doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2016.03.052

类 Exechon 并联模块的结构设计与刚度建模

路　曼　赵艳芹
(安徽工业大学机械工程学院, 马鞍山 243032)

摘要: 针对 Exechon 并联机构工作空间内动平台转动能力较差这一问题,采用机构变异方法,提出了机构构型为 2R$\underline{P}$U&1R$\underline{P}$S 的类 Exechon 并联模块,并对其进行了结构设计。围绕所设计的类 Exechon 并联模块,借鉴子结构综合思想,建立了该并联模块的刚度模型,并推导出动平台刚度矩阵的解析表达。分析了类 Exechon 并联模块在典型位姿下的刚度性能,并将其与有限元仿真结果进行了对比。结果表明,所建解析模型具有较高计算精度,可用于机构工作全域内刚度特性的快速预估。

关键词: 类 Exechon; 并联模块; 结构设计; 刚度建模
中图分类号: TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2016)03-0367-06

Structural Design and Stiffness Modeling for Exe-variant Parallel Kinematic Machine

Lu Man　Zhao Yanqin
(*School of Mechanical Engineering*, *Anhui University of Technology*, *Maanshan* 243032, *China*)

Abstract: Exechon parallel kinematic machine (PKM) has been applied to machining, assembling and aerospace industries due to its high rigidity and high dynamics. However, its rotational ability is comparatively weak. In order to improve the rotational ability of the Exechon PKM, this paper proposed an Exe-variant PKM whose topology is a 2R$\underline{P}$U&1R$\underline{P}$S parallel mechanism. And the mechanical structure of the proposed PKM was designed. According to its structure features, Exe-variant PKM was divided into several subsystems. By considering the compliances of joints and limb structures and using the substructure synthesis technique, an analytical stiffness model was developed for performance evaluation. The stiffness matrix of the platform was derived to demonstrate a position-dependency. The stiffness matrix of the Exe-variant PKM at the extreme configuration was computed to show a coupling effect in the PKM's stiffness characteristics. Deformation of the Exechon PKM under an external load was computed by ANSYS workbench, based on calculation errors between the finite element method and the proposed analytical method which were obtained to illustrate the high accuracy of the analytical model. The proposed methodology of stiffness modeling can also be applied to other overconstrained PKMs and can evaluate the global rigidity over workplace efficiently with minor revisions.

Key words: Exe-variant; parallel kinematic machine; structural design; stiffness modeling

引言

与其他少自由度并联机构相比,Exechon 并联机构因其被动关节数目少且存在过约束而具备良好的刚度和动力学性能,近年来常作为核心功能模块用于搭建 5 自由度混联机床,并已用于航空、航天大

收稿日期: 2015-07-24　修回日期: 2015-09-07
基金项目: 国家自然科学基金项目(51375013)、高性能复杂制造国家重点实验室(中南大学)开放基金项目(Kfkt2013-12)、上海市复杂薄板结构数字化制造重点实验室开放课题项目(2014002)和机械制造系统工程国家重点实验室(西安交大)开放基金项目(sklms2015004)
作者简介: 路曼(1972—),女,讲师,主要从事机械设计研究,E-mail: mannlu@163.com

型铝合金结构件的高速切削[1-2]。学术界和工业界围绕 Exechon 并联模块开展了大量研究，内容涉及运动学[3-5]、刚度[6-8]和动力学[9-10]等诸多方面。

从机构学角度分析，Exechon 并联模块为 2UPR&1SPR 并联机构。现有研究表明，该类并联机构虽然具有良好的刚度和动力学特性，但其动平台的转动能力较差，某些场合难以满足实际加工需求[4]。鉴于此，笔者在 Exechon 并联模块基础上，采用机构变异方法，提出将 Exechon 并联模块中 3 条支链与动、静平台相连的被动关节互置，得到一类新的并联装置，即类 Exechon 模块。

笔者在前期研究中，已证实在机构尺寸相同的情况下，类 Exechon 并联模块的工作空间与 Exechon 并联模块相当，但具备更强的转动能力，在同一工作平面上可达到更大的工作转角范围[11]。在此基础上，本文将进一步开展类 Exechon 并联模块的结构设计，并围绕所设计的结构开展其刚度建模研究，以期在增强机构工作空间内转动能力的同时，保留 Exechon 并联模块的高刚度特性。

为准确高效地揭示类 Exechon 这一新型装置的刚度特性，本文采用有限元法（FEM）[12-13]和虚拟关节法（VJM）[14-16]分别建立支链体和运动关节的刚度模型，进而运用子结构法综合出类 Exechon 并联模块的静刚度解析模型，据此分析机构工作空间内的刚度特性。与此同时，建立 Exechon 并联模块的有限元模型，对其典型位姿下的刚度进行数值模拟，并与解析计算结果对比，以验证解析模型的计算精度。

1　结构设计

1.1　拓扑构型与运动学建模

图 1 所示为类 Exechon 并联模块的机构运动简图。

由图 1 可知，支链 1、2 分别通过虎克铰 U 和转动副 R 与动、静平台相连；支链 3 分别通过球铰 S 和转动副 R 与动、静平台相连，故其为 2R$\underline{P}$U&1R$\underline{P}$S 并联机构。图 1 中，$\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 分别表示动、静平台，可设定为等腰直角三角形且 $\angle A_1A_3A_2=\angle B_1B_3B_2=90°$；$B_1$、$B_2$、$B_3$ 为转动副的几何中心，A_1 和 A_2 分别为支链 1、2 上虎克铰的几何中心，A_3 为支链 3 上球铰的几何中心，C_1、C_2、C_3 为各支链丝杠后端支承轴承中点。

为方便分析，建立以下坐标系：在 A_1A_2 中点 A 处建立动平台连体坐标系 $Auvw$，其 u 轴从 A 指向 A_3，v 轴从 A 指向 A_2，w 轴由右手定则确定；在 B_1B_2 中点 B 处建立惯性参考系 $Bxyz$，其 x 轴从 B 指向

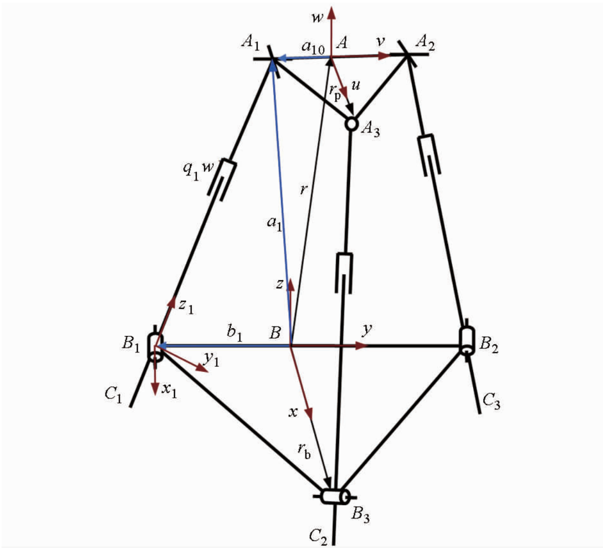


图 1　类 Exechon 并联模块机构运动简图

Fig. 1　Schematic diagram of Exe-variant PKM

B_3，y 轴从 B 指向 B_2，z 轴经由右手定则确定；在 B_i 处建立支链连体坐标系 $B_ix_iy_iz_i$（$i=1,2,3$），其 x_i 轴与转动副旋转轴线重合，z_i 轴沿支链的方向，y_i 轴由右手定则确定。为清晰表述，图 1 中仅示出支链 1 的连体坐标系 $B_1x_1y_1z_1$。

基于上述坐标系设定，经运动学推导给出动平台连体坐标系 $Auvw$、支链连体坐标系 $B_ix_iy_iz_i$ 相对于惯性坐标系 $Bxyz$ 的变换矩阵为

$$\boldsymbol{R}_0:\mathrm{Trans}(Auvw\rightarrow Bxyz) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{R}_i:\mathrm{Trans}(B_ix_iy_iz_i\rightarrow Bxyz) \tag{2}$$

上述变换矩阵将用于刚度建模。篇幅所限，相关参数的含意及详细推导参见文献[11]。

1.2　结构设计

图 2 为以类 Exechon 并联模块为核心功能部件搭建的五坐标加工单元的结构示意图。

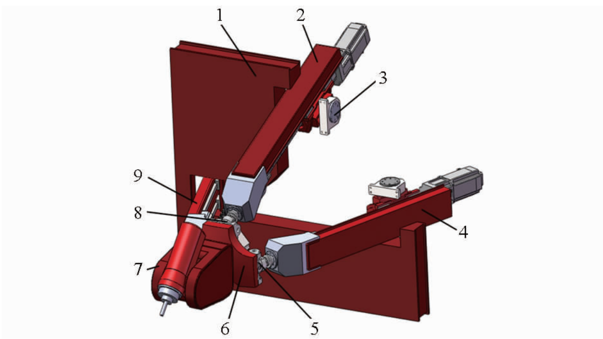


图 2　类 Exechon 混联装置实体模型

Fig. 2　A CAD model of Exe-variant machine

1. 静平台　2. 支链 3　3. R 副　4. 支链 1　5. U 副　6. 动平台　7. 2R 转头　8. S 副　9. 支链 2

由图 2 可知，该五坐标加工单元由类 Exechon 并联模块和 2 自由度串联转头组成。其中，2 自由度转头可根据加工需求选取不同的功能模块，下文

仅讨论类 Exechon 并联模块的设计和刚度分析。

通过技术经济分析，确定 RPU、RPS 支链的机械结构设计方案如图 3 所示。其中，各运动支链由 U/S 副、R 副、滚珠丝杠、滑块、支链体和电动机等组成。Ⅰ和Ⅱ分别为 A_iD_i 和 D_iC_i 段的等效截面。

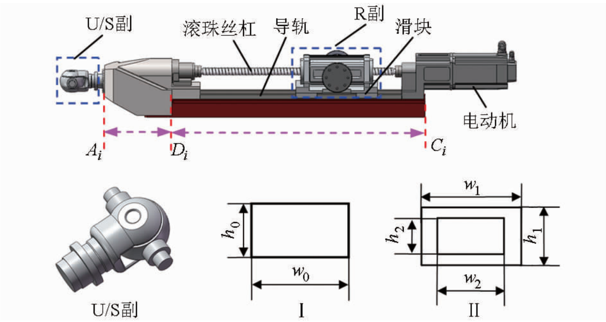


图 3　支链装配体结构示意图

Fig. 3　Assembly of a RPU/RPS limb

2　刚度建模

根据类 Exechon 并联模块的结构特点，采用子结构综合法，将其划分为动平台子系统、静平台子系统和 3 个支链子系统，并作如下建模假设：①因动、静平台刚度较大，故按刚体处理。②计入支链体的结构柔性，将其视为具有规则截面（如图 3 所示Ⅰ、Ⅱ）的空间梁。③计入各关节的变形，将其简化为具有等效刚度且位于各关节几何中心的集中弹簧。④忽略各关节处的摩擦、阻尼和间隙等非线性因素，同时忽略机构运行时的刚体惯性力。

2.1　支链子系统静力学方程

根据图 3 所示的支链装配体的装配关系和结构特点，可大致将其分成 3 部分：支链体、R 副、U/S 副。

基于前述建模假设，可将支链简化为受两组具有等效刚度的集中弹簧约束的规则截面空间梁，其力学模型如图 4 所示。图中，k_{rxi}、k_{ryi}、k_{rzi} 和 k_{rui}、k_{rvi}、k_{rwi} 分别是支链 i（$i=1,2,3$）上 R 副的等效线刚度和角刚度；k_{sx}、k_{sy}、k_{sz} 和 k_{su}、k_{sv}、k_{sw} 分别是支链 3 上 S 副的等效线刚度和角刚度；k_{uxi}、k_{uyi}、k_{uzi} 和 k_{uui}、k_{uvi}、k_{uwi} 分别是支链 i（$i=1,2$）上 U 副的等效线刚度和

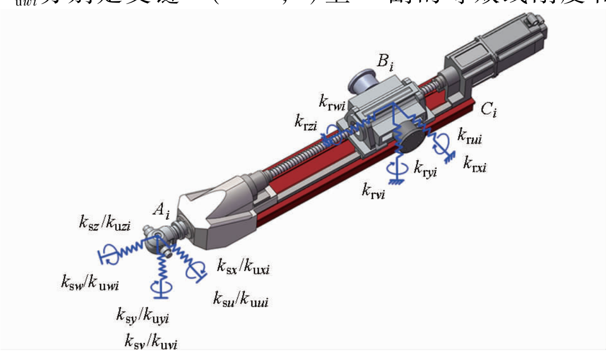


图 4　支链的简化力学模型

Fig. 4　Simplified force diagram of an individual limb

角刚度。由关节约束特性有：$k_{su}=k_{sv}=k_{sw}=0$；$k_{rui}=0$；$k_{uui}=k_{uvi}=0$。

采用 2 节点 12 自由度的空间梁单元对图 4 所示的支链体进行网格划分[17]，并保证 A_i、B_i 和 C_i 为其上的 3 个节点。计入边界条件，可给出 $B_ix_iy_iz_i$ 坐标系下支链 i 的静力平衡方程

$$\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{f}_i \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{u}_i=[\boldsymbol{\varepsilon}_{Ai}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\xi}_{Ai}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{Bi}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\xi}_{Bi}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{\varepsilon}_{Ci}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\xi}_{Ci}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{f}_i=[\boldsymbol{f}_{Ai}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\tau}_{Ai}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{f}_{Bi}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\tau}_{Bi}^{\mathrm{T}}\quad \cdots\quad \boldsymbol{f}_{Ci}^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\tau}_{Ci}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

式中　$\boldsymbol{k}_i$——支链坐标系中支链体的刚度矩阵

$\boldsymbol{u}_i$——支链坐标系中节点广义坐标列阵

$\boldsymbol{f}_i$——支链坐标系中节点广义外载列阵

$\boldsymbol{\varepsilon}_{ji}$、$\boldsymbol{\xi}_{ji}$——$B_ix_iy_iz_i$ 中节点 j_i 的线位移和角位移（$j=A,B,C$）

$\boldsymbol{f}_{ji}$、$\boldsymbol{\tau}_{ji}$——$B_ix_iy_iz_i$ 中节点 j_i 的约束反力和约束反力矩（$j=A,B,C$）

各节点坐标与 $\boldsymbol{u}_i$ 存在变换关系

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_{Ai}=\boldsymbol{N}_{Ai}^{A1}\boldsymbol{u}_i\\ \boldsymbol{\xi}_{Ai}=\boldsymbol{N}_{Ai}^{A2}\boldsymbol{u}_i\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_{Bi}=\boldsymbol{N}_{Ai}^{B1}\boldsymbol{u}_i\\ \boldsymbol{\xi}_{Bi}=\boldsymbol{N}_{Ai}^{B2}\boldsymbol{u}_i\end{cases} \tag{7}$$

式中　$\boldsymbol{N}_{Ai}^{A1}$、$\boldsymbol{N}_{Ai}^{A2}$——支链坐标系 $B_ix_iy_iz_i$ 中 $\boldsymbol{u}_i$ 相对于 A_i 节点坐标的变换矩阵

$\boldsymbol{N}_{Ai}^{B1}$、$\boldsymbol{N}_{Ai}^{B2}$——支链坐标系 $B_ix_iy_iz_i$ 中 $\boldsymbol{u}_i$ 相对于 B_i 节点坐标的变换矩阵

将式（3）变换至惯性参考系 $Bxyz$ 可得

$$\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{U}_i=\boldsymbol{F}_i \tag{8}$$

$$\boldsymbol{T}_i=\mathrm{diag}[\boldsymbol{R}_i,\cdots,\boldsymbol{R}_i] \tag{9}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{U}_i=\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{u}_i\\ \boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{f}_i\end{cases} \tag{10}$$

式中　$\boldsymbol{K}_i$——$Bxyz$ 中支链的刚度矩阵

$\boldsymbol{U}_i$——$Bxyz$ 中支链的位移列阵

$\boldsymbol{F}_i$——$Bxyz$ 中支链的外载列阵

$\boldsymbol{R}_i$——$B_ix_iy_iz_i$ 相对于 $Bxyz$ 的变换矩阵

$\boldsymbol{T}_i$——支链连体坐标系相对于惯性坐标系的变换矩阵

2.2　动平台子系统静力学方程

动平台的受力如图 5 所示。

图 5 中，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}$ 和 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{P}}$ 分别为作用于动平台的外力和外力矩；$\boldsymbol{F}_{Ai}$ 和 $\boldsymbol{T}_{Ai}$ 分别为支链作用于动平台的约束反力和约束反力矩，且有

$$\begin{cases}\boldsymbol{F}_{Ai}=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{f}_{Ai}\\ \boldsymbol{T}_{Ai}=\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{\tau}_{Ai}\end{cases} \tag{11}$$

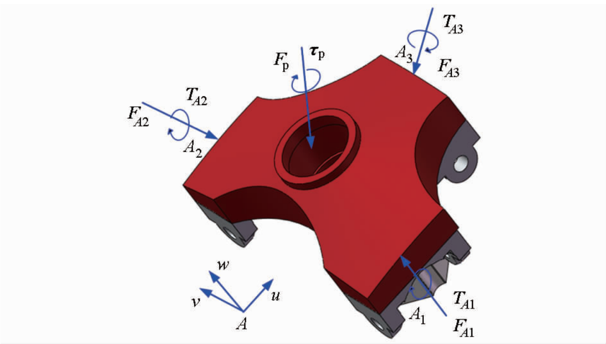


图 5　动平台受力示意图

Fig. 5　Force diagram of platform

设在坐标系 $Bxyz$ 下由点 B 指向点 A_i 的向量为 $\boldsymbol{a}_i$，则动平台的静力平衡方程为

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}\boldsymbol{F}_{Ai}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{P}}\\ \sum\limits_{i=1}^{3}\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{F}_{Ai}+\sum\limits_{i=1}^{i=3}\boldsymbol{T}_{Ai}=\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{P}}\end{cases}\tag{12}$$

2.3　变形协调条件

动平台与支链间的位移关系如图 6 所示。图中，$A_{i\mathrm{M}}$ 和 $A_{i\mathrm{L}}$ 分别表示耦合界面上动平台和支链上的点；$\Delta\boldsymbol{A}_i$、$\delta\boldsymbol{A}_i$ 和 $\boldsymbol{\varepsilon}_{Ai}$、$\boldsymbol{\xi}_{Ai}$ 分别表示支链坐标系 $B_ix_iy_iz_i$ 中 $A_{i\mathrm{M}}$ 和 $A_{i\mathrm{L}}$ 的线位移和角位移。$\boldsymbol{k}_{\mathrm{u1}i}=\mathrm{diag}[k_{\mathrm{ux}i}\quad k_{\mathrm{uy}i}\quad k_{\mathrm{uz}i}]$ 和 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{u2}i}=\mathrm{diag}[k_{\mathrm{uu}i}\quad k_{\mathrm{uv}i}\quad k_{\mathrm{uw}i}]$ 分别是支链 i（$i=1,2$）上 U 副的线刚度和角刚度；$\boldsymbol{k}_{\mathrm{s1}}=\mathrm{diag}[k_{\mathrm{sx}}\quad k_{\mathrm{sy}}\quad k_{\mathrm{sz}}]$ 和 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{s2}}=\mathrm{diag}[k_{\mathrm{su}}\quad k_{\mathrm{sv}}\quad k_{\mathrm{sw}}]$ 分别是支链 3 上 S 副的等效线刚度和等效角刚度，并且有 $\boldsymbol{k}_{\mathrm{s2}}=0$。

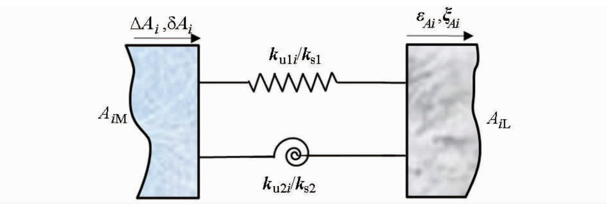


图 6　动平台和支链间的位移关系图

Fig. 6　Displacement relationship between moving platform and limb

动平台的弹性位移 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}}=[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}\quad\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 是由 3 条支链的变形引起的，故 $A_{i\mathrm{M}}$ 点处的弹性线位移 $\Delta\boldsymbol{A}_i$ 和角位移 $\delta\boldsymbol{A}_i$ 可表示为

$$\begin{cases}\Delta\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{li}\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}}\\ \delta\boldsymbol{A}_i=\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{ai}\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}}\end{cases}\tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{D}^{li}$ 和 $\boldsymbol{D}^{ai}$ 分别为动平台的弹性位移 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}}$ 相对于 $A_{i\mathrm{M}}$ 点处的弹性线位移和角位移的变换矩阵，且有

$$\begin{cases}\boldsymbol{D}^{li}=[\boldsymbol{I}_{3\times3}\quad\hat{\boldsymbol{a}}_i]\\ \boldsymbol{D}^{ai}=[\boldsymbol{d}\quad\boldsymbol{I}_{3\times3}]\end{cases}\tag{14}$$

式中　$\boldsymbol{d}$——维数为 3×3 的零矩阵

$\hat{\boldsymbol{a}}_i$——向量 $\boldsymbol{a}_i$ 的反对称矩阵

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i=\begin{bmatrix}0 & z_{Ai} & -y_{Ai}\\ -z_{Ai} & 0 & x_{Ai}\\ y_{Ai} & -x_{Ai} & 0\end{bmatrix}\tag{15}$$

式中　x_{Ai}、y_{Ai}、z_{Ai}——点 A_i 在 $Bxyz$ 中的坐标分量

由动平台与支链间的位移关系，可给出两者间的关节约束力和约束力矩

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_{Ai}=-\boldsymbol{k}_{\mathrm{u1}i}(\boldsymbol{N}_{Bi}^{A1}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i-\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{li}\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}})\\ \boldsymbol{\tau}_{Ai}=-\boldsymbol{k}_{\mathrm{u2}i}(\boldsymbol{N}_{Bi}^{A2}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i-\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{ai}\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}})\end{cases}\quad(i=1,2)\tag{16}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_{A3}=-\boldsymbol{k}_{\mathrm{s1}}(\boldsymbol{N}_{B3}^{A1}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_3-\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{l3}\boldsymbol{U}_{\mathrm{P}})\\ \boldsymbol{\tau}_{A3}=0\end{cases}\tag{17}$$

类似地，可给出支链与静平台间的关节约束力和约束力矩

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_{Bi}=-\boldsymbol{k}_{\mathrm{r1}i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{B1}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i\\ \boldsymbol{\tau}_{Bi}=-\boldsymbol{k}_{\mathrm{r2}i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{B2}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_i\end{cases}\tag{18}$$

2.4　系统的静力学方程

将式（16）～（18）代入式（8）、（12），组装后可得系统静力学方程

$$\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{F}\tag{19}$$

式中　$\boldsymbol{K}$——惯性坐标系 $Bxyz$ 下系统刚度矩阵

$\boldsymbol{U}$——惯性坐标系 $Bxyz$ 下系统位移列阵

$\boldsymbol{F}$——惯性坐标系 $Bxyz$ 下系统外载列阵

其中，刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可表示为分块矩阵的形式

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{1,1} & & & \boldsymbol{K}_{1,4}\\ & \boldsymbol{K}_{2,2} & & \boldsymbol{K}_{2,4}\\ & & \boldsymbol{K}_{3,3} & \boldsymbol{K}_{3,4}\\ \boldsymbol{K}_{4,1} & \boldsymbol{K}_{4,2} & \boldsymbol{K}_{4,3} & \boldsymbol{K}_{4,4}\end{bmatrix}\tag{20}$$

式中，各分块矩阵为

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_{i,i}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{\mathrm{u1}i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{A1}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{\mathrm{u2}i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{A2}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{\mathrm{r1}i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{B1}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{\mathrm{r2}i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{B2}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{K}_i\quad(i=1,2)\\ \boldsymbol{K}_{3,3}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{\mathrm{s1}}\boldsymbol{N}_{B3}^{A1}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\\ 0\\ \vdots\\ \boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{\mathrm{r13}}\boldsymbol{N}_{B3}^{B1}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{\mathrm{r23}}\boldsymbol{N}_{B3}^{B2}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\boldsymbol{K}_3\end{cases}\tag{21}$$

$$\boldsymbol{K}_{4,4}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{2}\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u1i}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{li}+\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{s1}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{l3}\\ \sum_{i=1}^{2}(\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u1i}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{li}+\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u2i}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{ai})+\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{s1}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{l3}\end{bmatrix}\tag{22}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_{i,4}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u1i}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{li}\\-\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u2i}\boldsymbol{R}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{ai}\\0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{K}_{4,i}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u1i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{A1}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\\-\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u1i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{A1}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{k}_{u2i}\boldsymbol{N}_{Bi}^{A2}\boldsymbol{T}_i^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\end{cases}\quad(i=1,2)\tag{23}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_{3,4}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{s1}\boldsymbol{R}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}^{l3}\\0\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{K}_{4,3}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{s1}\boldsymbol{N}_{B3}^{A1}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\\-\boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{R}_3\boldsymbol{k}_{s1}\boldsymbol{N}_{B3}^{A1}\boldsymbol{T}_3^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\end{cases}\tag{24}$$

对式(20)取逆并提取其最后的 6×6 子矩阵，可得动平台的柔度矩阵，再对其做一次逆运算即为动平台的刚度矩阵。其数学表达式为

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}=\boldsymbol{T}_0^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{K}^{-1}|_{(H-18n)\times(H-18n)}]^{-1}\boldsymbol{T}_0\tag{25}$$

其中　$\boldsymbol{T}_0=\mathrm{diag}[\boldsymbol{R}_0,\ \boldsymbol{R}_0]$　$H=18n+6$

式中　n——支链节点数

式(25)给出了任意位姿下类 Exechon 并联模块动平台的刚度解析表达。

3　实例分析

不失一般性，以图 2 所示的类 Exechon 并联模块为例，对其进行刚度分析。表 1、2 分别给出了该并联模块的几何参数和关节刚度参数。

表 1　类 Exechon 并联模块几何参数

Tab. 1　Geometries of Exe-variant PKM

r_{p}/mm	r_{b}/mm	s/mm	l/mm	w_0/mm	w_1/mm
220	600	400	1 460	210	180
w_2/mm	h_0/mm	h_1/mm	h_2/mm	$\psi_{\max}$/(°)	$\theta_{\max}$/(°)
160	173	80	60	±40	±40

表 1 中，r_{p}、r_{b}分别为动、静平台半径；s 为动平台最大行程；l 表示支链长度；w_0和 h_0分别为矩形截面Ⅰ的宽度和高度；w_1、w_2和 h_1、h_2分别为矩形截面Ⅱ的宽度和高度；$\psi_{\max}$和 $\theta_{\max}$分别为偏转角 ψ 和俯仰角 θ 的最大值。

表 2 中，k_{uij0}($i=1,\mathrm{s},\mathrm{c}$; $j=x,y,z,w$)为虎克铰长轴(l)、短轴(s)和交叉轴(c)沿相关方向的线刚度和角刚度；k_{rx0}、k_{ry0}和 k_{rz0}分别表示转动副在 3 个方向的线刚度，k_{rv0}和 k_{rw0}分别为转动副绕其自身坐标系 y、z 轴的角刚度；k_{sij0}($i=1$, s, c; $j=x$, y, z)分别表示球铰长轴(l)、短轴(s)和交叉轴(c)沿相关方向的线刚度。各刚度参数的取值可由有限元分析确定。

表 2　支链坐标系下各关节刚度系数

Tab. 2　Stiffness coefficients of joints in local frames

参数	数值	参数	数值
$k_{\mathrm{ul}x0}$/(N·μm^{-1})	112	$k_{\mathrm{r}y0}$/(N·μm^{-1})	530
$k_{\mathrm{ul}y0}$/(N·μm^{-1})	214	$k_{\mathrm{r}z0}$/(N·μm^{-1})	1 006
$k_{\mathrm{ul}z0}$/(N·μm^{-1})	100	$k_{\mathrm{r}v0}$/(MN·m·rad^{-1})	18
$k_{\mathrm{ul}w0}$/(MN·m·rad^{-1})	24	$k_{\mathrm{r}w0}$/(MN·m·rad^{-1})	18
$k_{\mathrm{us}x0}$/(N·μm^{-1})	23	$k_{\mathrm{sl}x0}$/(N·μm^{-1})	112
$k_{\mathrm{us}y0}$/(N·μm^{-1})	23	$k_{\mathrm{sl}y0}$/(N·μm^{-1})	214
$k_{\mathrm{us}z0}$/(N·μm^{-1})	623	$k_{\mathrm{sl}z0}$/(N·μm^{-1})	100
$k_{\mathrm{us}w0}$/(MN·m·rad^{-1})	18	$k_{\mathrm{ss}x0}$/(N·μm^{-1})	23
$k_{\mathrm{uc}x0}$/(N·μm^{-1})	676	$k_{\mathrm{ss}y0}$/(N·μm^{-1})	23
$k_{\mathrm{uc}y0}$/(N·μm^{-1})	446	$k_{\mathrm{ss}z0}$/(N·μm^{-1})	623
$k_{\mathrm{uc}z0}$/(N·μm^{-1})	348	$k_{\mathrm{sc}x0}$/(N·μm^{-1})	676
$k_{\mathrm{uc}w0}$/(MN·m·rad^{-1})	18	$k_{\mathrm{sc}y0}$/(N·μm^{-1})	446
$k_{\mathrm{r}x0}$/(N·μm^{-1})	380	$k_{\mathrm{sc}z0}$/(N·μm^{-1})	348

篇幅所限，仅分析机构位于极限位姿时($p_z=$ 1 200 mm，$\theta=0°$，$\psi=0°$)的刚度特性。由式(25)求得动平台在其连体坐标系下的刚度矩阵

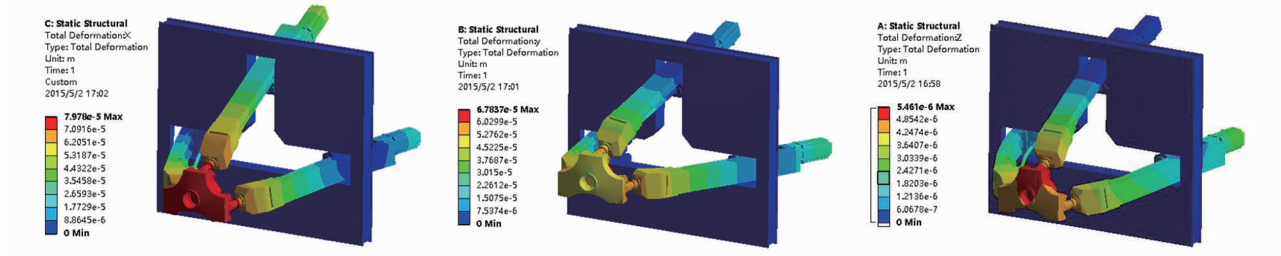
$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{P}}=\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}&k_{14}&k_{15}&k_{16}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}&k_{24}&k_{25}&k_{26}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}&k_{34}&k_{35}&k_{36}\\k_{41}&k_{42}&k_{43}&k_{44}&k_{45}&k_{46}\\k_{51}&k_{52}&k_{53}&k_{54}&k_{55}&k_{56}\\k_{61}&k_{62}&k_{63}&k_{64}&k_{65}&k_{66}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}11.818\,4&0&-17.559\,2&0&18.045\,1&0\\0&14.261\,8&0&-24.840\,3&0&0.691\,0\\-17.559\,2&0&166.350\,2&0&-33.270\,0&0\\0&-24.840\,3&0&44.447\,1&0&-0.829\,2\\18.045\,1&0&-33.270\,0&0&29.269\,7&0\\0&0.691\,0&0&-0.829\,2&0&3.408\,2\end{bmatrix}\times10^6\tag{26}$$

由式(26)可知，刚度矩阵存在耦合项。为便于分析，将对角线元素 k_{11}、k_{22}、k_{33}定义为动平台沿 u、v、w 方向的主线刚度，k_{44}、k_{55}、k_{66}定义为动平台绕 u、v、w 方向的主角刚度，而将非对角线元素定义为耦合刚度。通过比较可发现，动平台沿 w 方向的线刚度 k_{33}远高于其沿 u、v 方向的线刚度 k_{11}和 k_{22}，表明该并联模块在 w 方向具有良好的抵抗外力变形的能力。相反，动平台绕 w 方向的角刚度 k_{66}远低于其绕 u、v 方向的角刚度 k_{44}和 k_{55}，显示该并联模块绕 w

方向抗扭能力较差。

为验证上述静刚度模型的计算精度，在 ANSYS Workbench 中建立图 2 所示并联模块的三维有限元模型，并分别沿 u、v 和 w 方向在动平台中心点 A 处施加 1 000 N 的外力，经静力分析得到相应方向的变形，其结果如图 7 所示。



(a) u方向　　(b) v方向　　(c) w方向

图 7　类 Exechon 并联模块变形云图

Fig. 7　Deformations of Exe-variant PKM

由图 7 可知，静平台的变形近似为零，表明刚度建模时将静平台视为刚体这一假设是合理的。相反，各支链前端变形较大，不应视为刚体，刚度建模时需计入该环节柔性。此外，支链与动平台连接处以及丝杠螺母副的变形较大，说明关节柔性对系统整体性能具有决定性影响，在刚度建模时必须予以重视。

根据图 7 所示的有限元静力分析结果，可进一步计算出动平台沿 u、v、w 方向的主线刚度，其与解析模型所得结果的对比如表 3 所示。

表 3　解析法和有限元法刚度对比

Tab. 3　Comparison of analytical and FEM results

N/m

方法	k_{11}	k_{22}	k_{33}
解析法	1.18×10^7	1.43×10^7	1.66×10^8
有限元法	1.25×10^7	1.47×10^7	1.83×10^8
计算误差/%	5.6	2.7	9.3

由表 3 可知，由刚度模型所得的解析结果与由有限元模型获得的数值结果存在差异，最大误差为 9.3%。这可能是由于建模假设与实际模型存在误差引起的。从图 7 所示的变形云图可以看出，动、静平台也存在很小的弹性变形，为提高分析精度，后续可进一步计入动、静平台的柔性。造成误差的另一可能主要原因是关节的处理。建模时将关节简化为具有等效刚度的各向同性的集中弹簧，这与实际模型中的关节存在些许差异。但需要指出的是，两种方法计算出的机构刚度的特性是一致的，即 w 方向的刚度最大，v 方向线刚度次之，u 方向线刚度最小。因此，在误差允许范围内文中所建静刚度模型可以用于该类机构的刚度特性预估。

4　结论

（1）采用机构变异方法，提出了类 Exechon 并联模块，其机构构型为 2R<u>P</u>U&1R<u>P</u>S，完成了该类并联装备的结构设计。

（2）借鉴子结构综合思想，建立了类 Exechon 并联模块刚度模型，推导出了动平台刚度的解析表达，所提方法可进一步应用于其他少自由度并联装置的刚度建模。

（3）分析了类 Exechon 并联模块在典型位姿下的刚度特性，揭示了动平台刚度的耦合性。有限元仿真验证表明，所建刚度模型具有较高的计算精度，可用于并联模块的刚度性能预估。

参　考　文　献

1　NEUMANN K E. Exechon concept[C]// Parallel Kinematic Machines in Research and Practice, 2006, 33: 787 – 802.

2　PUCHTLER T. Kinematic transformation for the Exechon concept in the sinumerik 840 d[C]// 5th Chemnitz Parallel Kinematics Seminar, 2006: 803 – 812.

3　JIN Y, BI Z M, LIU H T, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of Exechon parallel kinematic machine for large volume machining[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 7(4): 041004.

4　BI Z M, JIN Y. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2011, 27(1): 186 – 193.

5　李彬，黄田，刘海涛，等. Exechon 混联机器人的三自由度并联机构模块位置分析[J]. 中国机械工程, 2010, 21(23): 2785 – 2789.
LI B, HUANG T, LIU H T, et al. Position analysis of a 3-DOF PKM module for a 5-DOF hybrid robot Exechon[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 21(23): 2785 – 2789. (in Chinese)

（下转第 388 页）

path [J]. Smart Materials and Structures, 2014, 23(6): 1 - 11.

15 IMADUDDIN F, MAZLAN S A, ZAMZURI H, et al. Design and performance analysis of a compact magnetorheological valve with multiple annular and radial gaps [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2015, 26(9): 1038 - 1049.

16 HADADIAN A, SEDAGHATI R, ESMAILZADEH E. Design optimization of magnetorheological fluid valves using response surface method [J]. Journal of Intelligent Material System and Structures, 2014, 25(11): 1352 - 1371.

17 HU G, LONG M, HUANG M, et al. Design, analysis, prototyping, and experimental evaluation of an efficient double coil magnetorheological valve[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2014(6): 403410.

18 胡国良, 黄敏, 喻理梵, 等. 双线圈磁流变阀结构参数对压降特性的影响分析[J]. 液压与气动, 2014(1): 89 - 92.
HU Guoliang, HUANG Min, YU Lifan, et al. Effect analysis of structure parameters on pressure drop for a double-coil magnetorheological valve [J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2014(1): 89 - 92. (in Chinese)

19 HU G, LONG M, YU L, et al. Design and performance evaluation of a novel magnetorheological valve with a tunable resistance gap [J]. Smart Materials and Structures, 2014, 23(12): 127001.

20 TANG X, ZHANG X, TAO R, et al. Structure-enhanced yield stress of magnetorheological fluids [J]. Journal of Applied Physics, 2000, 87(5): 2634 - 2638.

21 ISMAIL I, MAZLAN S A, ZAMZURI H, et al. Fluid-particle separation of magnetorheological fluid in squeeze mode [J]. Japanese Journal of Applied Physics, 2012, 51(6R): 067301.

(上接第 372 页)

6 ZHANG J, ZHAO Y, JIN Y. Kinetostatic-model-based stiffness analysis of Exechon PKM[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2016, 37: 208 - 220.

7 BI Z M. Kinetostatic modeling of Exechon parallel kinematic machine for stiffness analysis[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2014, 71(1 - 4): 325 - 335.

8 LI X, ZLATANOV D, ZOPPI M, et al. Stiffness estimation and experiments for the Exechon parallel self-reconfiguring fixture mechanism[C] // ASME 2012 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, 2012: 637 - 645.

9 ZHANG J, ZHAO Y Q, JIN Y. Elastodynamic modeling and analysis for an Exechon parallel kinematic machine[J]. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2016, 138(3): 031011.

10 BI Z M, KANG B. An inverse dynamic model of over-constrained parallel kinematic machine based on Newton - Euler formulation [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2014, 136(4): 041001.

11 TANG T F, ZHAO Y Q, ZHANG J, et al. Conceptual design and workspace analysis of an Exechon-inspired parallel kinematic machine[C] // 3rd ASME/IFToMM International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robotics, ReMAR 2015, in press, Paper No. 72.

12 RIZK R, FAUROUX J C, MUMTEANU M, et al. A comparative stiffness analysis of a reconfigurable parallel machine with three or four degrees of mobility[J]. Journal of Machine Engineering, 2006, 6(2): 45 - 55.

13 PIRAS G, CLEGHORN W L, MILLS J K. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(7): 849 - 862.

14 ZHANG D, WANG L. Conceptual development of an enhanced tripod mechanism for machine tool[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2005, 21(4): 318 - 327.

15 MAJOU F, GOSSELIN C, WENGER P, et al. Parametric stiffness analysis of the Orthoglide[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(3): 296 - 311.

16 CECCARELLI M, CARBONE G. A stiffness analysis for CaPaMan (Cassino parallel manipulator)[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(5): 427 - 439.

17 DAVID H. Fundamentals of finite element analysis[M]. New York: McGraw-Hill, 2014.