转化为等效 SOC 支路<sup>[26]</sup>。

## 2.4 并联机构方位特征集的代数运算方法

与串联机构相对应, 并联机构的 POC 集代数运算可定义为各个支路的 POC 集的“和”运算, 其实质是各支路所对应的运动特征空间的交集。对此, 引入消元规则: 并联消元规则。

2 个一维特征空间相交, 若两者相关, 则结果为其中之一, 否则为零维空间; 一维特征空间与二维特征空间相交, 若其相关, 则结果为一维空间, 否则为零维空间; 二维特征空间与二维特征空间之间相交, 若其相关, 则结果为其中之一, 否则为一维空间; 任意低维空间与三维特征空间相交, 其结果为对应的低维空间。对于任意 2 个运动特征空间  $m_i, m_j$ , 并联消元规则可表示为

$$m_i \oplus m_j = \frac{m_i + m_j}{m_i \% m_j} = \begin{cases} m_i & (m_i // m_j) \\ m_i \cap m_j & (\text{其他}) \end{cases} \quad (8)$$

式中 % 表示所涉及的运动特征空间之间的方位关系。式(8)中的“商”运算的规则是: 当  $m_i // m_j$  时, 消元结果为相对低维的运动特征空间;  $m_i \cap m_j$  的结果只有两种情形: 当  $\dim(m_i) = 2$  且  $\dim(m_j) = 2$  时,  $m_i \cap m_j$  为 2 个运动特征平面  $m_i, m_j$  的交线, 或结果为空。根据式(8), 运动特征空间的并联消元运算结果是所有参与运算的运动特征空间中维数最低者, 或者为零维运动空间。

根据方位特征集的定义, 并联机构的 POC 集是各个支路的 POC 集的“交”运算结果, 即各支路的运

动特征空间的交, 因此满足并联消元规则。对于并联机构, 若支路  $i, j$  的运动特征空间分别为  $m_i, m_j$ , 则方位关系可由支路间的方位关系链  $O_{ij}$  表达, 即有:  $m_i \% m_j = O_{ij}$ 。根据并联机构的拓扑结构多项式 ( $Top$ ) 及支路间方位关系组 ( $O_p$ ), 定义算子  $POC_p(\ast)$

$$POC_p(Top, O_p) = POC_L(L_1) \oplus \cdots \oplus POC_L(L_k) = \frac{\sum_{i=1}^k POC_L(L_i)}{O_p} = \frac{\sum_{i=1}^k POC_L(L_i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k O_{ij}} \quad (9)$$

再将式(7)代入式(9), 则有

$$POC_p(Top, O_p) = \frac{\sum_{i=1}^k [t_{base}, r_{base}]_{L_i}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^k O_{ij}} \quad (10)$$

式中的“商”运算按照式(8)进行消元运算,  $O_{ij}$  表示支路  $i$  与支路  $j$  之间的方位关系链,  $k$  为支路数目。

根据上述 POC 集计算方法, 得到关于并联机构 POC 集代数运算的基本性质: 并联机构的 POC 集与拓扑结构多项式内部排列顺序无关, 其中包括支路的排列顺序以及支路中运动副的排列顺序。简单证明: 支路的 POC 集是支路中所有运动副的 POC 集的“积”运算, 根据串联消元规则, 运动特征之间的“积”可以交换, 因而支路的 POC 集与运动副排列顺序无关; 根据并联消元规则, 多个支路的运动特征空间的“和”运算也可以交换。

## 3 并联机构方位特征集的符号计算实例

根据上述并联机构的拓扑结构多项式和方位关系组、运动特征的消元规则以及并联机构方位特征集的代数运算方法, 针对一般线性并联机构(包括

对称与非对称机构, HSOC 支路的机构需要等效为 SOC 支路), 设计了适合于计算机程序实现的 POC 集分析算法。该算法以 2 个基本字符串(即拓扑结

构多项式字符串、方位关系组字符串)为输入条件, 采用图 2 所示的逻辑流程, 算法输出结果为并联机构的 POC 集字符串表示。

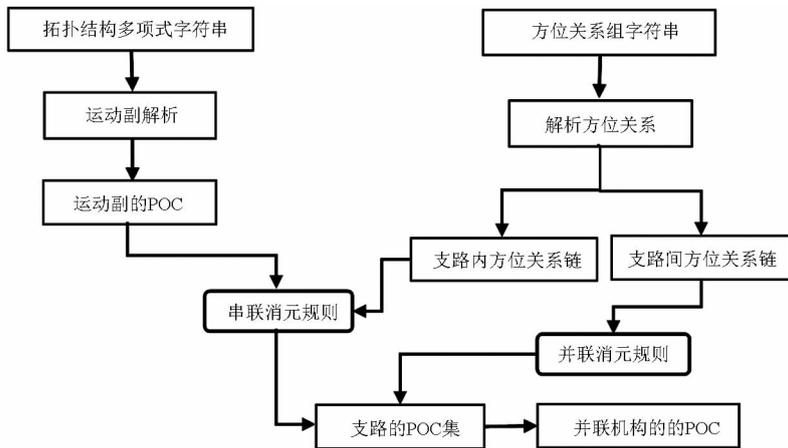


图2 并联机构 POC 集的字符串推导逻辑

Fig. 2 String derivation logic of PM POC

表 2 给出了 3 种并联机构的特例, 分别涉及对称并联机构、非对称并联机构、含 HSOC 支路的并联机构。表 2 同时给出了这 3 个并联机构的字符串描述及其 POC 集计算结果, 其中“Top”表示拓扑结构多项式, “Oirents”表示方位关系组。中间符号推导过程简要分析如下。

### 3.1 并联机构 3-RRC 的 POC 集符号推导

采用双引号“\*”表示字符串, 数字形式的下标直接列出。参考点取为动平台上任意一点 Q, 如表 2 左列所示。并联机构 3-RRC 是一种较为简单的对称机构, 对其进行 POC 集计算有利于阐明本文方法的基本原理和主要思路, 简要推导如下。

#### (1) 支路内的消元运算

根据串联机构的 POC 集代数计算方法即式(6), 由于 3-RRC 是对称并联机构, 因而可先计算第 1 条支路 L1 的移动特征 t1 及旋转特征 r1

$$\begin{aligned} t1 &= t(L1)/O1 = "t(R11) t(R12) t(C13)" / \\ &"R11 // R12 // C13" = "t(R11, \\ &R12) t(\perp C13) \\ &t(// C13)" / "C13" = \\ &"t(R11, R12) t(//C13)" = "t[3]" \end{aligned}$$

以上推导过程的第 2 步需要考虑到 t( $\perp$  C13) 等价于与 C13 同轴的转动副的移动特征, 又 R12 // C13, 故 t(R11, R12) // t( $\perp$  C13)。因此, “t(R11, R12) t( $\perp$  C13)”被消元为“t(R11, R12)”。

$$\begin{aligned} r1 &= r(L1)/O1 = "r(R11)r(R12)r(C13)" / \\ &"R11 // R12 // C13" = \\ &"r(R11)r(C13)" / "R11 // C13" = \\ &"r(R11)" / "R11" = "r(R11)" \end{aligned}$$

同理得到支路 L2、L3 的运动特征

$$\begin{aligned} t2 &= t(L2)/O2 = "t(R21, R22) t(// C23)" / \\ &"R21" = "t[3]" \end{aligned}$$

$$r2 = r(L2)/O2 = "r(R21)"$$

$$\begin{aligned} t3 &= t(L3)/O3 = "t(R32, R32) t(// C33)" / \\ &"R31" = "t[3]" \end{aligned}$$

$$r3 = r(L3)/O3 = "r(R31)"$$

#### (2) 支路之间的消元运算

首先进行移动特征空间的“和”运算。根据上述支路的运动空间计算结果, 各支路都具有 3 维的移动特征空间。根据并联消元规则, 各个运动空间“和”运算的结果仍为 3 维运动空间。此时支路间的方位关系链即 O12、O13、O23 等则无需显式表达。根据式(9), 移动特征空间的“和”运算为

$$\begin{aligned} (t1 + t2 + t3) / O12O13O23 &= \\ "t[3] + t[3] + t[3]" / O12O13O23 &= "t[3]" \end{aligned}$$

对于旋转特征空间的“和”运算, 首先计算支路 L1、L2 之间的“和”r12

$$\begin{aligned} r12 &= (r1 + r2) / O12 = \\ "r(R11) + r(R21)" / "R11 \wedge R21" &= "r[0]" \end{aligned}$$

再将上一步计算结果 r12 与计算支路 L3 的旋转空间求和

$$\begin{aligned} (r12 + r3) / O13O23 &= \\ "r[0] + r(R31)" / O13O23 &= "r[0]" \end{aligned}$$

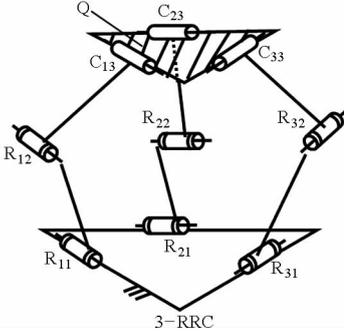
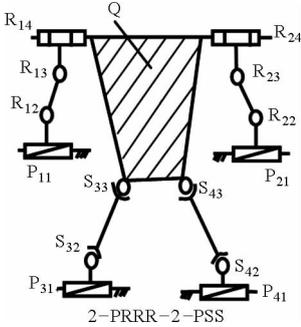
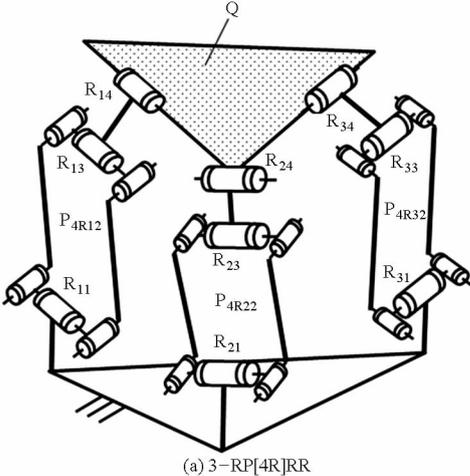
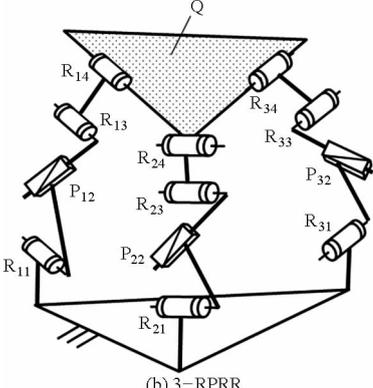
因此, 并联机构 3-RRC 的 POC = “t[3], r[0]”, 即具有“3 平移 0 转动”的方位特征。

### 3.2 并联机构 2-PRRR-2-PSS 的 POC 集符号推导

该并联机构具有非对称支路, 其中支路 L1、L2

表 2 并联机构 POC 符号推导算例

Tab. 2 POC symbolic derivation examples of PM

并联机构结构简图	并联机构字符描述	POC 符号分析结果
 <p>3-RRC</p>	<p>Top = L1 + L2 + L3 =                      “R11R12C13 + R21R22C23 + R31R32C33”                      Orients = {                      O1 = “R11 // R12 // C13”,                      O2 = “R21 // R22 // C23”,                      O3 = “R31 // R32 // C33”,                      O12 = “R11 ∧ R21”, O13 = “R11 ∧ R31”, O23 =                      “R21 ∧ R31” }</p>	<p>“t[3], r[0]”</p>
 <p>2-PRRR-2-PSS</p>	<p>Top = L1 + L2 + L3 + L4 =                      “P11R12R13R14 + P21R22R23R24 + P31S32S33 +                      P41S42S43”                      Orients = {                      O1 = “P11 ⊥ R12 // R13 ⊥ R14”,                      O2 = “P21 ⊥ R22 // R23 ⊥ R24”,                      O3 = “P31 ∧ S32 ∧ S33”,                      O4 = “P41 ∧ S42 ∧ S43”,                      O12 = “P11 // P21 ⊥ R12 // R22 ⊥ R14 // R24”, O34 =                      “P31 // P41”, O23 = “P21 // P31” }</p>	<p>“t[3], r(R12, R14)”</p>
 <p>(a) 3-RP[4R]RR</p>	<p>Top = L1 + L2 + L3 = “R11P12R13R14 + R21P22R23R24 +                      R31P32R33R34”                      Orients = {                      O1 = “P12#R11 // R13 // R14”,                      O2 = “P22#R21 // R23 // R24”,                      O3 = “P32#R31 // R33 // R34”,                      O12 = “R11 ∧ R21 ∧ P11 ∧ P22”,                      O23 = “R21 ∧ R31 ∧ P22 ∧ P32”,                      O13 = “R11 ∧ R31 ∧ P11 ∧ P32” }</p>	<p>“t[3], r[0]”</p>
 <p>(b) 3-RPRR</p>		

为 PRRR 形式, 而支路 L3、L4 为 PSS 形式, 参考点选择为动平台上任意一点 Q, 如表 2 所示。

(1) 支路内的消元运算

支路的拓扑结构多项式及方位关系链如表 2 第

2 行第 2 列所示。首先计算支路 L1 的运动特征, L1 = “P11R12R13R14”, 方位关系链 O1 = “P11 ⊥ R12 // R13 ⊥ R14”。该支路的移动特征 t1 及旋转特征 r1 分别计算为

$$t1 = t(L1)/O1 = "t(P11)t(R12)t(R13) \\ t(R14)" / "P11 \perp R12 // R13 \perp R14" = \\ "t(P11, R12)t(R13)t(R14)" / \\ "R12 // R13 \perp R14" = \\ "t(P11, R12)t(R14)" / "R12 \perp R14" = \\ "t(P11, R12, R14)" = "t[3]"$$

$$r1 = r(L1)/O1 = "r(P11)r(R12)r(R13) \\ r(R14)" / "P11 \perp R12 // R13 \perp R14" = \\ "r(R12)r(R13)r(R14)" / "R12 // R13 \perp \\ R14" = "r(R12)r(R14)" / "R12 \perp R14" = \\ "r(R12, R14)"$$

同理可得到支路 L2 的移动特征空间  $t_2$  及旋转特征空间  $r_2$

$$t2 = t(L2)/O2 = "t(P21, R22, R24)" = "t[3]" \\ r2 = r(L2)/O2 = "r(R22, R24)"$$

令 S. A1、S. A2 分别为 S 副的 2 条相互独立的旋转轴线。支路 L3、L4 具有相同的拓扑结构,先对支路 L3 进行消元运算,其移动特征空间  $t_3$  及旋转特征空间  $r_3$  分别计算为

$$t3 = t(L3)/O3 = "t(P31)t(S32)t(S33)" / \\ "P31 \wedge S32 \wedge S33" = \\ "t(P31)t(S32. A1)t(S32. A2)t(S33)" / \\ "P31 \wedge S32 \wedge S33" = \\ "t(P31, S32. A1, S32. A2)t(S33)" / "S32 \\ \wedge S33" = "t[3]" / "S32 \wedge S33" = "t[3]" \\ r3 = r(L3)/O3 = "r(P31)r(S32)r(S33)" / \\ "P31 \wedge S32 \wedge S33" = \\ "r(S32)r(S33)" / "S32 \wedge S33" = \\ "r[3]r(S33)" / "S33" = "r[3]"$$

同理得到支路 4 的移动特征空间  $t_4$  及旋转特征空间  $r_4$  分别为: $t_4 = "t[3]"$ 、 $r_4 = "r[3]"$ 。

### (2) 支路之间的消元运算

根据并联消元规则,由于各支路的移动特征空间均为 3 维,故该并联机构的移动特征消元运算可直接表示为

$$(t1 + t2 + t3 + t4) / O12O23O34O13O14O24 = \\ "t[3] + t[3] + t[3] + t[3]" / \\ O12O23O34O13O14O24 = "t[3]"$$

该并联机构的旋转特征空间的消元运算为

$$(r1 + r2 + r3 + r4) / O12O13O34 = "r1 + r2 + \\ r[3] + r[3]" / O12O23O34O13O14O24 = "r1 + r2" / \\ O12$$

考虑到  $O12 = "P11 // P21 \perp R12 // R22 \perp R14 // R24"$ ,易推知旋转特征空间  $r(R12, R14) // r(R22, R24)$ ,即  $r1 // r2$ ,则前式可继续推导为

$$"r1 + r2" / O12 = "r(R12, R14) + r(R22, \\ R24)" / "P11 // P21 \perp R14 // R24" = "r(R12, R14)"$$

因此,并联机构 2 - PRRR - 2PSS 的 POC =  $"t[3], r(R12, R14)"$ ,因而该并联机构具有“3 平移 2 转动”的方位特征。

### 3.3 并联机构 3 - RP<sub>4R</sub>RR 的 POC 集推导

该并联机构的支路为 HSOC 类型,每条支路由 3 个 R 副及 1 个 P[4R](即由 4 个平行 R 副并联)结构单元构成。由于 P[4R]只能提供平移运动,故可采用一般的 P 副替换,其动平台 POC 集并未受到影响,因而可按照简化并联机构进行 POC 集推导,如表 2 第 3 行第 1 列的 3 - RPRR。

#### (1) 支路内的消元运算

支路 L1 的移动特征空间的计算过程为

$$t1 = t(L1)/O1 = "t(R11)t(P12)t(R13) \\ t(R14)" / "P12 \# R11 // R13 // R14" = \\ "t(P12)t(R11)t(R13)t(R14)" / \\ "P12 \# R11 // R13 // R14" = \\ "t(P12)t(R11, R13)" / "P12 \# R11" = \\ t(P12, R11, R13) = "t[3]"$$

支路 L1 的旋转特征空间的计算过程为

$$r1 = r(L1)/O1 = "r(R11)r(P12)r(R13) \\ r(R14)" / "P12 \wedge R11 // R13 // R14" = \\ "r(R11)r(R13)r(R14)" / "R11 // R13 // R14" = \\ "r(R11)r(R13)" / "R11 // R13" = \\ "r(R11)" / "R11" = "r(R11)"$$

同理得到支路 L2、L3 的运动特征空间分别为

$$t2 = "t(P22, R21, P23)" = "t[3]"$$

$$r2 = "r(R21)"$$

$$t3 = "t(P32, R31, P33)" = "t[3]"$$

$$r3 = "r(R31)"$$

#### (2) 支路之间的消元运算

移动特征空间的消元运算为

$$(t1 + t2 + t3) / O12O23O13 = \\ "t[3] + t[3] + t[3]" / O12O23O13 = "t[3]"$$

对于旋转特征空间,可先进行  $r1 + r2$ ,再与  $r3$  进行消元。考虑到  $O12 = "R11 \wedge R21 \wedge P11 \wedge P22"$ ,则易推知  $r1 // r2$ ,则有

$$r12 = (r1 + r2) / O12 = "r(R11) + r(R21)" / \\ O12 = "r[0]"$$

再将  $r12$  与  $r3$  进行消元

$$(r12 + r3) = "r[0] + r(R31)" / O13O23 = "r[0]"$$

因此,该并联机构的 POC =  $"t[3], r[0]"$ ,具有“3 平移 0 转动”的方位特征。

## 4 结束语

采用拓扑结构多项式描述并联机构的运动副、支路等组成要素的排列顺序,能够有效表达和分辨机构的基本拓扑结构类型;方位关系链刻画了并联机构中运动副之间的轴线方向关系,由多个方位关系链构成的方位关系组可对支路内部的方位关系和

支路之间的方位关系提供完备描述。将并联机构的方位特征集分析归结为2种消元规则。该消元规则被定义为拓扑结构多项式和方位关系组之间的一种“商”运算,且具有迭代运算的代数特征。根据消元规则设计了方位特征集的程序化计算方法,采用符号推导方式,通过实例验证了本文消元规则的有效性。

## 参 考 文 献

- 1 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构结构综合方法的基本思想特点及其发展趋势[J]. 机械工程学报,2010,46(9):1-11.  
YANG T L, LIU A X, LUO Y F, et al. Methods for robot mechanism structure synthesis-basic principles, main characteristics and development tendency[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2010,46(9):1-11. (in Chinese)
- 2 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- 3 HERVE J M. Design of parallel manipulators via the displacement subgroup[C]//Proceedings of the 9th World Congress on Theory of Machine and Mechanisms,1995:2079-2082.
- 4 HERVE J M. The lie group of rigid displacement tool for mechanism design[J]. Mechanisms and Machine Theory,1999,34(5):719-730.
- 5 KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of parallel mechanisms[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.
- 6 YANG T L, LIU A X, LUO Y F, et al. Comparison study on three approaches for type synthesis of robot mechanisms[C]//Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2009,7(A & B):453-462.
- 7 郭林. 面向镜片分拣的3-HRC并联机器人设计与研究[D]. 镇江:江苏大学,2014.  
GUO L. Design and research of 3-HRC parallel mechanism for spectacles lenses' separation[D]. Zhenjiang: Jiangsu University, 2014. (in Chinese)
- 8 沈惠平,赵海彬,邓嘉鸣,等. 基于自由度分配和方位特征集的混联机器人设计方法及应用[J]. 机械工程学报,2011,47(23):56-63.  
SHEN H P, ZHAO H B, DENG J M, et al. Type design method and the application for hybrid robot based on freedom distribution and position and orientation characteristic set[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011,47(23):56-63. (in Chinese)
- 9 邓嘉鸣,余同柱,沈惠平,等. 基于方位特征的六自由度并联机构型综合[J]. 中国机械工程,2012,23(21):2525-2530.  
DEN J M, YU T Z, SHEN H P, et al. Type synthesis for 6-DOF novel parallel mechanisms based on POC set method[J]. China Mechanical Engineering, 2012,23(21):2525-2530. (in Chinese)
- 10 朱伟,姜桂林,陈宁宁,等. 基于方位特征集理论的3-UPU机构型综合及结构优化[J]. 机械传动,2014,38(12):66-72.  
ZHU W, JIANG G L, CHEN N N, et al. Structure synthesis and optimization of 3-UPU based on theory of position and orientation set[J]. Mechanical Transmission, 2014,38(12):66-72. (in Chinese)
- 11 丁华锋,黄真,刘力改,等. 运动链拓扑图绘制及特征描述获取的计算机实现[J]. 燕山大学学报,2006,30(1):10-13.  
DING H F, HUANG Z, LIU L G, et al. Computerized sketching topological graphs of kinematic chains and obtaining of characteristic representations[J]. Journal of Yanshan University, 2006,30(1):10-13. (in Chinese)
- 12 陈超. 基于序单开链法的并联机器人结构分析程序化研究[D]. 南昌:南昌大学,2011.  
CHEN C. Research on programmed structure analysis for parallel manipulators based on ordered single opened chains[D]. Nanchang: Nanchang University, 2011. (in Chinese)
- 13 SIMONI R, CARBONI A P, SIMAS H, et al. Enumeration of kinematic chains and mechanisms review[J]. Proc. IMech E Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2011,223(4):1017-1024.
- 14 范守文,徐礼钜,周肇飞,等. 基于数字-符号法的空间4自由度并联机构位置正解[J]. 机械工程学报,2002,38(9):57-60.  
FAN S W, XU L J, ZHOU Z F, et al. Numeric-symbolic approach for direct displacement solution of a 4-DOF spatial parallel mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002,38(9):57-60. (in Chinese)
- 15 方跃法,房海蓉. 并联机器人支链结构的解析识别[J]. 机械设计与研究,2004,20(增刊1):231-234.  
FANG Y F, FANG H R. Analytical identification of limb structures of parallel manipulators[J]. Mechanical Design and Research, 2004,20(Supp.1):231-234. (in Chinese)
- 16 朱煜,汪劲松,张华,等. 并联机构拓扑结构的字符串描述及其应用[J]. 中国机械工程,2003,14(12):991-995.  
ZHU Y, WANG J S, ZHANG H, et al. Description of topological structure of parallel mechanisms and its applications[J]. China Mechanical Engineering, 2003,14(12):991-995. (in Chinese)
- 17 丁华锋,黄真,邹婷. 并联机构的结构描述[J]. 燕山大学学报,2007,31(1):1-5.  
DING H F, HUANG Z, ZOU T. Structure description of parallel mechanism[J]. Journal of Yanshan University, 2007,31(1):1-5. (in Chinese)

- 18 CHU J K, CAO W Q. Identification of isomorphism among kinematic chains and inversions using link's adjacent-chain-table[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1994, 29(1): 53 - 58.
- 19 李树军, 王德伦, 戴建生. 含环路布局和运动副轴线方位特征的运动链拓扑结构描述[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(6): 34 - 40.  
LI S J, WANG D L, DAI J S. Topology of kinematic chains with loops and orientations of joints axes[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2009, 45(6): 34 - 40. (in Chinese)
- 20 李树军, 戴建生. 基于 Assur 杆组元素的平面机构的拓扑描述[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(19): 8 - 13.  
LI S J, DAI J S. Topological representation of planar mechanisms based on Assur group elements[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(19): 8 - 13. (in Chinese)
- 21 YANG T L, SUN D J. A general DOF formula for parallel mechanisms and multi-loop spatial mechanisms[J]. *ASME Journal of Mechanisms and Robotics*, 2012, 4(1): 011001 - 1 - 17.
- 22 YANG T L, LIU A X, JIN Q, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of robot mechanisms [J]. *ASME Journal of Mechanical Design*, 2009, 131(2): 021001 - 1 - 17.
- 23 杨廷力, 沈惠平, 刘安心, 等. 机构自由度公式的基本形式、自由度分析及其物理内涵[J]. *机械工程学报*, 2015, 51(13): 69 - 80.  
YANG T L, SHEN H P, LIU A X, et al. Review of the formulas for degrees of freedom in the past ten years [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2015, 51(13): 69 - 80. (in Chinese)
- 24 曾惠芬. 解耦并联机器人机构设计[D]. 南昌:南昌大学, 2009.  
ZENG H F. Mechanical design for decoupled parallel manipulators[D]. Nanchang: Nanchang University, 2009. (in Chinese)
- 25 廖明, 刘安心, 沈惠平, 等. 面向计算辅助分析的并联机构符号描述方法[J]. *农业机械学报*, 2015, 46(7): 310 - 317.  
LIAO M, LIU A X, SHEN H P, et al. Symbolic description of parallel mechanism for computer aided analysis[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2015, 46(7): 310 - 317. (in Chinese)
- 26 张彦斌, 吴鑫. 完全解耦二移动二转动并联机构结构综合[J]. *农业机械学报*, 2013, 44(8): 250 - 256.  
ZHANG Y B, WU X. Structure synthesis of fully-decoupled two-translational and two-rotational parallel mechanisms [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013, 44(8): 250 - 256. (in Chinese)
- 27 房立丰, 刘安心, 杨廷力, 等. 一平移二转动并联稳定平台拓扑结构设计[J]. *农业机械学报*, 2012, 43(2): 205 - 210.  
FANG L F, LIU A X, YANG T L, et al. Topology structure design of 1T - 2R parallel stable platform[J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2012, 43(2): 205 - 210. (in Chinese)
- 28 LI S J. Computer-aided structure synthesis of spatial kinematic chains[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 1990, 25(6): 645 - 653.
- 29 TSAI L W. The enumeration of a class of three-DOF parallel manipulators[C] // *Proceedings of the Tenth World Congress of the Theory of Machine and Mechanisms*, 1999: 1121 - 1126.
- 30 YANG T L, SUN D J. Rank and mobility of single loop kinematic chains[C] // *ASME 2008 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2008, 2(A & B): 1369 - 1378.
- 31 YANG T L, LIU A X, JIN Q, et al. Position and orientation characteristic equation for topological design of serial mechanisms [C] // *ASME 2008 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2008, 2(A & B): 1347 - 1356.