doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.07.043

直线超声电动机驱动并联平台建模与控制*

张　泉[1]　朱本亮[2]　周丽平[1]　金家楣[1]　张建辉[1]

(1.南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室，南京 210016；
2.华南理工大学机械与汽车工程学院，广州 510640)

摘要：为实现直线超声电动机驱动的 3 - PRR 并联平台的精确轨迹跟踪控制，对其进行了运动学和动力学建模，并设计了基于模型和轮廓误差的控制器。首先，根据并联平台的闭链约束条件，对并联平台进行了运动学分析。在此基础上，对并联平台的各部件速度和加速度进行了推导，并获得了相应的雅可比矩阵，随后基于虚功原理建立了平台的动力学模型。最后，由切线近似法推导了平面三自由度轮廓误差的转化方法，并设计了基于模型和轮廓误差的控制器。实验结果表明，基于动力学模型和轮廓误差的控制器可将 X 和 Y 轴的轨迹跟踪误差控制在 15 μm 以内，提高了动平台的轨迹跟踪精度。

关键词：直线超声电动机　并联平台　动力学模型　轮廓误差

中图分类号：TP242；TM359.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2014)07-0278-08

引言

随着 IC 工业、自动微装配、微小型医疗器械等领域的迅速发展，对具有大行程、高精度、高速度的精密定位平台的需求越来越高。从机械结构上来说，定位平台可分为串联结构和并联结构。一般串联平台具有比较大的工作空间，并且可以通过简单的叠加实现更多的自由度。但是这种串联叠加结构容易导致误差的累积，一个自由度上的误差容易累积并放大到另一个自由度上，并且串联结构导致底层电动机负载过重，很难实现高速高加速度的定位，从而影响工作效率。采用并联结构的定位平台可改善这些问题，并联结构具有负载高、速度快、刚度高、精度高的优点，受到了国内外学者的广泛关注。并联机器人大多以 6 自由度 Stewart 机器人为基础，但是近年来少自由度并联机器人以其结构简单、成本低、易于建模及控制的特点，逐渐成为机器人领域的研究热点。尤其是 3 自由度平面并联机器人，因其能满足大多数工业生产的需求而受到广泛关注[1-7]。但是这些机器人都是采用传统的电磁电动机驱动，传动误差、磁场干扰及惯性较大等问题不可避免，而且大多采用基于光栅尺和编码器的半闭环控制，难以实现高精度的定位要求。近年来，超声电动机技术和机器视觉技术的日益成熟使此问题得到了一定程度的解决。超声电动机具有直接驱动、响应快、控制性能好、控制精度高、结构简单、易于集成等优点，在机器人、医疗器械、航空航天等领域得到了广泛应用[8]。机器视觉具有精度高、非接触测量、多自由度同时检测等特点，非常适合并联平台的耦合自由度输出检测，将机器视觉用于并联平台末端执行器位姿测量已成为国内外研究热点之一[9-10]。

对于并联平台的轨迹运动，仅仅对传统的笛卡尔坐标系下的各方向跟踪误差进行补偿，往往得不到很好的效果，甚至有时跟踪误差减小了，轮廓误差反而增大，导致轨迹跟踪不精确，如图 1 所示，图中轨迹误差 ε 定义为实际位置到理想轨迹的距离。最早提出利用轮廓误差进行轨迹跟踪控制的是 Koren[11]，文献[12-14]对基于轮廓误差的交叉耦合控制进行了研究并给出了几种轮廓误差的推导方

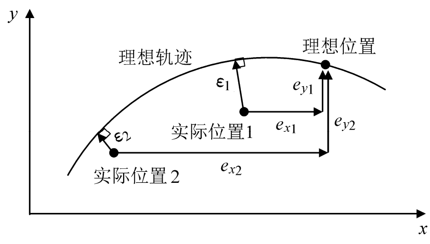

图 1　曲线轨迹的轮廓误差

Fig. 1　Contour error of the curve trajectory

收稿日期：2013-06-21　修回日期：2013-08-01

*国家自然科学基金资助项目(91223201、51375225、51175264、51275235)、中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(NE2013001)、江苏省自然科学基金资助项目(BK2012797)和江苏高校优势学科建设工程资助项目

作者简介：张泉，博士生，主要从并联机器人设计、优化及控制研究，E-mail：quanzhang@nuaa.edu.cn

法。但因受限于平面耦合自由度检测手段的限制，往往只给出了仿真结果，本文在基于机器视觉闭环反馈的基础上，对所提出的基于模型和轮廓误差的控制器进行实验验证。

1　逆运动学分析

图 2 为基于直线超声电动机和机器视觉的 3 - PRR并联平台样机，此并联平台由动平台和静平台通过 3 个对称的由直线副-转动副-转动副构成的支链组成，每个直线副由直线超声电动机直接驱动。平台可达工作空间为 60 mm × 60 mm，转角 ±20°。

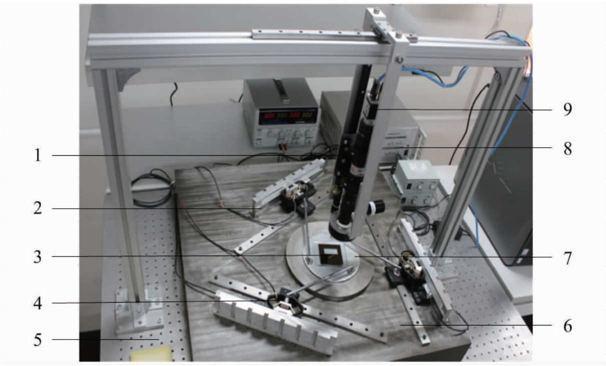

图 2　3 - PRR 平面并联运动平台

Fig. 2　3 - PRR planar parallel manipulator

1. Navitar 光学系统　2. 光栅　3. 人工特征　4. 直线超声电动机　5. 气浮台　6. 静平台　7. 动平台　8. 控制箱　9. CCD

对于具有闭链约束的并联机器人，正向解并不唯一而且通常只能得到数值解。相反，用逆运动学分析则会比较直观而且能够得到解析解。图 3 为并联平台的数学模型，XOY 为静坐标系，静坐标系原点 O 位于由导轨组成的边长为 600 mm 的正三角形中心处，正三角形顶点 A_1、A_2、A_3 在静坐标系中的坐标见图 3，$X'PY'$ 为固连在动平台的动坐标系，动坐标系原点 P 位于由动平台上 3 个铰接点构成的边长为 120 mm 的正三角形中心处，ρ_i（$i = 1, 2, 3$，下同）表示直线超声电动机在直线导轨上距离初始点

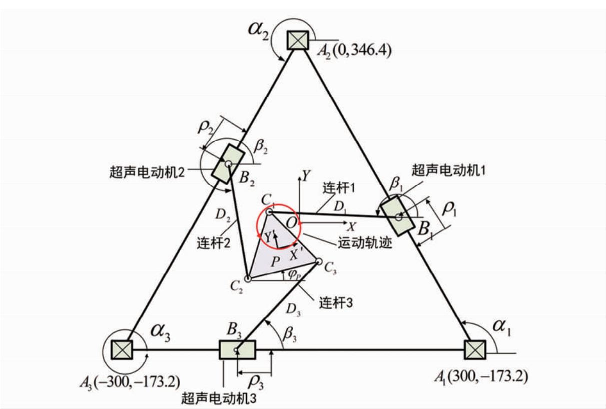

图 3　并联运动平台数学模型

Fig. 3　Mathematic model of the parallel manipulator

的长度，超声电动机的有效作用距离为 250 mm，初始位置为坐标系 XOY 和 $X'PY'$ 重合时电动机的位置。B_i 和 C_i 分别代表相应的被动关节，α_i 定义为 OX 轴与 3 条直线导轨的夹角，β_i 定义为 OX 轴与中间连杆的夹角。

由 3 - PRR 并联结构可得矢量关系

$$\boldsymbol{l}_{OP} + \boldsymbol{l}_{PC_i} = \boldsymbol{l}_{OA_i} + \boldsymbol{l}_{A_iB_i} + \boldsymbol{l}_{B_iC_i} \tag{1}$$

由式(1)和图 3 可得对应的闭链约束条件

$$x_{Ai} + (\rho_0 + \rho_i)\cos\alpha_i + L_i\cos\beta_i = x_P + x'_{Ci}\cos\varphi_P - y'_{Ci}\sin\varphi_P \tag{2}$$

$$y_{Ai} + (\rho_0 + \rho_i)\sin\alpha_i + L_i\sin\beta_i = y_P + x'_{Ci}\sin\varphi_P + y'_{Ci}\cos\varphi_P \tag{3}$$

x'_{Ci}、y'_{Ci}为 C_i 在动坐标系下的坐标，x_{Ai}和 y_{Ai}是轨道交点 A_i 在静坐标系下的位置，ρ_0 表示电动机的初始位置，P 点在静坐标系的位置记为 $\boldsymbol{X}_P = (x_P, y_P, \varphi_P)^{\mathrm{T}}$。

对式(2)、(3)进行数学变形，消去中间变量 β_i，可得到在工作空间内任意位姿 $\boldsymbol{X}_P$ 下 3 个电动机位置的逆解为

$$\rho_i = \frac{Q_{i1} \pm \sqrt{Q_{i1}^2 - 4Q_{i2}}}{2} \tag{4}$$

其中

$$Q_{i1} = 2\cos\alpha_i Q_{i3} + 2\sin\alpha_i Q_{i4}$$
$$Q_{i2} = Q_{i3}^2 + Q_{i4}^2 - L_i^2$$
$$Q_{i3} = x_P - x_{Ai} + x'_{Ci}\cos\varphi_P - y'_{Ci}\sin\varphi_P$$
$$Q_{i4} = y_P - y_{Ai} + x'_{Ci}\sin\varphi_P + y'_{Ci}\cos\varphi_P$$

由式(4)可得，对于任意点的动平台位态 $\boldsymbol{X}_P$，每一个支链都有两组可能的解，因此一共存在 8 组解，要根据电动机的初始位置和运动的连续性来选择一组符合条件的逆解。

2　动力学分析

首先分别建立电动机动子、连杆和末端动平台的速度和加速度关系，然后利用虚功原理进行动力学建模。

2.1　电动机动子速度和加速度分析

为得到电动机动子速度 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 与动平台速度 $\dot{\boldsymbol{X}}_P$ 之间的雅可比矩阵，将式(2)、(3)对时间求导可得

$$\dot{x}_P + \dot{\varphi}_P(-x'_{Ci}\sin\varphi_P - y'_{Ci}\cos\varphi_P) = \dot{\rho}_i\cos\alpha_i - \dot{\beta}_i L_i\sin\beta_i \tag{5}$$

$$\dot{y}_P + \dot{\varphi}_P(x'_{Ci}\cos\varphi_P - y'_{Ci}\sin\varphi_P) = \dot{\rho}_i\sin\alpha_i - \dot{\beta}_i L_i\cos\beta_i \tag{6}$$

式(5)两边乘以 $L_i\cos\beta_i$，式(6)两边乘以 $L_i\sin\beta_i$，并相减消去连杆转角速度 $\dot{\beta}_i$ 可得

$$\dot{\rho}_i = \left[\frac{b_{ix}}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i} \quad \frac{b_{iy}}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i} \quad \frac{(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{b}_i)\cdot\boldsymbol{k}_i}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}\right]\begin{pmatrix}\dot{x}_P\\ \dot{y}_P\\ \dot{\varphi}_P\end{pmatrix} = \boldsymbol{J}_{Pi}\dot{\boldsymbol{X}}_P \tag{7}$$

其中
$$\boldsymbol{k}_i=(0,0,1)$$
$$\boldsymbol{a}_i=(a_{ix},a_{iy},0)=(\cos\alpha_i,\sin\alpha_i,0)$$
$$\boldsymbol{b}_i=(b_{ix},b_{iy},0)=(L_i\cos\beta_i,L_i\sin\beta_i,0)$$
$$\boldsymbol{e}_i=(e_{ix},e_{iy},0)=(x'_{Ci}\cos\varphi_P-y'_{Ci}\sin\varphi_P,\ x'_{Ci}\sin\varphi_P+y'_{Ci}\cos\varphi_P,0)$$

考虑到 $i=1,2,3$，由式(7)可得

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}=\begin{pmatrix}\dot\rho_1\\ \dot\rho_2\\ \dot\rho_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{P1}\\ \boldsymbol{J}_{P2}\\ \boldsymbol{J}_{P3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot x_P\\ \dot y_P\\ \dot\varphi_P\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_P\dot{\boldsymbol{X}}_P \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{J}_P$ 即为超声电动机速度 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ 与动平台速度 $\dot{\boldsymbol{X}}_P$ 之间的雅可比矩阵。

式(8)对时间求导，可得两者之间加速度关系

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}=\begin{pmatrix}\ddot\rho_1\\ \ddot\rho_2\\ \ddot\rho_3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{P1}\\ \boldsymbol{J}_{P2}\\ \boldsymbol{J}_{P3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot x_P\\ \ddot y_P\\ \ddot\varphi_P\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{J}}_{P1}\\ \dot{\boldsymbol{J}}_{P2}\\ \dot{\boldsymbol{J}}_{P3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot x_P\\ \dot y_P\\ \dot\varphi_P\end{pmatrix} \tag{9}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{J}}_{Pi}=\left[\dfrac{-L_i^2a_{iy}\dot\beta_i}{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)^2}\quad \dfrac{L_i^2a_{ix}\dot\beta_i}{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)^2}\quad \dfrac{L_i^2(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{e}_i)\dot\beta_i}{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)^2}-\dfrac{(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)\dot\varphi_P}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}\right]$

2.2 连杆速度和加速度分析

连杆与末端运动平台之间的速度和加速度关系可以用相同的推导方法获得。同样，对于第 i 个支链，连杆的质心和动平台必须满足向量关系

$$\boldsymbol{l}_{OD_i}+\boldsymbol{l}_{D_iC_i}=\boldsymbol{l}_{OP_i}+\boldsymbol{l}_{P_iC_i} \tag{10}$$

此处连杆被认为是连续均匀的刚性杆件，质心位于连杆中心。由式(10)和图3可得连杆与动平台闭链约束关系

$$x_{Di}+\frac{1}{2}L_i\cos\beta_i=x_P+x'_{Ci}\cos\varphi_P-y'_{Ci}\sin\varphi_P \tag{11}$$

$$y_{Di}+\frac{1}{2}L_i\sin\beta_i=y_P+x'_{Ci}\sin\varphi_P+y'_{Ci}\cos\varphi_P \tag{12}$$

将式(11)、(12)对时间求导可得

$$\begin{pmatrix}\dot x_{Di}\\ \dot y_{Di}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-e_{iy}\\0&1&e_{ix}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot x_P\\ \dot y_P\\ \dot\varphi_P\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.5b_{iy}\\0.5b_{ix}\end{pmatrix}\dot\beta_i \tag{13}$$

同时，由式(5)、(6)和(8)可得连杆转动角速度 $\dot\beta_i$ 的表达式为

$$\dot\beta_i=\left[\frac{-a_{iy}}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}\quad\frac{a_{ix}}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}\quad\frac{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{e}_i}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}\right]\begin{pmatrix}\dot x_P\\ \dot y_P\\ \dot\varphi_P\end{pmatrix}=$$
$$[J_{\beta i1}\quad J_{\beta i2}\quad J_{\beta i3}]\dot{\boldsymbol{X}}_P=\boldsymbol{J}_{\beta i}\dot{\boldsymbol{X}}_P \tag{14}$$

由式(14)求导得连杆的转动角加速度

$$\ddot\beta_i=\boldsymbol{J}_{\beta i}\ddot{\boldsymbol{X}}_P+\dot{\boldsymbol{J}}_{\beta i}\dot{\boldsymbol{X}}_P \tag{15}$$

其中
$$\dot{\boldsymbol{J}}_{\beta i}=[\dot J_{\beta i1}\quad \dot J_{\beta i2}\quad \dot J_{\beta i3}]$$
$$\dot J_{\beta i1}=\frac{\dot\beta_ia_{iy}(\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{a}_i)\cdot\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)^2}$$
$$\dot J_{\beta i2}=\frac{-\dot\beta_ia_{ix}(\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{a}_i)\cdot\boldsymbol{k}}{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)^2}$$
$$\dot J_{\beta i3}=\frac{\dot\varphi_P(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{a}_i)\cdot\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i}-\frac{\dot\beta_i(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{e}_i)((\boldsymbol{b}_i\times\boldsymbol{a}_i)\cdot\boldsymbol{k})}{(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{b}_i)^2}$$

综合考虑式(13)、(14)，可得第 i 个连杆与动平台的速度关系为

$$\begin{pmatrix}\dot x_{Di}\\ \dot y_{Di}\\ \dot\beta_i\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_{Di}\dot{\boldsymbol{X}}_P \tag{16}$$

其中
$$\boldsymbol{J}_{Di}=\begin{bmatrix}1+0.5b_{iy}J_{\beta i1}&0.5b_{iy}J_{\beta i2}&-e_{iy}+0.5b_{iy}J_{\beta i3}\\-0.5b_{ix}J_{\beta i1}&1-0.5b_{ix}J_{\beta i2}&e_{ix}-0.5b_{ix}J_{\beta i3}\\J_{\beta i1}&J_{\beta i2}&J_{\beta i3}\end{bmatrix}$$

为第 i 个连杆到动平台的雅可比矩阵。

将式(16)对时间求导可得到连杆与动平台的加速度关系

$$\begin{pmatrix}\ddot x_{Di}\\ \ddot y_{Di}\\ \ddot\beta_{Di}\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_{Di}\ddot{\boldsymbol{X}}_P+\dot{\boldsymbol{J}}_{Di}\dot{\boldsymbol{X}}_P \tag{17}$$

其中
$$\dot{\boldsymbol{J}}_{Di}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\ \dot J_{\beta i1}&\dot J_{\beta i2}&\dot J_{\beta i3}\end{bmatrix}$$
$$A_{11}=0.5\dot\beta_ib_{ix}J_{\beta i1}+0.5b_{iy}\dot J_{\beta i1}$$
$$A_{12}=0.5\dot\beta_ib_{ix}J_{\beta i2}+0.5b_{iy}\dot J_{\beta i2}$$
$$A_{13}=-\dot\varphi_Pe_{ix}+0.5\dot\beta_ib_{ix}J_{\beta i3}+0.5b_{iy}\dot J_{\beta i3}$$
$$A_{21}=0.5\dot\beta_ib_{iy}J_{\beta i1}-0.5b_{ix}\dot J_{\beta i1}$$
$$A_{22}=0.5\dot\beta_ib_{iy}J_{\beta i2}-0.5b_{ix}\dot J_{\beta i2}$$
$$A_{23}=-\dot\varphi_Pe_{iy}+0.5\dot\beta_ib_{iy}J_{\beta i3}-0.5b_{ix}\dot J_{\beta i3}$$

2.3 动力学建模

推导并联平台动力学的目的是为了获得在给定的动平台运动路径下，3个直线超声电动机所需的驱动力，这对研究平台的动态性能以及负载情况具有重要的意义。

首先，在选定动平台坐标为独立坐标的前提下，连杆的惯性力可以表示为

$$\boldsymbol{F}_{Di}=-\begin{bmatrix}m_i&0&0\\0&m_i&0\\0&0&I_i\end{bmatrix}\left[\boldsymbol{J}_{Di}\begin{pmatrix}\ddot x_P\\ \ddot y_P\\ \ddot\varphi_P\end{pmatrix}+\dot{\boldsymbol{J}}_{Di}\begin{pmatrix}\dot x_P\\ \dot y_P\\ \dot\varphi_P\end{pmatrix}\right] \tag{18}$$

式中　m_i——第 i 个连杆的质量

I_i——连杆关于其质心的惯性矩

电动机动子的惯性力可表示为

$$\boldsymbol{F}_s = -\begin{bmatrix} m_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{s3} \end{bmatrix}\left[\boldsymbol{J}_P\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \\ \ddot{\varphi}_P \end{pmatrix} + \dot{\boldsymbol{J}}_P\begin{pmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{\varphi}_P \end{pmatrix}\right] \tag{19}$$

式中　m_{si}——第 i 个电动机动子及相应滑块的质量

动平台的惯性力可表示为

$$\boldsymbol{F}_p = -\begin{bmatrix} m_P & 0 & 0 \\ 0 & m_P & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \\ \ddot{\varphi}_P \end{pmatrix} \tag{20}$$

式中　m_P——动平台的质量

I_P——动平台关于其质心的惯性矩

根据虚功原理，平台系统内所有的虚功和为零，即

$$\delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a + \delta\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_s + \delta\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_P^R + \sum_{i=1}^{3}\delta\boldsymbol{X}_{Di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{Di} = 0 \tag{21}$$

式中　$\boldsymbol{F}_a$——超声电动机施加的驱动力

考虑到 $\delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{J}_P\delta\boldsymbol{X}_P$，$\delta\boldsymbol{X}_{Di} = \boldsymbol{J}_{Di}\delta\boldsymbol{X}_P$ 为虚位移之间的转换关系，将式(21)化简可得

$$\delta\boldsymbol{X}_P^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_P^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{F}_s) + \boldsymbol{F}_p + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{J}_{Di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{Di}) = 0 \tag{22}$$

因为 $\delta\boldsymbol{X}_P$ 可取任意虚位移，所以式(22)括号内部的结果必须严格为零。因此可得直线电动机的驱动力表达式为

$$\boldsymbol{F}_a = -\boldsymbol{F}_s - (\boldsymbol{J}_P^{\mathrm{T}})^{-1}\left(\boldsymbol{F}_p + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{J}_{Di}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{Di}\right) \tag{23}$$

将式(18)～(20)代入式(23)，经过整理可得并联平台的动力学模型为

$$\boldsymbol{M}_A\ddot{\boldsymbol{X}}_P + \boldsymbol{M}_C\dot{\boldsymbol{X}}_P = \boldsymbol{J}_P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_a \tag{24}$$

其中

$$\boldsymbol{M}_C = \boldsymbol{J}_P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} m_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{s3} \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{J}}_P + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{J}_{Di}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & I_i \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} m_P & 0 & 0 \\ 0 & m_P & 0 \\ 0 & 0 & I_P \end{bmatrix} + \boldsymbol{J}_P^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} m_{s1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{s2} & 0 \\ 0 & 0 & m_{s3} \end{bmatrix}\boldsymbol{J}_P + \sum_{i=1}^{3}\boldsymbol{J}_{Di}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & I_i \end{bmatrix}$$

式中　$\dot{\boldsymbol{J}}_{Di}$——离心力和科里奥利矩阵

$\boldsymbol{J}_{Di}$——惯性矩阵

3　控制实验

3.1　轮廓误差推导

采用切线近似法来推导轨迹误差，为保证此方法的有效性，必须保证跟踪误差远远小于轨迹的瞬时曲率半径，本文中并联平台拟实现的最小轨迹是半径为 2 mm 的圆形，拟实现控制精度小于 20 μm，因此满足近似条件。

对于空间多自由度的轨迹运动，平移和旋转运动的误差推导是独立进行的。图 4 所示为切线近似法下空间平移 3 自由度 XYZ 的轮廓误差示意图，假设给定了期望轨迹 $\boldsymbol{X}_{ref}$，跟随此轨迹切线的动坐标系可以定义为

$$\boldsymbol{F} = [\hat{\boldsymbol{t}} \quad \hat{\boldsymbol{n}} \quad \hat{\boldsymbol{b}}] \in \mathbf{R}^{3\times 3} \tag{25}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 是与期望轨迹 $\boldsymbol{X}_{ref}$ 的切向量，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{b}}$ 分别是其法向量和副法向量，定义为

$$\hat{\boldsymbol{t}} = \dot{\boldsymbol{X}}_{ref} / \|\dot{\boldsymbol{X}}_{ref}\| \tag{26}$$

$$\hat{\boldsymbol{n}} = \dot{\boldsymbol{X}}_{ref} \times (\ddot{\boldsymbol{X}}_{ref} \times \dot{\boldsymbol{X}}_{ref}) / \|\dot{\boldsymbol{X}}_{ref}\| \, \|\ddot{\boldsymbol{X}}_{ref} \times \dot{\boldsymbol{X}}_{ref}\| \tag{27}$$

$$\hat{\boldsymbol{b}} = \hat{\boldsymbol{t}} \times \hat{\boldsymbol{n}} \tag{28}$$

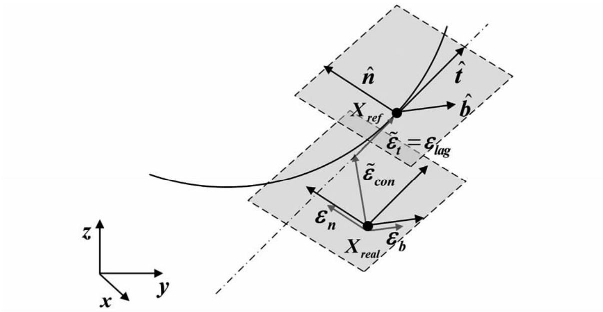

图 4　空间切线近似法示意图

Fig. 4　Schematic model of the spatial tangential approximation approach

跟随切线移动的动坐标系可以看作 3×3 的变换矩阵，将直角坐标系下的跟踪误差转化为沿切点移动的动坐标系下的轮廓误差

$$\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_b \end{pmatrix} \longleftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_b \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \tag{29}$$

其中 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}^{-1}$，$\varepsilon_t$ 为沿切向的延时误差 $\varepsilon_{\mathrm{lag}}$ 的估算值，ε_n 和 ε_b 共同确定了轮廓误差 $\varepsilon_{\mathrm{con}}$ 的估算值

$$\|\tilde{\varepsilon}_{con}\| = \sqrt{\varepsilon_n^2 + \varepsilon_b^2} \tag{30}$$

对于角度的轮廓误差控制，同样可用基于切线的动坐标系法进行角度轮廓误差的估算[15]，本文中的转动自由度只有沿 Z 向的转动，没有与其他方向转角的误差耦合，因此跟踪误差与轮廓误差相同，即 $e_\varphi = \varepsilon_\varphi$。

3.2 控制器设计及稳定性分析

考虑到式(24)推导的动力学方程及轮廓误差，基于反馈线性化思想设计控制器

$$\boldsymbol{F}_a=(\boldsymbol{J}_P^{\mathrm{T}})^{-1}[\boldsymbol{M}_A(\ddot{\boldsymbol{X}}_{ref}+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{M}_C\dot{\boldsymbol{X}}_P] \tag{31}$$

$$\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}})^{-1}(\boldsymbol{K}_d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{K}_p\boldsymbol{\varepsilon}+2\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}) \tag{32}$$

将式(31)、(32)代入式(24)，并考虑到 $\boldsymbol{M}_A$ 和 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ 为非奇异矩阵，可得到闭环控制方程为

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{e}}+2\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{e}}+\ddot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}+\boldsymbol{K}_d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{K}_p\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{o} \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{X}_{ref}-\boldsymbol{X}_P$。将式(29)对时间求导两次代入式(33)可得

$$\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{K}_d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{K}_p\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{o} \tag{34}$$

若 $\boldsymbol{K}_p$ 和 $\boldsymbol{K}_d$ 取正定对角矩阵，则可以保证式(31)所示的控制器稳定，即随着 $t\to\infty$，$\boldsymbol{\varepsilon}\to\boldsymbol{o}$。$\boldsymbol{o}$ 为 3×1 零向量。

3.3 运动学参数标定

在进行轨迹控制之前，首先在基于视觉闭环反馈的条件下，对并联平台的运动学参数进行标定。实验装置可分为视觉检测系统和运动控制系统，视觉检测系统主要由 CCD、光学镜头、光源等组成，CCD 采用 Basler 工业相机，其像素为 1 280×960，像素分辨率为 3.75 μm×3.75 μm，传输接口为千兆以太网；镜头为 Navitar 光学镜头，配备了 Navitar 12X Zoom 光学变焦系统；同时采用了 Navitar 点光源和同轴光源两种照明方式；运动控制系统主要包括工控机、DMC1842 控制卡、直线超声电动机驱动器、光栅尺、稳压电源等。

对于平面 3-PRR 并联平台运动学参数标定问题，首先选取并联平台的 n 组不同位形，以并联平台运动学参数的名义值代入式(4)可以得到 n 组直线超声电动机位移(ρ_1,ρ_2,ρ_3)，此后驱动直线超声电动机运动至上述位置，并利用 CCD 工业相机精确测量并联平台动平台实际位姿$(x_p,y_p,\varphi_p)^{\mathrm{T}}$，最后通过粒子群优化算法使包含运动学参数的误差评价函数 J 达到最小，从而获得并联平台运动学参数的实际值。其中

$$J=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{E}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_j=\sum_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{E}_j\|^2 \tag{35}$$

$$\boldsymbol{E}=[E_1\quad E_2\quad E_3]^{\mathrm{T}} \tag{36}$$

$$E_i=\rho_i-(x_p+e_{ix}-x_{Ai})a_{ix}-(y_p+e_{iy}-y_{Ai})a_{iy}+\sqrt{L_i-[(x_p+e_{ix}-x_{Ai})a_{iy}-(y_p+e_{iy}-y_{Ai})a_{ix}]^2} \tag{37}$$

式(37)的误差函数由式(2)、(3)所示的闭链约束推导得出，运动学参数的名义值与实际值对比见表1。

表1 运动学参数标定结果

Tab.1 Main kinematic parameters of the parallel manipulator

待标定变量	名义值	标定值	待标定变量	名义值	标定值
α_1/(°)	120	120.11	y'_{c1}/mm	-34.64	-34.76
α_2/(°)	240	238.56	y'_{c2}/mm	69.28	70.32
α_3/(°)	0	0.98	y'_{c3}/mm	-34.64	-34.01
L_1/mm	200	201.51	x_{A1}/mm	300	299.58
L_2/mm	200	200.67	x_{A2}/mm	0	0.21
L_3/mm	200	199.89	x_{A3}/mm	-300	-300.21
x'_{c1}/mm	60	59.72	y_{A1}/mm	-173.20	-172.63
x'_{c2}/mm	0	0.31	y_{A2}/mm	346.41	345.85
x'_{c3}/mm	-60	-60.34	y_{A3}/mm	-173.20	-174.22

4 实验结果及分析

根据3.2节设计的控制器进行轨迹控制实验，实验在恒温、恒湿、隔振的纳米测量实验室内进行，图5为控制系统框图，控制实验采用的理想轨迹为

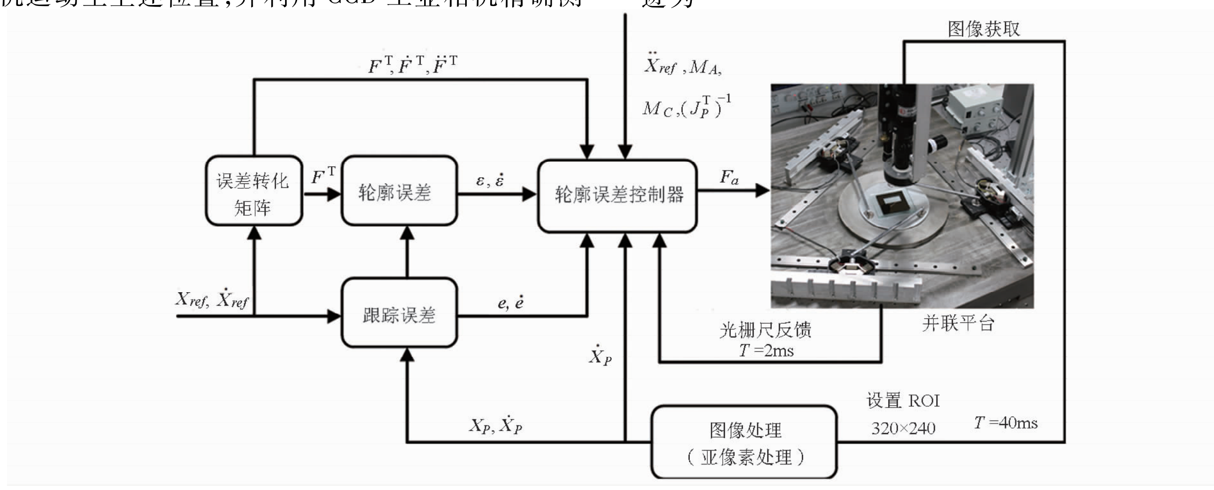

图5 控制系统框图

Fig.5 Schematic diagram of the proposed control system

$$\begin{cases} x_P = 3\cos(0.5\pi t) - 3 \\ y_P = 3\sin(0.5\pi t) \\ \varphi_P = \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \tag{38}$$

因为转动自由度无耦合，所以与传统跟踪误差相同，而平移自由度只需考虑平面 XY 两自由度，因此由给定的期望轨迹和式(26)～(29)可得

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_n \\ \varepsilon_\varphi \end{pmatrix} = \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{\mathrm{tra}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{o}_{2\times1} \\ \boldsymbol{o}_{2\times1} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\varphi \end{pmatrix} \tag{39}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{tra}}$ 为平移自由度的转化矩阵

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{tra}} = \begin{bmatrix} -\sin(\pi t) & -\cos(\pi t) \\ \cos(\pi t) & -\sin(\pi t) \end{bmatrix} \tag{40}$$

此时 $\tilde{\varepsilon}_{con} = \varepsilon_n$，$\tilde{\varepsilon}_{lag} = \varepsilon_t$，且 $\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{tra}}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{o}_{2\times1} \\ \boldsymbol{o}_{2\times1} & 1 \end{bmatrix}$。

式(24)中的矩阵 $\boldsymbol{M}_A$ 和 $\boldsymbol{M}_C$ 包含雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_P$ 及 $\boldsymbol{J}_{Di}$，因此 $\boldsymbol{M}_A$ 和 $\boldsymbol{M}_C$ 的值与动平台的运动位形有关，此处给出当动平台运动到 $t = 2$ s 时，即动平台在静坐标系中的位姿为 $\boldsymbol{X}_P = \left(-6, 0, \dfrac{\pi}{6}\right)$ 时，$\boldsymbol{M}_A$ 和 $\boldsymbol{M}_C$ 的具体计算数值为

$$\boldsymbol{M}_A = \begin{bmatrix} 1.7179 & 0.1384 & 0.0205 \\ 0.1384 & 1.5211 & 0.0034 \\ 0.0205 & 0.0034 & 0.0108 \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\boldsymbol{M}_C = \begin{bmatrix} 0.0665 & -0.0175 & -0.0050 \\ -0.0240 & -0.0577 & -0.0053 \\ -0.0018 & -0.0079 & 0.0001 \end{bmatrix} \tag{42}$$

图 6 所示为传统误差控制器和轮廓误差控制器对式(38)所示的圆形轨迹进行轨迹控制的实验结果。由图 6a 可以看出，由于事先进行了运动学参数的标定，两种控制器都能实现比较好的轨迹跟踪，但由图 6b 和图 6c 的局部区域放大图可以看出，基于轮廓误差的控制器具有更高的轨迹跟踪精度，XY 轴跟踪误差可以控制在 15 μm 以内，更接近于理想的圆形轨迹，而基于传统跟踪误差控制器的 XY 轴跟踪误差则在 30 μm 以内，跟踪效果不如轮廓误差控制器。图 7 为切线近似法估算的轮廓误差与实际轮廓误差比较图，可以看出，在基于模型的轮廓误差控制器控制下，实际轮廓误差整体趋势控制在 ±12 μm 的区间内变化，基于切线近似法的轮廓误差可以很好地逼近实际轮廓误差，近似值在 −20 ～ 5 μm 内波动，近似值与实际值的均方误差为 0.0071 mm，近似效果较好，且其计算量较少，适用于更多自由度的轮廓误差估计。图 7 中的个别峰值误差是由于动平台在不同位姿时的速度、加速度不同以及控制系统参数变化造成的，在 3.1 s 处的近似值与实际值误差反向是由于系统的扰动造成，其余采样点的近似值都符合实际值的变化规律。

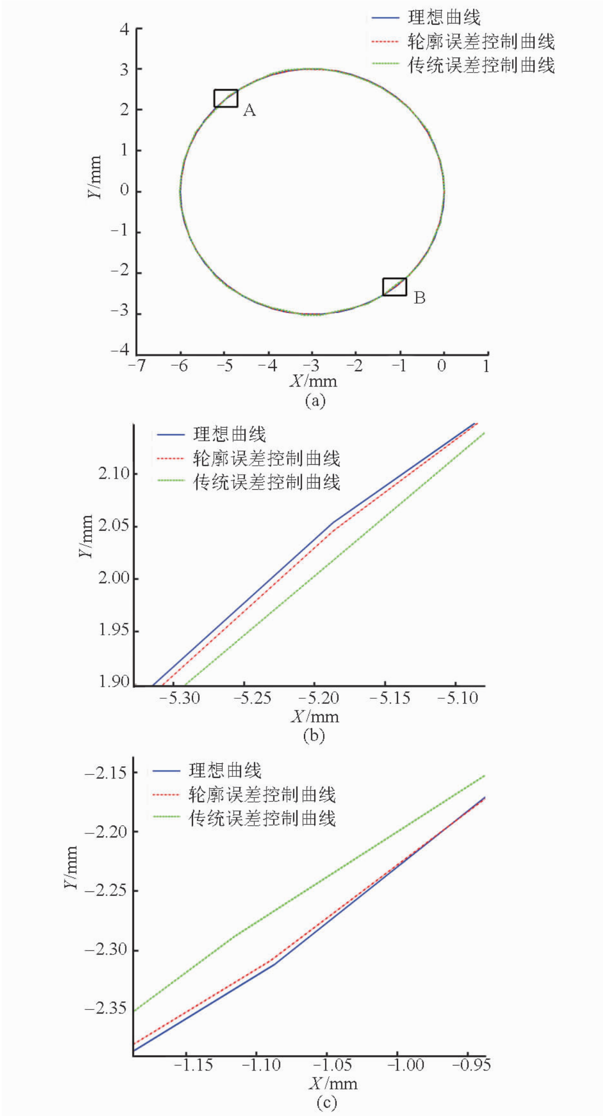

图 6　实验结果拟合曲线

Fig. 6　Comparison of the experimental results

(a) 圆形轨迹跟踪结果　(b) A 处放大　(c) B 处放大

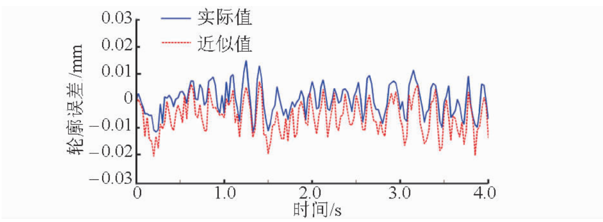

图 7　轮廓误差曲线

Fig. 7　Experimental results of the contour error

5　结论

(1) 对直线超声电动机驱动的 3 − PRR 并联机器人进行了运动学和动力学分析，建立了并联机器人的动力学模型。

(2) 根据切线近似法推导了平面3自由度的轮廓误差公式,设计了基于模型和轮廓误差的控制器,并证明了控制器的稳定性。

(3) 通过基于机器视觉闭环反馈,对所提出的控制器进行了实验验证,结果表明基于轮廓误差的控制器比传统误差控制器具有更高的轨迹跟踪精度。

参考文献

1 Staicu S. Inverse dynamics of the 3 - PRR planar parallel robot[J]. Robotics and Autonomous Systems, 2009, 57(5): 556 - 563.

2 刘善增, 余跃庆, 侣国宁. 3自由度并联机器人的运动学与动力学分析 [J]. 机械工程学报, 2009, 45(8): 11 - 17.
Liu Shanzeng, Yu Yueqing, Lv Guoning, et al. Kinematic and dynamic analysis of a three-degree-of-freedom parallel manipulator [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(8): 11 - 17. (in Chinese)

3 Zhang X, Mills J K, Cleghorn W L. Dynamic modeling and experimental validation of a 3 - PRR parallel manipulator with flexible intermediate links[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2007, 50(4): 323 - 340.

4 Zhang X, Mills J K, Cleghorn W L. Experimental implementation on vibration mode control of a moving 3 - PRR flexible parallel manipulator with multiple PZT transducers[J]. Journal of Vibration and Control, 2010, 16(13): 2035 - 2054.

5 从爽, 尚伟伟. 并联机器人-建模、控制优化与应用[M]. 北京:电子工业出版社, 2010: 85 - 91.

6 姚蕊,唐晓强,黄鹏,等. 高加速度的柔性3 - RRR并联机构尺度综合设计[J].清华大学学报, 2008,48(2): 184 - 188.
Yao Rui, Tang Xiaoqiang, Huang Peng, et al. Dimensional design of flexible 3 - RRR planar manipulator with high acceleration [J]. Journal of Tsinghua University, 2008, 48(2): 184 - 188. (in Chinese)

7 邵珠峰,唐晓强,王立平,等.平面柔性 3 - RRR 并联机构自标定方法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(3): 150 - 155.
Shao Zhufeng, Tang Xiaoqiang, Wang Liping, et al. Self-calibration method of planar flexible 3 - RRR parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(3):150 - 155. (in Chinese)

8 Zhao C. Ultrasonic motors: technologies and applications[M]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2011:7 - 18.

9 周丽平, 孙志峻, 张泉,等. 一种应用正态分布理论的直线超声电机精密定位控制方法[J].中国电机工程学报, 2012,32(27): 60 - 65.
Zhou Liping, Sun Zhijun, Zhang Quan, et al. A precision alignment control method of linear ultrasonic motors using the normal distribution theory[J]. Proceeding of the CSEE, 2012, 32(27): 60 - 65. (in Chinese)

10 Kwon S J, Hwang J. Kinematics, pattern recognition, and motion control of mask-panel alignment system [J]. Control Engineering Practice, 2011, 19(8): 883 - 892.

11 Koren Y. Cross-coupled biaxial computer control for manufacturing systems [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1980, 102(4): 265 - 272.

12 Chiu G T C, Tomizuka M. Contouring control of machine tool feed drive systems: a task coordinate frame approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2001, 9(1): 130 - 139.

13 Yang J, Li Z. A novel contour error estimation for position loop-based cross coupled control[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2011, 16(4): 643 - 655.

14 王丽梅,金抚颖,孙宜标. 基于等效误差法的直线电机*XY*平台二阶滑模控制[J]. 中国电机工程学报, 2010, 30(6): 88 - 92.
Wang Limei, Jin Fuying, Sun Yibiao. Second order sliding mode control for linear motor *XY* table based on equivalent errors method[J]. Proceeding of the CSEE, 2010, 30(6): 88 - 92. (in Chinese)

15 Sencer B, Altintas Y, Croft E. Modeling and control of contouring errors for five-axis machine tools — Part Ⅰ: modeling[J]. ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2009, 131(3): 0310061 - 0310068.

Modeling and Control of Parallel Manipulator Driven by Linear Ultrasonic Motors

Zhang Quan[1] Zhu Benliang[2] Zhou Liping[1] Jin Jiamei[1] Zhang Jianhui[1]

(1. *State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures*, *Nanjing University of Aeronautics and Astronautics*, *Nanjing* 210016, *China*

2. *School of Mechanical and Automotive Engineering*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510640, *China*)

Abstract: The demand for precise positioning manipulators with a large workspace has increased dramatically due to their role in semiconductor manufacturing, medical surgery and automatic microassembly. In this paper, a planar parallel manipulator (PPM) actuated by three linear ultrasonic motors (LUSMs) for high accuracy positioning is designed. With the aim to realize accurate trajectory tracking control of the proposed 3-PRR PPM, a model and contour error based controller is developedaccording to the dynamic model of the parallel manipulator. The dynamic modeling procedure is as follows: firstly, based on the closed-loop constraints of the parallel structure, kinematic analysis of the manipulator is carried out, and the inverse kinematics solution is obtained. Then thevelocities and accelerations of each part, such as rigid linkage, sliders of the motor, and the moving platform, are analyzed in order to derivethe corresponding Jacobian matrices between different coordinates. Finally, the dynamic model of the parallel manipulator is developed using virtual work principle. In a motion trackingtask, it is much more important to minimize the component of the error vector that is the normal with respect to the reference trajectory. This component of the error vector is referred to as the contour error. According to contour error theory, minimizing independent axial errors may not minimize the contour error and conversely, it is possible to have a small contour error while having large axial errors. Hence the contour error based control method is adopted to achieve precise motion tracking in this paper. The contour errorsof three planar degrees of freedom are formulated based on tangential approximation approach, and then a model and contour error based controller is developed using the feedback linearization principle. The stability of the proposed control law is proved based on Lyapunov theory. To guarantee the accuracy of the proposed control algorithm, a kinematic calibration is performed to obtain the real kinematic parameters before the control experiment. The actual position of the moving platform is captured by the CCD camera, and the error cost function is optimized by the particle swarm optimization (PSO) algorithm. Experimental results show that, the trajectory tracking errors of X and Y axes can be reduced to 15 μm using the proposed controller, which improves the motion tracking accuracy of the moving platform. The results also present that the tangential approximation approach has the better ability to approximate the real contour error.

Key words: Linear ultrasonic motors　Parallel manipulator　Dynamic model　Contour error