doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2015.12.049

3PTT - 2R 串并联数控机床动力学耦合特性研究*

蔡　赟[1,2]　张邦成[3]　姚　禹[1]

（1. 长春工业大学应用技术学院，长春 130012；2. 上海交通大学机械与动力工程学院，上海 200240；
3. 长春工业大学汽车工程研究院，长春 130012）

摘要：为较好地保证机床动力学特性和在复杂曲面加工过程中有较好的加工精度，基于机构运动和受力规律，针对设计的 3 并联 2 串联混合型数控机床进行动力学耦合问题研究。提出了一种联合应用凯恩方程及拉格朗日方程的动力学解耦方法。建立了机床串联及并联部分完整的动力学耦合模型并确定了耦合因素。进行了复杂曲面零件的动力学耦合仿真，仿真结果表明：建立的动力学耦合模型是正确且可行的，符合运动学及受力规律。进行了复杂曲面零件的切削加工实验，机床运行平稳且速度较快，无较大奇异位置及耦合误差。表面粗糙度结果反映了机床的运动精度，干涉条纹证明了机床受力均匀。实验结果表明理论分析正确，该研究方法和过程不仅能够真实、主动和有效地解决机床动力学耦合问题，而且可为后续机床精确伺服控制提供基础。

关键词：串并联机床　奇异约束条件　耦合因素　动力学耦合

中图分类号：TH112　　**文献标识码：**A　　**文章编号：**1000-1298(2015)12-0362-08

Dynamics Coupling Characteristics of 3PTT - 2R NC Serial-parallel Machine Tool

Cai Yun[1,2]　Zhang Bangcheng[3]　Yao Yu[1]

(1. *School of Soft Technology*, *Changchun University of Technology*, *Changchun* 130012, *China*
2. *School of Mechanical Engineering*, *Shanghai Jiao Tong University*, *Shanghai* 200240, *China*
3. *Automotive Engineering Research Institute*, *Changchun University of Technology*, *Changchun* 130012, *China*)

Abstract: The dynamics coupling problem for the self designed “3 parallels ∪ 2 series” mixed type NC machine tool was studied based on the kinematics and force rule of mechanism in order to ensure that the machine can have good dynamics characteristics and high quality of parts during the process of machining complex surface. A method based on Kane and Lagrange was put forward. A whole dynamics coupling model of serial and parallel mechanism was established and the coupling factors were determined. The process of machining complex part and the force of machine tool were dynamically simulated. The simulation results showed that the established dynamics model was credible and reliable, and in accordance with dynamics rules of the force and kinematics relations. The experiment was made to cut complex surface parts and the machine tool run smoothly with fast speed. There was no large singular position and coupling error. The surface roughness results showed the kinematics accuracy of the machine tool and interference fringe proved the force uniform of machine tool. As there was no singular coupled vibration and collision, it was proved that the theoretical analysis was correct. The method and process can solve dynamics coupling problem actively, real-timely and effectively of 3PTT - 2R NC machine tool, and lay a foundation for accurate control of NC machine tools.

Key words: Serial-parallel machine tool　Singular constraint　Coupling factors　Dynamics coupling

收稿日期：2015 - 04 - 26　修回日期：2015 - 06 - 12

* 国家自然科学基金资助项目(61374138)、教育部新世纪人才资助项目(NCET - 12 - 0731)和吉林省教育厅“十二五”科学技术研究资助项目(2012111)

作者简介：蔡赟，讲师，上海交通大学博士生，主要从事机电耦合研究，E-mail：caiyun@sjtu.edu.cn

通讯作者：张邦成，教授，博士生导师，主要从事机电耦合研究，E-mail：zhangbangcheng@ccut.edu.cn

引言

3PTT－2R 串并联数控机床兼有串联及并联机构，是一个多自由度、多变量、高度非线性、多参数耦合的复杂系统。研究串并联机床在工作过程中的力学及运动学问题，建立动力学平衡模型，是解决机床结构设计、参数选择、精确控制等关键问题的前提。建立耦合动力学方程，是现代机电系统（设备）建模、动态特性设计与分析、工况检测与预报、故障诊断等必须解决的一项关键环节。

国内外在动力学问题方面的研究主要有：赵铁石等针对设计的并联机构进行动力学问题的研究，建立了完整的动力学模型，通过模型来识别耦合特征。但研究只考虑了并联机构的动力学耦合问题，并未涉及串-并混联形式的动力学耦合特性，因此需拓展研究[1-4]。张荣敏等依据矢量法也对并联机构的动力学问题进行了研究，但研究对象仅为连接件等局部环节，未考虑整体系统[5]。近年来我国对此已有不少方法的探索[6-10]。国外 Parthajit 等针对 Stewart 平台进行了研究，分析了其动力学运动规律及平台灵活性问题，给出了求解方法，但并未提及动力学耦合与解耦问题[11]。Guglielmentti 等针对并联机器人进行了研究，建立了以刚度为基础的机器人动力学刚度分析模型，模型考虑了几何和载荷变化的影响，在此基础上反映出机构瞬时弹性特性，但未见其进行动力学耦合分析及系统仿真的研究[12-13]。此外还有学者应用经典建模和动态分析的方法，建立了并联机构的运动和受力模型，并进行了优化设计，应用姿态调节来研究机器人运动[14-20]。

针对 3PTT－2R 串并联数控机床的受力及运动状态，提出一种应用凯恩方程及拉格朗日方程相结合的动力学解耦方法；在研究机构组成和动力学耦合机理基础上，分别建立并联机构和串联机构的动力学耦合模型，并确定耦合因素。针对模型进行动力学耦合问题仿真分析，并进行实验验证。

1　3PTT－2R 机构描述

为了实现多轴机床运动控制及复杂曲面零件的精密加工，设计的串并联数控机床并联机构为具有 3 个移动自由度的动平台，串联机构为 2 个转动自由度的加工工具，两者组合，形成具有空间 5 自由度的运动机构。并联机构由 3 根立式滚珠丝杠、3 个与滚珠丝杠配套的滑鞍、3 根连接杆和 1 个正三角形平台组成。滑鞍与连杆、连杆与动平台皆由虎克铰相连接。当滑鞍在滚珠丝杠上做竖直运动时，带动虎克铰做转动，3 根丝杠共同运动驱动动平台做空间 X、Y、Z 3 个方向的移动。串联部分由 2 个电机直接驱动竖直与摆动运动轴做 2 个方向旋转运动。根据机构学理论，用 P 表示移动副，T 表示虎克铰运动副，R 表示转动副，因此并联机构可表示为 3PTT，串联机构表示为 2R，因此串并联机构总体表示为 3PTT－2R，空间自由度数目为 5。机构示意图如图 1 所示。

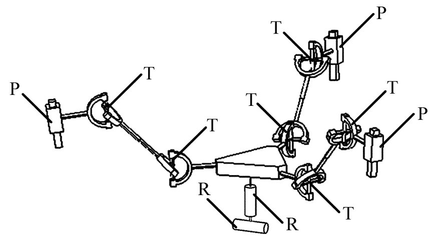

图 1　设计的串并联机床机构示意图

Fig. 1　Structural diagram of designed serial-parallel machine tool

在机构学理论分析基础上，设计机床各元件配置。并联部分：机床顶部由永磁交流伺服电动机驱动，经齿轮及胶带传动，驱动滚珠丝杠做旋转运动。为了提高系统刚度，采用双连杆的方式与动平台相连接，即 6 根连杆，且长度一定。滑鞍移动，驱动虎克铰转动，驱动连杆运动，从而实现动平台运动。串联部分：由永磁交流伺服电动机分别驱动运动轴做旋转，机构末端安装加工工具，实现切削加工过程。建立的机床几何模型如图 2 所示。

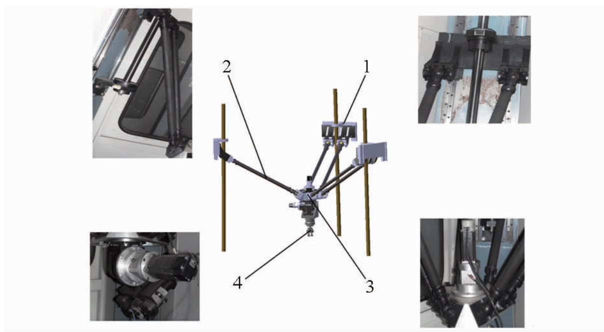

图 2　串并联数控机床伺服进给系统模型

Fig. 2　Serial-parallel machine tool servo system model

1. 滑鞍　2. 连杆　3. 动平台　4. 加工工具

根据设计的串并联数控机床几何模型及其运动规律，研究机床在工作过程中运动及受力耦合关系问题，即动力学耦合问题。

2　3PTT－2R 机床动力学耦合特性分析

3PTT－2R 串并联数控机床的串联机构及并联机构都是由典型的机构运动副组成，而这些运动副之间存在着较强运动及受力的耦合关系，致使整个系统具有十分复杂的机构动力学特性。机构动力学问题是研究机构各环节运动副的位移、角度、速度和

加速度等位姿信息与驱动器输入的已知力或力矩之间关系的问题，是分析机构在执行正确运动轨迹的前提下，系统力学性能的关键环节。在分析研究3PTT－2R串并联机床几何模型及机构运动特性的基础上，分别针对机床串联部分及并联部分进行动力学耦合分析。

2.1 3PTT并联机构动力学耦合特性分析

首先，根据3PTT运动规律确定由机构各环节引起的耦合因素。主要包括：丝杠与滑鞍之间的耦合，包括惯性耦合、运动耦合及动力耦合；滑鞍、虎克铰和连杆之间的连接耦合，包括惯性耦合、运动耦合及动力耦合；连杆、虎克铰和动平台的连接耦合，包括惯性耦合、运动耦合及动力耦合。其次，针对各环节耦合问题进行分析。

2.1.1 动平台运动耦合分析

（1）确定机构质量系耦合关系。设丝杠与滑鞍之间的惯性耦合为 Pi；滑鞍、虎克铰和连杆之间的惯性耦合为 $T_1 i$；连杆、虎克铰和动平台的惯性耦合设为 $T_2 i$。由此，可将3PTT机构运动副形式描述成耦合关系，则系统质量系可表示为

$$\boldsymbol{m}_i=[M_{Pi}\quad M_{T_1 i}\quad M_{T_2 i}]\quad(i=1,2,3)\tag{1}$$

（2）建立机构坐标变换矩阵。动平台的位姿可以用动平台坐标系相对于参考坐标系的广义坐标表示，得到坐标系位姿齐次变换公式为

$$\boldsymbol{T}_M^O=\boldsymbol{T}_C^O\boldsymbol{T}_{\beta_1}^C\boldsymbol{T}_{\gamma_1}^{\beta_1}\boldsymbol{T}_B^C\boldsymbol{T}_{\gamma_2}^{\gamma_1}\boldsymbol{T}_{\beta_2}^{\gamma_1}\boldsymbol{T}_M^B=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{2}$$

其中

$$a_{11}=\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\theta-\sin\varphi_1\sin\varphi_2$$
$$a_{12}=-\cos\varphi_1\sin\theta$$
$$a_{13}=\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\theta+\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$
$$a_{14}=l_2\cos\varphi_1\cos\gamma_1+\frac{\sqrt{3}}{3}l_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\theta-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)$$
$$a_{21}=\cos\varphi_2\sin\theta\qquad a_{22}=\cos\theta$$
$$a_{23}=\sin\varphi_2\sin\theta$$
$$a_{24}=l_2\sin\gamma_1+\frac{\sqrt{3}}{3}l_1\cos\gamma_2\sin\theta$$
$$a_{31}=-\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\theta-\cos\varphi_1\sin\varphi_2$$
$$a_{32}=\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$
$$a_{33}=\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\theta$$
$$a_{34}=Q-l_2\sin\varphi_1\cos\gamma_1-\frac{\sqrt{3}}{3}l_1(\sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\theta+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)$$

（3）对虎克铰连接耦合进行分析。做如下定义：3根丝杠分别定义为丝杠1、丝杠2、丝杠3；对应上位虎克铰为上1、上2、上3；对应下位虎克铰为下1、下2、下3；对应的虎克铰旋转角度由虎克铰自身结构所定，由于动平台位姿为水平，所以上位虎克铰、下位虎克铰及连接杆与水平方向的夹角是由3个滑鞍移动位移所定，设连杆与竖直方向上位夹角为 α。虎克铰自身正面和侧面转角分别为：β_{11}、β_{21}、β_{31}，β_{12}、β_{22}、β_{32}；γ_{11}、γ_{21}、γ_{31}，γ_{12}、γ_{22}、γ_{32}。则有

$$\begin{cases}\beta_{11}+\alpha=\varphi_{11}\\\beta_{11}-\alpha=\varphi_{12}\\\gamma_{11}+\gamma_{12}=\theta_1\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_{21}+\alpha=\varphi_{21}\\\beta_{22}-\alpha=\varphi_{22}\\\gamma_{21}+\gamma_{22}=\theta_2\end{cases}\quad\begin{cases}\beta_{31}+\alpha=\varphi_{31}\\\beta_{32}-\alpha=\varphi_{32}\\\gamma_{31}+\gamma_{32}=\theta_3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_{11}+\beta_{12}=0\\\beta_{21}+\beta_{22}=0\\\beta_{31}+\beta_{32}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\varphi_{11}+\varphi_{12}=0\\\varphi_{21}+\varphi_{22}=0\\\varphi_{31}+\varphi_{32}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\gamma_{11}+\gamma_{12}=0\\\gamma_{21}+\gamma_{22}=0\\\gamma_{31}+\gamma_{32}=0\end{cases}$$

（4）求解动平台运动学耦合问题。在确定坐标变换矩阵和连接定义关系基础上，进行求解。得动平台中心 $M(M_x,M_y,M_z)$ 坐标方程组模型为

$$\begin{cases}(Q_1-z_M)^2+x_M^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(l_0-l_1)-y_M\right]^2=l_2^2\\(Q_2-z_M)^2+\left[x_M+\frac{1}{2}(l_0-l_1)\right]^2+\\\qquad\left[y_M+\frac{\sqrt{3}}{6}(l_0-l_1)\right]^2=l_2^2\\(Q_3-z_M)^2+\left[x_M-\frac{1}{2}(l_0-l_1)\right]^2+\\\qquad\left[y_M+\frac{\sqrt{3}}{6}(l_0-l_1)\right]^2=l_2^2\end{cases}\tag{3}$$

由此，可获得速度及加速度方程。

2.1.2 动平台动力学耦合分析

在建立动平台动力学耦合模型前需进行受力分析。动平台结构如图3a所示，受力示意图如图3b所示。设 $B_1B_2B_3$ 为动平台三角形顶点，外负载力由串联机构的加工工具传递至动平台，由凯恩方程

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i+F_{gi})\delta_{ri}=0\tag{4}$$

负载力和驱动力符合虚功原理。因此，动平台力的平衡方程可以表示为

$$\left(\begin{bmatrix}F_{1c}^p\\F_{2c}^p\\F_{3c}^p\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}F_{xc}^p\\F_{yc}^p\\F_{zc}^p\end{bmatrix}-m\begin{bmatrix}x_M^{p''}\\y_M^{p''}\\z_M^{p''}\end{bmatrix}\right)\delta_r=0\tag{5}$$

计算得连杆受力为

$$F_{ic}^p=-\left(F_{xc}^p\frac{\partial Q_i^p}{\partial x_M^p}+F_{yc}^p\frac{\partial Q_i^p}{\partial y_M^p}+F_{zc}^p\frac{\partial Q_i^p}{\partial z_M^p}\right)\tag{6}$$

根据机床受力规律，外负载力经串联机构传递至动平台。结合图3b，可以得到

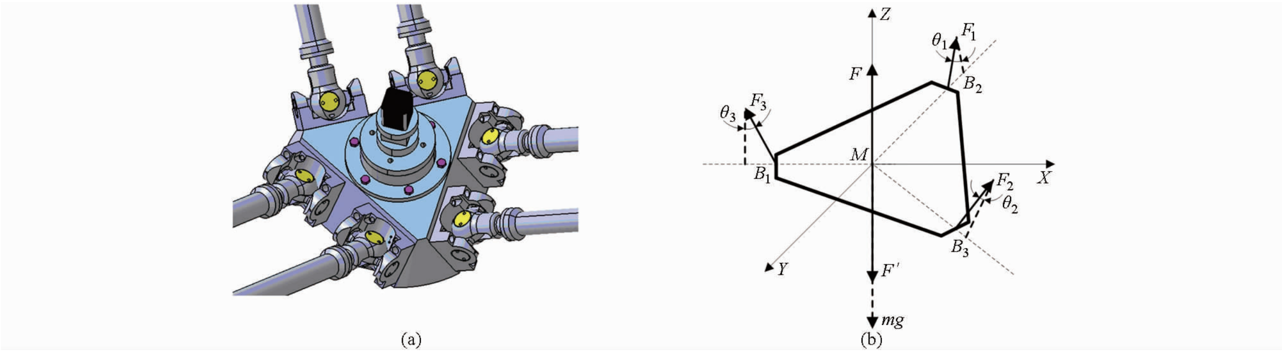

图 3　动平台动力学模型图示

Fig. 3　Moving platform dynamics model

（a）动平台装配模型　（b）动平台受力向量示意图

$$\begin{cases} F_{xc}^{p}\sin\theta_1^{p} + F_{yc}^{p}\sin\theta_2^{p} + F_{zc}^{p}\sin\theta_3^{p} = m\theta_1^{p''} \\ F_{xc}^{p}\cos\theta_1^{p} + F_{yc}^{p}\cos\theta_2^{p} + F_{zc}^{p}\cos\theta_3^{p} = mg + F^{p} \\ F_{xc}^{p}\cos\theta_1^{p}(Q_1^{p}\tan\theta_1^{p} + R_d) + \\ \qquad F_{yc}^{p}\cos\theta_2^{p}(Q_2^{p}\tan\theta_2^{p} + R_d) + \\ \qquad F_{zc}^{p}\cos\theta_3^{p}(Q_3^{p}\tan\theta_3^{p} + R_d) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

式中　R_d——外接圆半径

由于并联机构采用的是双端虎克铰连接，在连接杆上的受力方向是沿杆向量。采用牛顿-欧拉动力学方程方法，将 F_x、F_y、F_z 向 x、y、z 3 个方向分解，得

$$\begin{cases} F_{ix} = \dfrac{F_i l_{B_iC_{ix}}}{|\boldsymbol{l}_{B_iC_i}|} \\ F_{iy} = \dfrac{F_i l_{B_iC_{iy}}}{|\boldsymbol{l}_{B_iC_i}|} \quad (i = 1,2,3) \\ F_{iz} = \dfrac{F_i l_{B_iC_{iz}}}{|\boldsymbol{l}_{B_iC_i}|} \end{cases} \tag{8}$$

式中 $l_{B_iC_{ix}}$、$l_{B_iC_{iy}}$、$l_{B_iC_{iz}}$ 分别表示向量 $\boldsymbol{l}_{B_iC_i}$ 在 x、y、z 3 个方向的投影大小，得知向量 $\boldsymbol{l}_{B_1C_1}$、$\boldsymbol{l}_{B_2C_2}$、$\boldsymbol{l}_{B_3C_3}$ 的值。

基于凯恩方程建立的运动和受力关系，继续应用拉格朗日方法，求解动力学方程来表征动平台能量关系。由于动平台运动方式为在 XOY 平面平动，其速度方向在同一运动平面内，具有平动动能。同时由于质量系关系，还具有势能。

2.1.2.1　对模型进行解耦方法研究

建立拉格朗日方程为

$$L = \sum(T_p + T_s + T_h) - \sum(U_p + U_s + U_h) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{q}) \tag{10}$$

此方程包含 3PTT－2R 机构中的静平台、丝杠、连杆、滑鞍、虎克铰、动平台和串联加工工具完整信息。首先，针对并联部分，静平台固定不动，虎克铰为连接元件，丝杠和滑鞍反映机构运动状态，故建立丝杠、滑鞍和动平台拉格朗日模型。

（1）滑鞍运动模型为

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_p = \dfrac{1}{2}m_p\boldsymbol{v}_p^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_p \\ U_p = m_p gz \end{cases} \tag{11}$$

其中　$$\boldsymbol{v}_p = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{J}_{ps}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{ps})^{-1}\boldsymbol{J}_{ps}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}_i$$

$$\boldsymbol{J}_{ps}^{*} = (\boldsymbol{J}_{ps}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{ps})^{-1}\boldsymbol{J}_{ps}^{\mathrm{T}} \quad \dot{\boldsymbol{s}}_i = [\dot{s}_1 \quad \dot{s}_2 \quad \dot{s}_3]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{J}_{ps} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha_1\cos\beta_1}{\sin\alpha_1} & \dfrac{\cos\alpha_1\sin\beta_1}{\sin\alpha_1} & 1 \\ \dfrac{\cos\alpha_1\cos\beta_2}{\sin\alpha_2} & \dfrac{\cos\alpha_2\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} & 1 \\ \dfrac{\cos\alpha_3\cos\beta_3}{\sin\alpha_3} & \dfrac{\cos\alpha_3\sin\beta_3}{\sin\alpha_3} & 1 \end{bmatrix}$$

式中　$\boldsymbol{J}_{ps}$——动平台与滑鞍速度雅可比矩阵

（2）连杆运动模型

由于动平台与连杆之间以虎克铰相连，因此连杆既作平面运动，又作空间转动，则

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_{gi} = \boldsymbol{T}_{gi1} + \boldsymbol{T}_{gi2} \\ U_{gi} = m_{gi}gz \end{cases} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{T}_{gi1} = \frac{1}{2}m_{gi}\boldsymbol{v}_{gi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{gi} = \frac{1}{2}m_{gi}\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{gsi}^{*})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{gsi}^{*})\dot{\boldsymbol{s}}_i \tag{13}$$

$$\boldsymbol{T}_{gi2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{I}_{gi}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i + \dot{\boldsymbol{\beta}}_1^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\beta}}_i) \tag{14}$$

$$\boldsymbol{J}_{gsi}^{*} = (\boldsymbol{J}_{gsi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_{gsi})^{-1}\boldsymbol{J}_{gsi}^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

其中　$$\boldsymbol{J}_{gsi} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos\alpha_i\sin\beta_i}{\sin\alpha_i} & \dfrac{\cos\alpha_i\sin\beta_i}{\sin\alpha_i} & 1 \end{bmatrix}$$

式中　$\boldsymbol{I}_{gi}$——单位矩阵

（3）动平台运动模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{T}_{hi1} = \dfrac{1}{2}m_{hi}\boldsymbol{v}_{hi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_{hi} = \dfrac{1}{2}m_{hi}\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}_i \\ U_{hi} = m_{hi}g(\boldsymbol{s}_i + l\sin\alpha_i) \end{cases} \tag{16}$$

因此总体拉格朗日方程可以表示为

$$
\begin{aligned}
L = &\sum(T_p+T_s+T_h)-\sum(U_p+U_s+U_h)= \\
&\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}} m_p(\boldsymbol{J}_{ps}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{ps}^*)\dot{\boldsymbol{s}}_i+ \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_{gi}\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{ps}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{ps}^*)\dot{\boldsymbol{s}}_i+ \\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{I}_{gi}(\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i+\dot{\boldsymbol{\beta}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\beta}}_i)^{\mathrm{T}}+ \\
&\frac{1}{2}m_{hi}\dot{\boldsymbol{s}}_i^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{s}}_i-m_p g z-\sum_{i=1}^{3}m_{hi}g(\boldsymbol{s}_i+l\sin\alpha_i)= \\
&\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{q})
\end{aligned}
\tag{17}
$$

其中
$$
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_s & & \\ & \boldsymbol{M}_g & \\ & & \boldsymbol{M}_g\end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{M}_s=\begin{bmatrix}A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & A_3\end{bmatrix}\quad
\boldsymbol{M}_g=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{g1} & & \\ & \boldsymbol{I}_{g2} & \\ & & \boldsymbol{I}_{g3}\end{bmatrix}
$$

$$
A_i=m_p(\boldsymbol{J}_{ps}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{ps}^*)+m_{gi}(\boldsymbol{J}_{ps}^*)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_{ps}^*)+m_{hi}
$$

2.1.2.2　运动方程求解

运动方程微分形式表示为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\tau}
\tag{18}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}=\frac{\partial}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{U}(\boldsymbol{q})\right)=\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}
\tag{19}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial\boldsymbol{q}}=\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}\right)-\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial\boldsymbol{q}}
\tag{20}
$$

式中　$\boldsymbol{\tau}$——力矩，与 $\boldsymbol{q}$ 对应

求解得

$$
\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\left[\dot{\boldsymbol{M}}-\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\right)\right]\dot{\boldsymbol{q}}+\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\tau}
\tag{21}
$$

用惯性矩阵 $\boldsymbol{M}$、科氏矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和重力矩阵 $\boldsymbol{G}$ 表示为

$$
\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{G}=\boldsymbol{\tau}
\tag{22}
$$

至此，机床并联机构的动力学耦合模型可以表示为式(3)、(5)和式(21)。通过模型的建立，可以发现，并联机构受力与位移、加速度有关，速度的微分为加速度，而速度由电动机输入转速确定，因此直接反映动力学耦合关系的是动平台质心受到的合力与运动位置之间的关系，即达到了表征动力学规律和耦合因素的目的。

接下来将针对2R串联机构进行分析，研究其动力学耦合关系。

2.2　2R串联机构动力学耦合特性分析

首先，分析串联部分耦合机理。如图4a所示。串联单元1作绕 z 轴旋转运动，串联单元2作空间摆动。根据串联机构运动及受力耦合特性，包括串联单元1的旋转耦合和串联单元2的旋转耦合。同样包括惯性耦合与位置耦合。

不失一般性，以加工任意自由曲面为研究对象，加工工具运动轨迹为空间自由曲线。机构具有2个旋转自由度，加工瞬时姿态由1个旋转自由度确定，即瞬时工具姿态角度。加工瞬时轨迹点由动平台运动轨迹确定，因此在串联机构中，只需考虑瞬时工具受力状况与运动角度之间的耦合关系。建立加工工具姿态角与所受的负载力之间模型如图4b所示。按照并联部分分析过程，针对串联机构动力学耦合求解方法，首先仍采用凯恩方程的方法建立一般动力学耦合模型，然后采用拉格朗日方法进行能量求解。

因为串联机构整体由两部分组成，因此可将整体看成是包含2自由度的一个子系统，这样可建立广义坐标矩阵函数

$$
\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{A},t)\quad(i=1,2,\cdots,n)
\tag{23}
$$

$$
f_i'=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial\boldsymbol{f}_i}{\partial\boldsymbol{A}_j}\boldsymbol{A}_j+\frac{\partial\boldsymbol{f}_i}{\partial t}
\tag{24}
$$

动力学耦合方程可由凯恩方程表示为

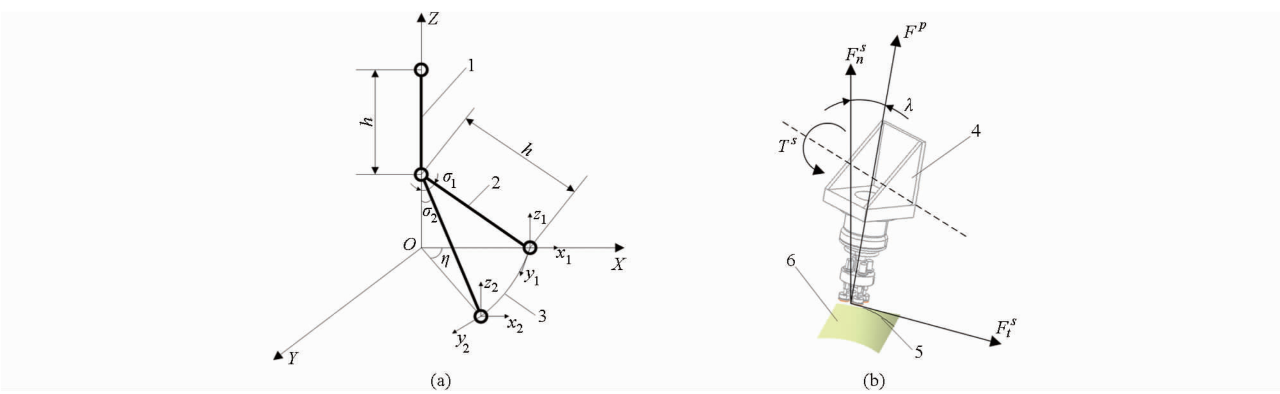

图4　串联机构动力学耦合几何模型

Fig.4　Serial mechanism dynamics coupling geometry model

(a) 串联机构　(b) 串联机构受力

1.串联单元1　2.串联单元2　3.加工曲线　4.加工工具　5.工具运动轨迹　6.加工曲面

$$\sum_{i=1}^{n} \delta \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{M}_i^s f_i'' + \boldsymbol{F}^p) = 0 \tag{25}$$

进一步表示成虚位移和广义坐标的函数

$$\delta \boldsymbol{f}_i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{A}_j} \delta \boldsymbol{A}_j \tag{26}$$

综上，由凯恩方程方法表征的动力学耦合方程一般式可写成

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \delta \boldsymbol{A}_j \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{A}_j} \right)^{\mathrm{T}} (-\boldsymbol{M}_i^s\ f_i'' + \boldsymbol{F}^p) = 0 \tag{27}$$

接下来，针对动力学耦合一般式进行拉格朗日能量求解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{A}_i} \right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{A}_i\ \partial \boldsymbol{A}_j} \boldsymbol{A}'_j + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}_i}{\partial t\ \partial \boldsymbol{A}_i} \\ \dfrac{\partial f'_i}{\partial \boldsymbol{A}_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{A}_i\ \partial \boldsymbol{A}_j} \boldsymbol{A}_j + \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{f}_i}{\partial t\ \partial \boldsymbol{A}_i} \end{cases} \tag{28}$$

式(27)代入得

$$\sum_{j=1}^{m} \delta \boldsymbol{A}_j \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{A}'_j} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{A}'_j} + \boldsymbol{F}_j^p \right) = 0 \tag{29}$$

其中

$$\boldsymbol{H} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} \boldsymbol{M}_i^s (\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}_i) \tag{30}$$

因此得到 2R 机构动力学耦合拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{A}'_j} - \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{A}'_j} = \boldsymbol{F}_j^p \tag{31}$$

从串联机构动力学耦合模型可以看出，该子系统运动及受力的耦合关系是瞬时受力与速度之间的函数计算问题，末端执行器受力其位置姿态有直接联系，耦合因素来源于电动机输入和系统末端执行器姿态角。这也是与并联机构动力学耦合问题相呼应的，确定了整体系统的动力学耦合性能。

因此，3PTT－2R 串并联机构动力学耦合模型可以写成

$$\begin{cases} (Q_i - z_M)^2 + \begin{bmatrix} x_M^2 \\ \left[x_M + \dfrac{1}{2}(l_0 - l_1) \right]^2 \\ \left[x_M - \dfrac{1}{2}(l_0 - l_1) \right]^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}(l_0 - l_1) - y_M \right]^2 \\ \left[y_M + \dfrac{\sqrt{3}}{6}(l_0 - l_1) \right]^2 \\ \left[y_M + \dfrac{\sqrt{3}}{6}(l_0 - l_1) \right]^2 \end{bmatrix} = l_2^2 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (F_i + F_{gi}) \delta_{ri} = 0 \\ \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G} = \boldsymbol{\tau} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{A}'_j} - \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{A}'_j} = \boldsymbol{F}_j^p \end{cases} \tag{32}$$

通过模型可以直观地看出，影响系统耦合的关键在于并联和串联机构伺服进给运动环节。综上分析，通过采用凯恩方程及拉格朗日方程相结合的方法建立了 3PTT－2R 串并联机构的动力学耦合模型，发现影响动力学耦合的因素主要来自于系统驱动元件和具有关键特征的连接元件，即电动机输入能量和角度、虎克铰正侧面转角以及连杆长度。这些耦合信息的确定即可间接指导滑鞍在丝杠上的位移、动平台运动空间及末端执行器位姿。

3　动力学耦合仿真分析

动力学仿真在 3PTT－2R 串并联机床应用研究中起着重要作用，在理论分析的基础上，根据运动及受力规律对动平台和加工工具的动力学耦合特性进行计算机仿真，能为系统的结构优化设计和精确伺服控制提供依据。针对动力学耦合特性仿真，旨在验证理论建模的可行性。

依据前文提出的耦合因素，结合机床运动学轨迹方程(3)，凯恩方程(4)，动力学模型(22)、(32)进行实际加工的刀具动态仿真。以自由曲面为仿真实例，曲面形貌如图 5a 所示；生成的三轴联动刀具轨迹如图 5b 所示；平面轨迹投影如图 5c 所示；引入切削过程中刀具振动，z 方向动态曲线如图 5d 所示。

由图 5 可以看出，曲面形貌(图 5a)与刀具轨迹(图 5b)吻合程度较好，口径在 x 和 y 向上近似程度较好，表明在仿真过程中，遍历数据点符合运动规律。从平面投影图 5c 中也可以看出数据是根据半径变化而变化的，这同时体现了机构在仿真运动过程中，仿真运动数据与理想曲面匹配程度较好，动平台平动轨迹准确完整，无奇异或缺失点，表明未出现干涉现象。z 向仿真规律线性度较好，曲线与曲面轴向深度符合程度较好，轨迹点数目符合实际加工需要，达到了真实加工状态的仿真特性。同时，验证了前文建立的动力学耦合模型的可行性与合理性，能够真实、完整地反映模型输入输出规律，较好地体现了机构运动特性及耦合条件。

4　实验验证

为了验证建立的动力学耦合模型是正确且可实际应用的，同时验证仿真过程的合理性，进行切削加工实验，通过切削后零件的加工质量来评价机床动力学耦合性能。

实验条件：机床为 3PTT－2R 串并联数控机床，加工零件材料为单晶硅，进行数控磨削加工。加工后采用 Veeco 轮廓仪进行零件的检测。机床参数及

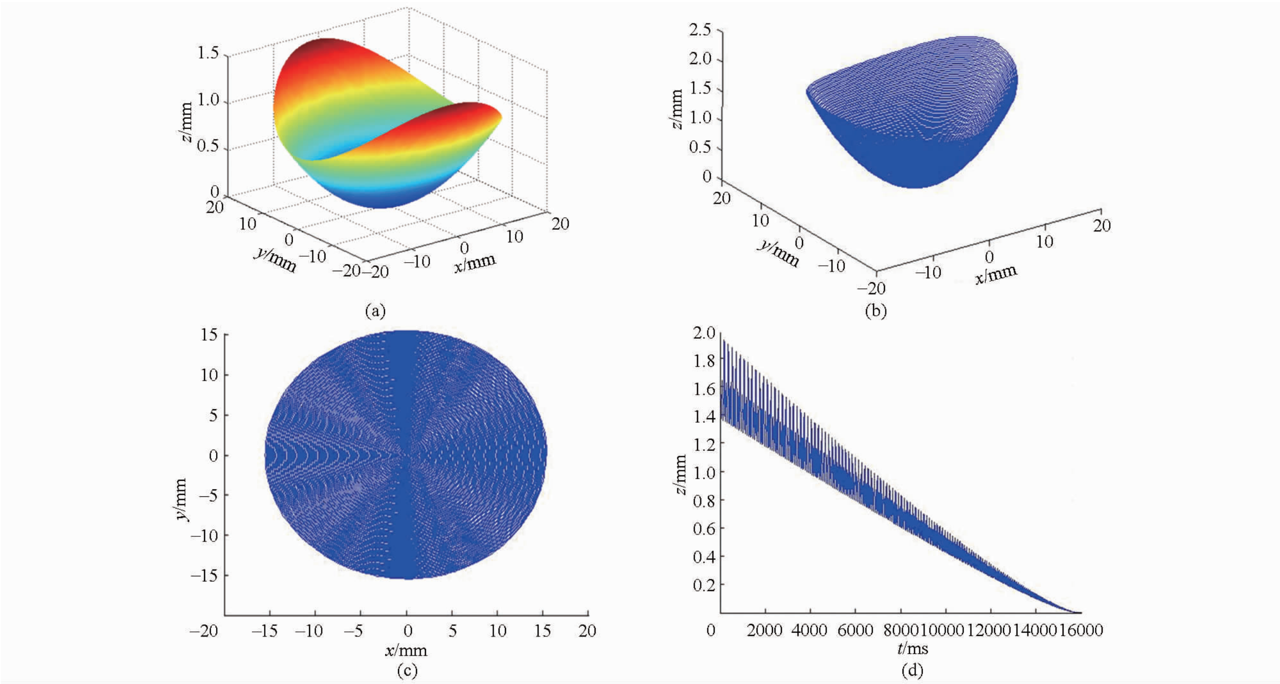

图 5 机床加工动态仿真结果

Fig. 5 Machine tool processing and dynamic simulation results

实验条件如表 1、2 所示。

表 1 机床参数

Tab. 1 Machine parameters

参数	数值
工作空间半径/mm	250
连杆长度/mm	495
动平台外接圆半径/mm	312
静平台外接圆半径/mm	814
虎克铰最大角度/(°)	90
滑鞍行程/mm	850
机床高度/mm	2 605

表 2 实验条件

Tab. 2 Experimental conditions

项目	条件
试件	单晶硅
切削力/N	30
刀具转速/($r \cdot min^{-1}$)	800
切削液	无

实验结果如图 6 所示。实验结果表明:机床加工精度较高,刀具可有效、完整地遍历曲面数据坐标。在加工过程中无奇异位置及耦合误差,可证明仿真分析的正确。通过图 6c 干涉条纹可以看出,刀具在工件表面运行平稳,绿色条纹均匀,只是在切入和切出时出现红色条纹,这表示在这两个过程中刀具受力变化明显,零件整体轮廓效果较好。通过实验可以获得:建立的 3PTT-2R 串并联机构动力学耦合模型是正确的,考虑的耦合因素也是合理的,在实验过程中并未出现由于输入

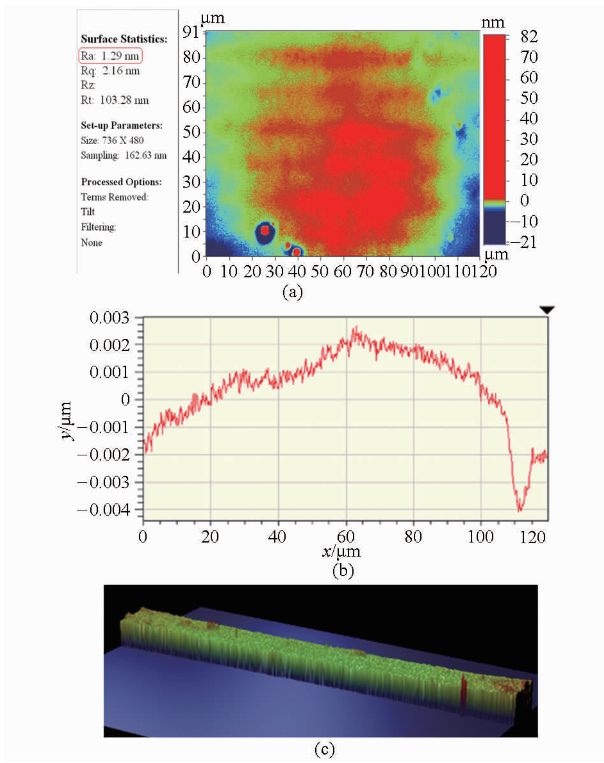

图 6 零件检测结果

Fig. 6 Test results of parts

(a) 零件表面检测结果 (b) 零件粗糙度曲线

(c) 零件轮廓度干涉条纹

数据错误导致的较大机床误差,零件的精度较好地印证了理论分析的正确。与动力学耦合数值仿真分析也是完整对应的,达到了通过建模和仿真的结果指导实验的目的,为机床进一步的精确伺服控制提高了参考。

5　结论

（1）完整地建立了 3PTT 并联机构和 2R 串联机构的动力学耦合模型，并确定了耦合因素及相互关系。

（2）进行了动态加工仿真及相应的切削加工实验，仿真结果验证了建立的模型是可行有效的，实验验证了理论分析和仿真过程的正确，较好地反映了机床真实动力学耦合性能。

（3）研究方法及过程可主动、有效地解决 3PTT－2R串并联数控机床动力学耦合问题，为系统精确伺服控制提供了参考和依据。

参　考　文　献

1　耿明超，赵铁石，王唱，等．4-UPS/UPR 并联机构动力学分析[J]．农业机械学报，2014，45(8)：299－306．
Geng Mingchao, Zhao Tieshi, Wang Chang, et al. 4-UPS/UPR parallel mechanism dynamic analysis [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(8): 299－306. (in Chinese)

2　苑飞虎，赵铁石，边辉，等．重载并联运动模拟台机构动力特性分析[J]．农业机械学报，2014，45(9)：311－317．
Yuan Feihu, Zhao Tieshi, Bian Hui, et al. Analysis on dynamics characteristic of heavy-load parallel motion simulation platform mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(9): 311－317. (in Chinese)

3　刘晓，赵铁石，边辉，等．耦合型 3 自由度并联稳定平台机构动力学分析[J]．机械工程学报，2013，49(1)：45－52．
Liu Xiao, Zhao Tieshi, Bian Hui, et al. Dynamics analysis of a 3-DOF coupling parallel mechanism for stabilized platform [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(1): 45－52. (in Chinese)

4　Zhao T S, Dai J S. Dynamics and coupling actuation of elastic under actuated manipulators [J]. Journal of Robotic Systems, 2003, 20(3): 135－146.

5　张荣敏，陈原，高军．矢量推进解耦球面并联机构动力学研究[J]．农业机械学报，2015，46(6)：319－326．
Zhang Rongmin, Chen Yuan, Gao Jun. Dynamic analysis of a decoupled spherical parallel mechanism for vectored thruster [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2015, 46(6):319－326. (in Chinese)

6　杨勇，张为民，陈希光．数控机床导轨滑块结合部组建模与参数辨识方法研究[J]．农业机械学报，2014，45(7)：313－320．
Yang Yong, Zhang Weimin, Chen Xiguang. Modelling and parallel identification of linear guideway in NC machine tool [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2014, 45(7): 313－320. (in Chinese)

7　孙小勇，谢志江，蹇开林，等．6-PSS 柔性并联机器人动力学分析与仿真[J]．农业机械学报，2012，43(7)：194－199，205．
Sun Xiaoyong, Xie Zhijiang, Jian Kailin, et al. Dynamics analysis and simulation of 6-PSS flexible parallel robot [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(7): 194－199,205. (in Chinese)

8　牛雪梅，高国琴，刘辛军，等．新型驱动冗余并联机构动力学建模及简化分析[J]．机械工程学报，2014，50(19)：41－49．
Niu Xuemei, Gao Guoqin, Liu Xinjun, et al. Dynamic formulation and simplified model of a novel 3-DOF parallel mechanism with actuation redundancy [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 50(19): 41－49. (in Chinese)

9　姜峣 李铁民 王立平．过约束并联机构动力学建模方法[J]．机械工程学报，2013，49(17)：123－129．
Jiang Yao, Li Tiemin, Wang Liping. Research on the dynamic model of an over-constrained parallel mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2013, 49(17): 123－129. (in Chinese)

10　胡波，路懿，许佳音．新型过约束并联机构 2RPU＋UPU 动力学模型[J]．机械工程学报，2011，47(11)：36－43．
Hu Bo, Lu Yi, Xu Jiayin. Solving kinematics for a novel over-constrained 2UPR＋UPU parallel manipulator [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(11): 36－43. (in Chinese)

11　Parthajit Mukherjee, Bhaskar Dasgupta, Mallik A K. Dynamic stability index and vibration analysis of a flexible Stewart platform [J]. Journal of Sound and Vibration,2007, 307(3－5): 495－512.

12　Guglielmentti P, Longchamp R. A closed form inverse dynamics model of the delta parallel robot [C] // Proceedings of International Federation of Automatic Control Conference on Robot Control, 1994: 39－44.

13　Sui C, Zhao M. Control of a 3-DOF parallel wire driven stiffness-variable manipulator[C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, 2004: 204－209.

14　Farhad Aghili. A unified approach for inverse and direct dynamics of constrained multibody systems based on linear projection operator: applications to control and simulation[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2005, 21(5): 834－849.

15　Gilardi G, Sharf I. Literature survey of contact dynamics modelling[J]. Mechanism and Machine Theory, 2002, 37(10): 1213－1239.

16　Vukobaratovic M, Potkonjak V. Dynamics of contact tasks in robotics. Part Ⅰ: general model of robot interacting with environment[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(6):923－924.

17　Cheng H, Yiu Y K, Li Z X. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2003, 8(4): 483－491.

18　杜鹃，吴洪涛，张云剑．共形空间中的少自由度空间并联机构正解[J]．机械设计与制造，2015(6)：1－4，8．
Du Juan, Wu Hongtao, Zhang Yunjian. Forward displacement of spatial parallel mechanisms with limited mobility position conformal space[J]. Machinery Design and Manufacture, 2015(6): 1－4,8. (in Chinese)

19　于常娟，张明路，张建华，等．六足仿生机器人并联运动学分析[J]．制造业自动化，2015，37(6)：56－58．

20　赵永生，刘文兰，许允斗，等．一种过约束并联机构受力的数值仿真分析方法[J]．中国机械工程，2015，26(12)：1576－1583．
Zhao Yongsheng, Liu Wenlan, Xu Yundou, et al. A numerical simulation method for force analysis of an overconstrained PM [J]. China Mechanical Engineering, 2015, 26(12): 1576－1583. (in Chinese)