doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2014.03.049

串联机构运动学反解的 D－H 四元数方法*

张忠海　李端玲

（北京邮电大学自动化学院，北京 100876）

摘要：普通四元数方法在串联机构运动学反解时存在方程数量不足和求解困难的问题，为了解决这些问题并建立新的串联机构运动学反解方法，提出串联机构运动学反解的 D－H 四元数方法。首先给出了包含 D－H 参数的四元数变换通用方程式，提出将四元数变换方程式分离为位置和姿态两个方程式，这两个方程式可构造出含有 7 个方程的方程组，使方程数量满足 4R 以上串联机构运动学反解的要求。为了降低方程组的求解难度，提出了取姿态方程中三角函数的一半组成新的姿态方程，将方程次数降低为原来的一半。采用所提出的 D－H 四元数方法对 PUMA 机器人进行运动学反解分析，得到了该机器人的 8 组反解。根据所求得的 8 组解，建立了 PUMA 机器人的 8 个位姿的三维模型，并测量了 PUMA 机器人三维模型的末端位姿数值，与所给末端位姿数值完全相同，验证了所提出的 D－H 四元数方法的正确性和有效性。

关键词：串联机构　运动学反解　D－H 四元数　PUMA 机器人

中图分类号：TH112　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2014)03-0299-06

引言

串联机器人机构运动学反解是为机器人提供控制程序，是机器人研究中的重要组成部分[1]。廖启征等[2－3]采用 D－H 矩阵或对偶矩阵建模并消元，率先解决了这一问题。此后，一些新的建模方法相继出现，例如倍四元数方法[4]、对偶四元数方法[5]等。虽然已有方法能够解决串联机构运动学反解问题，但仍然存在着建模复杂或求解困难等问题，在工程实际中应用还比较困难，所以这一问题仍然受到研究者的广泛关注。

一般的四元数可以很好地处理刚体运动分析的理论问题[6－11]，从而使四元数方法在机器人机构学领域获得了进一步应用[12－14]。但普通四元数方法在串联机构运动学反解中却很少采用，究其原因：一是数学建模问题，根据四元数位姿方程式可列出 4 个方程，而对于 4R 以上串联机构有超过 4 个关节变量，所以很难解决 4R 以上串联机构运动学反解问题；二是消元求解问题，通过四元数方法建立运动学方程后，由于左右乘半角正弦和余弦函数，在建模中使方程的次数增高 2 倍，这就给消元求解带来了极大困难，若采用一般的数学软件求解往往是计算溢出而无法得到结果。

Denavit－Hartenberg 参数表示方法[15－16]能够很方便描述各杆件间的相对位姿，四元数能够很方便描述各杆件相对于固定参考系的空间几何关系。结合 D－H 参数表示方法和四元数描述方法的双重优势，本文提出串联机构运动学反解的 D－H 四元数方法。

1　运动学方程

D－H 连杆坐标系的建立方法见图 1 所示。连杆参数定义如下：a_n 为从 z_n 到 z_{n+1} 沿 x_n 测量的距离；α_n 为从 z_n 到 z_{n+1} 绕 x_n 旋转的角度；d_n 为从 x_{n-1} 到 x_n 沿 z_n 测量的距离；θ_n 为从 x_{n-1} 到 x_n 绕 z_n 旋转的角度。

相邻连杆坐标系$\{n\}$相对于坐标系$\{n-1\}$的变换可依次通过如下步骤实现：绕 x_{n-1} 轴转 α_{n-1}；沿 x_{n-1} 轴移动 a_{n-1}；绕 z_n 轴转 θ_n；沿 z_n 轴移动 d_n。

对于任意个连杆串联的机构，坐标系$\{m\}$中矢量 ${}^m\boldsymbol{P}$ 用四元数表示为 ${}^m p$，在参考坐标系$\{0\}$中表示为 ${}^0 p$，则机构运动学分析的 D－H 四元数变换计算通式为

收稿日期：2013－03－26　修回日期：2013－05－31

* 国家自然科学基金资助项目(51075039、51375058)、中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(2012LD03)、清华大学摩擦学国家重点实验室开放基金资助项目、新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET－12－0796)和高等学校博士学科点专项基金资助项目(20120005110008)

作者简介：张忠海，博士生，主要从事机器人与机构学研究，E-mail：zhzhonghai@sina.com

通讯作者：李端玲，教授，博士生导师，主要从事机构学与机器人学研究，E-mail：liduanling@163.com

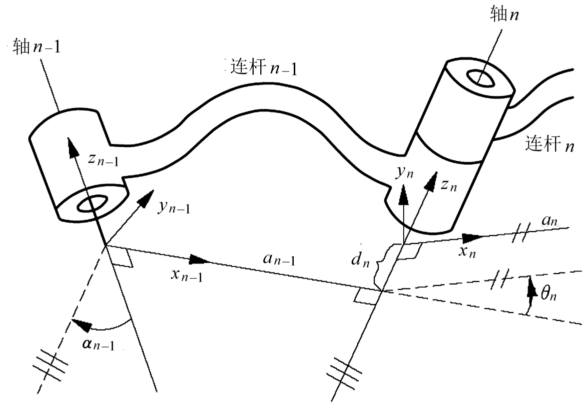

图1 D-H连杆坐标系和连杆参数
Fig. 1 D-H linkage coordinates and parameters

$$
{}^{0}p = \sum_{n=0}^{m-1}\left[r_{0n} a_n i \tilde{r}_{0n} + r_{0n} {}^{x_n} r_{n(n+1)} \cdot (d_{n+1} k)^{x_n} \tilde{r}_{n(n+1)} \tilde{r}_{0n} \right] + r_{0m} {}^{m} p \tilde{r}_{0m} \quad (1)
$$

其中
$$
r_{0n} = {}^{x_0} r_{01} {}^{z_1} r_{01} \cdots {}^{x_{n-2}} r_{(n-2)(n-1)} \cdot {}^{z_{n-1}} r_{(n-2)(n-1)} {}^{x_{n-1}} r_{(n-1)n} {}^{z_n} r_{(n-1)n} =
$$
$$
\left(c\frac{\alpha_0}{2} + is\frac{\alpha_0}{2}\right)\left(c\frac{\theta_1}{2} + ks\frac{\theta_1}{2}\right)\cdots\left(c\frac{\alpha_{n-2}}{2} + is\frac{\alpha_{n-2}}{2}\right)\cdot \left(c\frac{\theta_{n-1}}{2} + ks\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)\left(c\frac{\alpha_{n-1}}{2} + is\frac{\alpha_{n-1}}{2}\right)\left(c\frac{\theta_n}{2} + ks\frac{\theta_n}{2}\right) \quad (2)
$$

$$
{}^{x_n} r_{n(n+1)} = c\frac{\alpha_n}{2} + is\frac{\alpha_n}{2} \quad (3)
$$

$$
r_{0m} = {}^{x_0} r_{01} {}^{z_1} r_{01} \cdots {}^{x_{m-2}} r_{(m-2)(m-1)} \cdot {}^{z_{m-1}} r_{(m-2)(m-1)} {}^{x_{m-1}} r_{(m-1)m} {}^{z_m} r_{(m-1)m} =
$$
$$
\left(c\frac{\alpha_0}{2} + is\frac{\alpha_0}{2}\right)\left(c\frac{\theta_1}{2} + ks\frac{\theta_1}{2}\right)\cdots\left(c\frac{\alpha_{m-2}}{2} + is\frac{\alpha_{m-2}}{2}\right)\cdot \left(c\frac{\theta_{m-1}}{2} + ks\frac{\theta_{m-1}}{2}\right)\left(c\frac{\alpha_{m-1}}{2} + is\frac{\alpha_{m-1}}{2}\right)\left(c\frac{\theta_m}{2} + ks\frac{\theta_m}{2}\right) \quad (4)
$$

式中，c表示cos，s表示sin。

2 运动学反解的D-H四元数方法

若根据式(1)进行反解，对于4R以上串联机构有超过4个关节变量，根据四元数方程式可列出4个方程，所以很难直接根据这个运动学方程反解4R以上串联机构。若想解决4R以上的串联机构运动学反解问题，必须设法增加方程的数量。通过分析式(1)发现，D-H四元数运动学方程式可分离出位置和姿态两个方程式，分别描述了D-H坐标系的平移和旋转变换，这样将式(1)方程式分离出位置和姿态两个方程式。

位置方程式

$$
t = \sum_{n=0}^{m-1}\left[r_{0n} a_n i \tilde{r}_{0n} + r_{0n} {}^{x_n} r_{n(n+1)} (d_{n+1} k)^{x_n} \tilde{r}_{n(n+1)} \tilde{r}_{0n} \right] \quad (5)
$$

姿态方程式

$$
r' = r_{0m} {}^{m} p \tilde{r}_{0m} \quad (6)
$$

在式(5)中，由于表示了平移变换，所以四元数的实部为0，这样可以根据位置方程式的四元数对应项相等列出3个方程。根据式(6)四元数各部对应相等可列出4个方程。这样根据分离方程后的2个方程式可列出7个方程，具备了根据运动学方程进行反解的条件。

对于姿态方程式，由于四元数和它的共轭左右相乘，导致方程次数翻倍。若能降低方程的次数，将对消元求解带来方便。姿态方程由旋转变换而来，而旋转变换用r_{0m}完全可以确定末端姿态。基于此，可将式(6)姿态方程式简化为

$$
r = r_{0m} \quad (7)
$$

根据式(5)，位置方程式含有$m-1$个关节变量，分别是$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m-1}$。若末端位置为$t_0$，3个虚部分别用$t_{01}$、$t_{02}$、$t_{03}$表示，根据式(5)等式两边虚部分别相等可列出3个方程

$$
t_{01} = t_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m-1}) \quad (8)
$$
$$
t_{02} = t_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m-1}) \quad (9)
$$
$$
t_{03} = t_3(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{m-1}) \quad (10)
$$

式(7)姿态方程式含有m个关节变量，分别是$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$。若末端姿态为$r_0$，1个实部和3个虚部分别用$r_{0a}$、$r_{0b}$、$r_{0c}$、$r_{0d}$表示，根据式(7)实部和虚部分别相等可列出4个方程

$$
r_{0a} = r_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \quad (11)
$$
$$
r_{0b} = r_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \quad (12)
$$
$$
r_{0c} = r_3(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \quad (13)
$$
$$
r_{0d} = r_4(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \quad (14)
$$

为了降低姿态方程的方程次数，可将变量进行分离，由于

$$
r_0 = r_{0m} = r_{01} r_{12} r_{23} \cdots r_{(m-1)m} \quad (15)
$$

分离变量后的方程为

$$
r_0 \tilde{r}_{(m-1)m} \tilde{r}_{(m-2)(m-1)} \cdots \tilde{r}_{(s-1)s} = r_{01} r_{12} r_{23} \cdots r_{(s-2)(s-1)} \quad (16)
$$

对于一般6R串联机器人机构的非线性运动学方程组反解的消元求解问题，可采用吴方法[17]、Grobner法[18]、结式消元法[19]等。但对于实际应用的大多数机器人机构，其结构参数存在着某些特殊性，这些结构上的特殊性使人们在运动学反解中避免了复杂的计算，也避免了利用计算机软件求解过程中的计算溢出。本文所提出的方法，能够利用机器人机构的某些特殊结构特性，使求解过程变得简单。下面通过PUMA机器人运动学反解，进一步阐述D-H四元数方法。

3　PUMA机器人运动学反解的 D－H 四元数方法

PUMA 机器人运动学反解主要采用的是 D－H 矩阵建模和矩阵运算方法[16]，例如反变换方法[20]、几何方法[21]等。本文采用所提出的不同于已有 D－H矩阵建模方法的 D－H 四元数运动学反解方法，并对 PUMA 机器人进行运动学反解分析，验证所提出的 D－H 四元数方法的正确性和有效性。

图 2 所示为 PUMA 机器人外形和 D－H 连杆坐标系及连杆参数，已知连杆参数见表 1，下面通过所提出的 D－H 四元数运动学反解方法对这种机器人机构进行运动学反解分析。

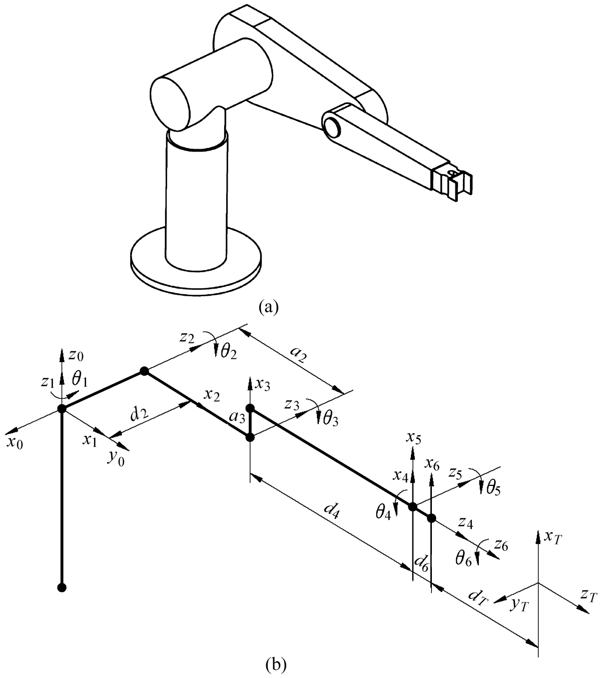

图 2　PUMA 机器人结构图和 D－H 连杆坐标系

Fig. 2　Structure of PUMA robot and D－H linkage coordinates

（a）PUMA 机器人　（b）D－H 连杆坐标系

表 1　PUMA 机器人连杆参数

Tab. 1　Linkage parameters for PUMA robot

连杆	运动参数			
n	a_{n-1}/mm	α_{n-1}/(°)	d_n/mm	θ_n/(°)
1	0	0	0	90
2	0	－90	149.09	0
3	431.8	0	0	－90
4	20.32	－90	433.07	0
5	0	90	0	0
6	0	－90	0	0
工具	0	0	56.25	0

3.1　末端位姿的求解

根据表 1 中的数值，计算末端位置和姿态。根据式（5），末端位置为

$$t = \sum_{n=0}^{5}\left[r_{0n}a_n i\,\tilde{r}_{0n} + r_{0n}{}^{x_n}r_{n(n+1)}(d_{n+1}k)^{x_n}\tilde{r}_{n(n+1)}\tilde{r}_{0n}\right] \tag{17}$$

经计算，得出末端位置的四元数表示为

$$t_0 = -149.09i + 921.12j + 20.32k \tag{18}$$

根据式（7），末端姿态为

$$r = r_{06} = {}^{x_0}r_{01}{}^{z_1}r_{01}{}^{x_1}r_{12}{}^{z_2}r_{12}\cdots{}^{x_5}r_{56}{}^{z_6}r_{56} \tag{19}$$

经计算，得出末端姿态的四元数表示为

$$r_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}j - \frac{1}{2}k \tag{20}$$

3.2　运动学反解

根据末端位姿数值，对 PUMA 机器人进行运动学反解分析。

位置方程式为

$$t_0 = \sum_{n=0}^{5}\left[r_{0n}a_n i\,\tilde{r}_{0n} + r_{0n}{}^{x_n}r_{n(n+1)}(d_{n+1}k)^{x_n}\tilde{r}_{n(n+1)}\tilde{r}_{0n}\right] \tag{21}$$

首先利用 PUMA 机器人参数的特性，对式（21）进行消元简化。分析式（21）发现，当 $a_n = d_{n+1} = 0$，$n \geqslant m$，则 θ_m 在这个方程式中将消去。而 PUMA 机器人的结构参数：$a_4 = d_5 = 0$，$a_5 = d_6 = 0$，所以 θ_4 和 θ_5 在位置方程中被消去。这样位置方程只含 θ_1、θ_2、θ_3 3 个变量，方程大为简化，使反解变得很容易。而位置方程有 3 个，即根据式（21）虚部分别相等可列出 3 个方程

$$t_{01} = t_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{22}$$

$$t_{02} = t_2(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{23}$$

$$t_{03} = t_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \tag{24}$$

这 3 个位置方程只有 3 个关节变量，很容易反解出关节变量 θ_1、θ_2、θ_3 的值。

姿态方程式为

$$r_0 = r_{06} \tag{25}$$

姿态方程有 4 个，即根据式（25）实部和虚部分别相等可列出 4 个方程

$$r_{0a} = r_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_6) \tag{26}$$

$$r_{0b} = r_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_6) \tag{27}$$

$$r_{0c} = r_3(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_6) \tag{28}$$

$$r_{0d} = r_4(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_6) \tag{29}$$

可通过分离变量的方法降低姿态方程的次数，这里利用机器人机构的四元数方程特性进行反解。再看式（20）的末端姿态四元数，实部和虚部互为相反数，且式（26）～（29）是 4 个方程解 3 个变量。又由于方程式右边各项变量次数相同，若方程式左边为 0，则可将正弦函数和余弦函数简化统一为正切函数。通过以上分析，可对式（26）～（29）进行合并简化，以方便求解。将式（27）～（29）分别与式（26）

相加，相加后的方程常数项为 0，得出 3 个方程

$$r_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6)+r_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6)=0 \tag{30}$$

$$r_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6)+r_3(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6)=0 \tag{31}$$

$$r_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6)+r_4(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_6)=0 \tag{32}$$

关节变量 θ_1、θ_2、θ_3 已经求出，式(26)～(29)这 4 个姿态方程有 3 个关节变量 θ_4、θ_5、θ_6。但相同的变量分布在正弦函数和余弦函数之中，通过上述合并简化，将方程简化为式(30)～(32)，变量统一为 1 个正切函数，通过这种方法，将很容易反解出关节变量 θ_4、θ_5、θ_6。

通过以上运动学反解方法，降低了运动学模型非线性问题的难度，可以较容易得出准确的关节变量 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4、θ_5、θ_6 反解结果。

3.3　数值解和位姿图

根据位置和姿态方程，反解出关节变量 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4、θ_5、θ_6 的解，得出了 8 组位姿解，所求结果见表 2 所示。

表 2　PUMA 机器人的位姿反解结果

Tab.2　Results of inverse kinematics for PUMA robot

(°)

序号	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
1	90	0	270	45	0	-45
2	90	0	270	-135	0	135
3	289.56	182.69	270	-82.471	-19.739	-97.993
4	289.56	182.69	270	97.529	19.739	82.007
5	289.56	180	275.37	-75.237	-20.258	-105.69
6	289.56	180	275.37	104.76	20.258	74.310
7	90	357.31	275.37	0	-2.6810	0
8	90	357.31	275.37	180	2.6810	180

在表 2 中，前 2 组数据 $\theta_5=0$，表明关节轴 4 和轴 6 是重合于一条直线上的奇异状态，解出的 θ_4 和 θ_6 的值满足条件 $\theta_4+\theta_6=0$ 即可。表 1 中所给出的末端位姿中，$\theta_4=\theta_5=\theta_6=0$ 当然也满足条件 $\theta_4+\theta_6=0$，所以表 1 中的关节变量值包含于表 2 中所得出的反解结果中。在表 2 中，根据位置方程式(21)求出了关节变量 θ_1、θ_2、θ_3 的值，根据姿态方程式(25)求出了关节变量 θ_4、θ_5、θ_6 的值，所以关节变量 θ_1、θ_2、θ_3 是用于确定末端的位置，关节变量 θ_4、θ_5、θ_6 是用于确定末端的姿态。从表 2 中的数据还可以看出，位置变量结果有 4 组，每组位置变量值有 2 组姿态变量值与其对应。

根据表 2 反解结果，采用三维建模软件画出 PUMA 机器人的 8 种位姿图，见图 3 所示。在图中测量末端位置和姿态数值，与已知位置和姿态数值完全相同，所以这 8 种反解结果是正确的，这样也证明了所提出运动学反解 D－H 四元数方法的正确性。

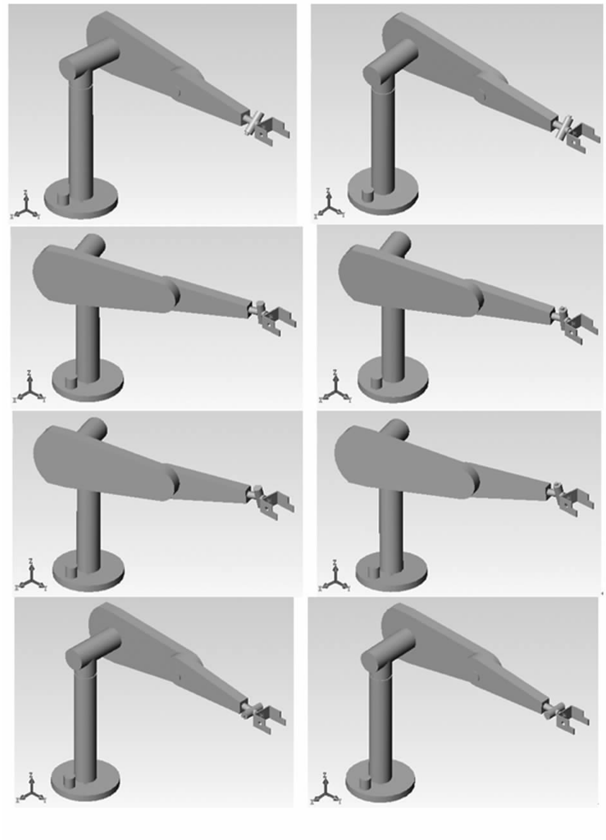

图 3　PUMA 机器人位姿

Fig.3　Positions and postures of PUMA robot

4　结论

（1）提出了串联机构运动学反解的 D－H 四元数方法，这种方法具有明确的几何意义，反解过程和步骤清晰且简单，易于机械化实现，是一种实用的串联机构运动学反解新方法。

（2）给出了包含 D－H 参数的运动学数学模型的四元数变换通用方程式，提出了将四元数变换方程式分离为位置和姿态两个方程式的方法，使四元数方法能适合 4R 以上串联机构运动学反解，解决了四元数在机构运动学反解中的数学建模问题。

（3）提出了在 D－H 四元数姿态方程中取半角三角函数中的一半组成新的姿态方程，降低了方程中的次数，通过这种方法降低了方程求解难度，解决了四元数在机构运动学反解中的求解问题。

（4）采用所提出的 D－H 四元数方法对 PUMA 机器人进行运动学反解分析，得到了该机器人的 8 组反解结果。建立了 PUMA 机器人的 8 个位姿的三维模型，并测量了 PUMA 机器人末端位姿数值，与所给末端位姿数值完全相同。通过对 PUMA 机器人进行运动学反解分析，验证了所提出的串联机构运动学反解的 D－H 四元数方法是一种正确和有效的方法。

参 考 文 献

1 廖启征．连杆机构运动学几何代数求解综述[J]．北京邮电大学学报，2010，33(4)：1 - 11．
Liao Qizheng. Geometry algebra method for solving the kinematics of linkage mechanisms[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2010, 33(4): 1 - 11. (in Chinese)

2 廖启征，梁崇高，张启先．空间 7R 机构位移分析的新研究[J]．机械工程学报，1986，22(3)：1 - 9．
Liao Qizheng, Liang Chonggao, Zhang Qixian. A novel approach to the displacement analysis of general spatial 7R mechanism[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 1986, 22(3): 1 - 9. (in Chinese)

3 廖启征．空间机构（无球面副）位移分析的酉交矩阵法[D]．北京：北京航空航天大学，1987．

4 Qiao S, Liao Q, Wei S, et al. Inverse kinematic analysis of the general 6R serial manipulators based on double quaternions[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(2): 193 - 199.

5 Gan D, Liao Q, Wei S, et al. Dual quaternion-based inverse kinematics of the general spatial 7R mechanism[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2008, 222(8): 1593 - 1598.

6 王庆贵．四元数变换及其在空间机构位移分析中的应用[J]．力学学报，1983，15(1)：54 - 61．
Wang Qinggui. Quaternion transformation and its application to the displacement analysis of spatial mechanisms[J]. Acta Mechanica Sinica, 1983, 15(1): 54 - 61. (in Chinese)

7 肖尚彬．四元数矩阵的乘法及其可易性[J]．力学学报，1984，16(2)：159 - 166．
Xiao Shangbin. Multiplication of quaternion matrixes and its commutativity[J]. Acta Mechanica Sinica, 1984, 16(2): 159 - 166. (in Chinese)

8 肖尚彬．多刚体开链系统运动的四元数算法[J]．固体力学学报，1985，6(4)：507 - 512．
Xiao Shangbin. The quaternion algorithm for multi-system of rigid bodies with open chains[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1985, 6(4): 507 - 512. (in Chinese)

9 王庆贵．三种运动学方程的同构关系[J]．力学学报，1989，21(1)：122 - 126．
Wang Qinggui. Isomorphic relation of the kinematical equations for three kinds of parameters[J]. Acta Mechanica Sinica, 1989, 21(1): 122 - 126. (in Chinese)

10 王庆贵．四元数乘法的结构张量与四元数矩阵的张量表示[J]．力学学报，1995，27(6)：702 - 710．
Wang Qinggui. Structure tensor of quaternion multiplication and tensor expressions of quaternion matrices[J]. Acta Mechanica Sinica, 1995, 27(6): 702 - 710. (in Chinese)

11 刘俊峰．三维转动的四元数表述[J]．大学物理，2004，23(4)：39 - 43，62．
Liu Junfeng. Three dimensional rotation represented by quaternion[J]. College Physics, 2004, 23(4): 39 - 43, 62. (in Chinese)

12 黄昔光，廖启征，李端玲，等．基于四元数的台体型 5SPS - 1CCS 并联机器人位置正解分析[J]．机械工程学报，2007，43(5)：8 - 13．
Huang Xiguang, Liao Qizheng, Li Duanling, et al. Forward displacement analysis of generalized 5SPS - 1CCS parallel robot mechanism based on quaternion[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(5): 8 - 13. (in Chinese)

13 李保坤，曹毅，张文祥，等．基于四元数的 Stewart 机构姿态奇异与姿态空间研究[J]．机械设计与研究，2007，23(6)：31 - 33，37．
Li Baokun, Cao Yi, Zhang Wenxiang, et al. Orientation-singularity and orientation-workspace analyses of Stewart platform using unit quaternion[J]. Machine Design and Research, 2007, 23(6): 31 - 33, 37. (in Chinese)

14 Hu Chao, Meng Max Q H, Mandal Mrinal, et al. Robot rotation decomposition using quaternions[C] // Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, 2006: 1158 - 1163.

15 Denavit J, Hartenberg R S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices[J]. Journal of Applied Mechanics, 1995, 22(6): 215 - 221.

16 熊有伦，丁汉，刘恩沧．机器人学[M]．北京：机械工业出版社，1993．

17 石赫．机械化数学引论[M]．长沙：湖南教育出版社，1998．

18 刘木兰．Grobner 基理论及其应用[M]．北京：科学出版社，2000．

19 张纪元，沈守范．多项式的整除与结式消元[J]．南京理工大学学报，1994，18(4)：23 - 27．
Zhang Jiyuan, Shen Shoufan. Polynomial integral division and elimination by eliminant[J]. Journal of Nanjing University of Science and Technology, 1994, 18(4): 23 - 27. (in Chinese)

20 Paul Richard P, Shimano Bruce, Mayer Gordon E. Kinematic control equations for simple manipulators[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1981, 11(6): 449 - 455.

21 Lee C S G, Ziegler M. Geometric approach in solving inverse kinematics of PUMA robots[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1984, 20(6): 695 - 706.

D－H Quaternion Method for Inverse Kinematics of Serial Mechanisms

Zhang Zhonghai　Li Duanling
(*School of Automation*, *Beijing University of Posts and Telecommunications*, *Beijing* 100876, *China*)

Abstract: The normal quaternion method of inverse kinematics of serial mechanisms has the limitation of lacking equations and is difficult to solve. In order to solve these problems and put forward a new method of inverse kinematics of serial mechanisms, a D－H quaternion method for inverse kinematics of serial mechanisms is proposed. The general equation of quaternion transformation including D－H parameters was given first. Two equations of position and posture were obtained by separating the general equation of quaternion transformation. By these two equations, an equation system with seven equations was constructed, which met the number requirement of the equations for inverse kinematics of serial mechanisms with more than four degrees of freedom. In order to lower the difficulty in solving equations, the degree of posture equation was reduced to half by taking half of the trigonometric function in the original posture equation to construct a new posture equation. By using the proposed D－H quaternion method, the inverse kinematics of PUMA robot was analyzed, and eight groups of inverse solutions were obtained. Three dimensional models of PUMA robot were established based on the eight groups of inverse solutions. Measured results of end positions and postures in the three dimensional models are consistent with the given values. The example of PUMA robot shows the correctness and validity of the proposed D－H quaternion method.

Key words: Serial mechanism　Inverse kinematics　D－H quaternion　PUMA robot

(上接第 287 页)

Precision Reverse Design of Numerical Controlled (NC) Machine on the Basis of Multibody Theory

Xing Yuan　Zhang Lianhong　He Baiyan　Wang Shuxin
(*Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design*, *Ministry of Education*,
Tianjin University, *Tianjin* 300072, *China*)

Abstract: Usually machine geometry precision design is preformed depending on human experience but not reference data form design theory. To learn numerical effect an approximate model of relationship between machine geometry precision and product machining precision is provided based on multibody theory. The analysis results by Monte Carlo sampling would deduce geometry precision of each axis in machine. Taking geometry precision design of spiral bevel gear milling machine as an example, the approximate model well explains effect of machine geometry error on gear product surface machining quality by explicit. Then geometry precision of each axis is obtained by mapping from tooth surface machining precision.

Key words: Multibody theory　NC machining　Geometry precision　Machining precision　Reverse design