

# 机械结合部等效材料参数建立与试验\*

石坤 宋俐 师俊平

(西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048)

**摘要:** 针对目前机械结合部特性研究成果通用性差的问题,提出了一种机械结合部等效材料参数模型。基于 GW 接触模型和 Hertz-Mindilin 接触理论,由机械结合部试验获得的结合部单位面积刚度,推导出机械结合部等效材料参数——弹性模量和泊松比。以螺栓连接的机械结构为研究对象,对不同载荷作用下结构变形进行了数值分析,并将分析结果与试验测量结果进行了比较,验证了机械结合部等效材料参数的可行性和准确性。

**关键词:** 结合部 等效材料参数 GW 接触模型

**中图分类号:** TH123 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2014)02-0297-05

## 引言

对机械结合部特性的研究方法目前总体可分为理论计算和试验研究两种,结合部特性理论计算主要是根据统计学理论、分形理论等建立机械结合部接触表面理论模型,从微观层面分析结合部功能属性的变化机理<sup>[1-5]</sup>,由于理论计算模型中存在大量的假设条件与简化,限制了理论解析模型的应用范围;结合部特性试验研究是通过试验将结合部特性从所属的机械结构系统中分离出来,根据测定的试验数据去辨识机械结合部特性参数并进行等效处理,用弹簧-阻尼器、接触单元或虚拟材料等模拟机械结合部特性<sup>[6-8]</sup>,但试验测量时,随机干扰不可避免,结合部特性辨识误差大,且目前研究成果还存在工程应用简便性差等问题。

本文将机械结合部理论计算与试验研究两种方法相结合,基于 GW 接触模型和 Hertz-Mindilin 接触理论,由机械结合部单位面积刚度推导出结合部等效材料参数,并以螺栓连接的机械结构为研究对象,对不同载荷作用下结构变形进行数值分析,并将计算结果与试验测量结果进行比较,以验证结合部等效材料参数的可行性和准确性。

## 1 机械结合部特性影响因素及表达式

### 1.1 影响因素

机械结合部实际上是具有一定厚度的空间区域,是整个结构系统固有性能的变化过渡区<sup>[9]</sup>,如

图 1 所示。机械结合部的特性非常复杂,影响因素多,并多为非线性因素。为了便于分析,将影响机械结合部特性的因素分为<sup>[10]</sup>:①与结构有关的因素,如机械结合部的类型、尺寸和形状等。②与工况有关的因素,如接触压力、界面结合状态和接触面间介质状态等。③与机械结合部固有特性有关的因素,如接触表面的材质、热处理状态、加工方法和表面粗糙度等。机械结合部诸多的影响因素使得要找到一种适用于所有接触界面的、统一的、具有明确物理意义的特征参数的识别方法是不现实的。

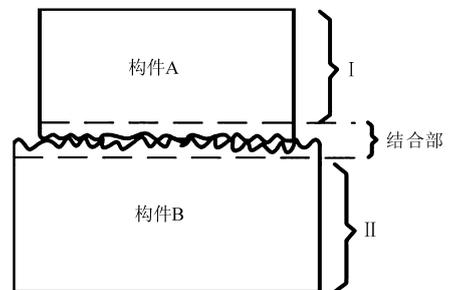


图 1 结合部示意图

Fig. 1 Schematic diagram of joint

对考虑机械结合部特性的组合结构进行分析,建立计算模型时,将结构分为 I、II 和结合部 3 部分,其中 I 部分的特性与构件 A 相同,II 部分与构件 B 相同,结合部是由构件 A 的局部和构件 B 的局部共同组成。

### 1.2 试验拟合公式

机械结合部压力-变形试验如图 2 所示。通过

收稿日期: 2013-02-21 修回日期: 2013-04-01

\* 国家重点基础发展研究计划(973 计划)资助项目(2009CB724406)、国家自然科学基金资助项目(51105304)和陕西省重点学科建设专项资金资助项目(102-00X903)

作者简介: 石坤, 博士生, 主要从事结构力学特性分析与优化设计研究, E-mail: shikun@xaut.edu.cn

试验<sup>[11]</sup>可得到不同结合部材质、加工方法、表面质量及中间介质等条件下机械结合部单位面积法向参数的关系

$$\lambda_n = cp_n^m \quad (1)$$

式中  $p_n$ ——结合部的单位面积法向压力

$c, m$ ——特性常数,与结合部的材质、加工方法、粗糙度、结合面固定和介质等相关,这些条件一定时, $c, m$ 也一定

$\lambda_n$ ——单位面积上的法向变形

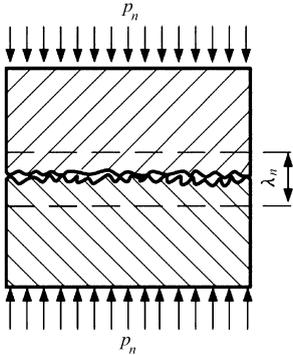


图2 机械结合部压力-变形试验示意图

Fig.2 Loading and displacement of mechanical joint

根据刚度的定义,可求得单位面积法向刚度为

$$k_{nj} = dp_n/d\lambda_n = c^{-1}m^{-1}p_n^{1-m} = a_n p_n^{b_n} \quad (2)$$

式中  $a_n, b_n$ ——机械结合部法向特性参数,由特性常数  $c, m$  确定

同理,可得单位面积的切向刚度为

$$k_{\tau j} = dp_{\tau}/d\lambda_{\tau} = a_{\tau} p_{\tau}^{b_{\tau}} \quad (3)$$

式中  $p_{\tau}$ ——结合部的单位面积切向压力

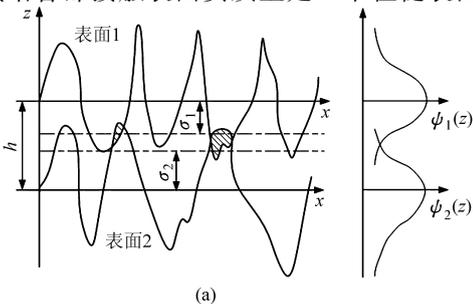
$\lambda_{\tau}$ ——单位面积上的切向变形, $p_{\tau}$  和  $\lambda_{\tau}$  的比例关系与  $p_n$  有关

$a_{\tau}, b_{\tau}$ ——结合部切向特性参数,与接触面压力、结合面材料、润滑方式、加工方法和表面粗糙度等因素有关,由试验测定

## 2 机械结合部等效材料参数及表达式

### 2.1 单峰接触

机械结合部接触表面实质上是 2 个粗糙表面相



接触,当粗糙表面的 2 个粗糙峰接触时,可简化成一个等效曲率半径为  $R$  的球体与一个平面的接触<sup>[12]</sup>,如图 3 所示。当球体在法向载荷  $P$  的作用下与平面接触时,将产生法向接触变形  $\delta$ 。

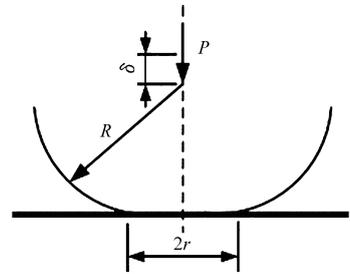


图3 单峰接触图

Fig.3 Contact of single peak

基于 Hertz 接触理论,法向载荷  $P$  与法向接触变形  $\delta$  关系为<sup>[12]</sup>

$$P = \frac{4}{3} E_j R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (4)$$

式中  $E_j$ ——结合部等效材料参数弹性模量

对式(4)求导,可得单个微凸体与平面接触的法向接触刚度为

$$k_n = dP/d\delta = 2E_j R^{\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

根据微凸体变形前的几何关系和分形粗糙度参数  $G$  的典型值<sup>[2]</sup>,可以认为当  $R \gg \delta$  时,微凸体的接触面积为

$$a = \pi R \delta \quad (6)$$

将式(6)代入式(5),可以得到法向接触刚度  $k_n$  与弹性模量  $E_j$  之间的关系为

$$k_n = 2E_j \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (7)$$

### 2.2 多峰接触

机械结合部 2 个粗糙表面实际接触情况如图 4a 所示,根据 GW 接触模型,设两表面粗糙度的均方根分别为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ,等效曲率半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ,  $h$  为中心线之间的距离。这两个粗糙表面的接触可转换为一个具有均方根  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ 、等效曲率半径

$R = \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$  的粗糙表面和一个光滑的刚性表面的

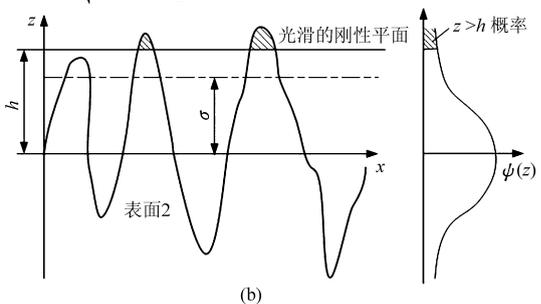


图4 机械结合部两粗糙表面接触图

Fig.4 Contact of two rough surfaces in mechanical joint

接触<sup>[13]</sup>,如图 4b 所示。

在图 4b 中,当中心线之间的距离为  $h$  时,只有轮廓高度  $z > h$  的部分才发生接触。若表面的粗糙峰高度是按照概率密度函数分布的<sup>[9]</sup>,则在概率密度分布曲线中, $z > h$  部分的面积就是表面接触的概率,即

$$P(z > h) = \int_h^\infty \varphi(z) dz \quad (8)$$

如果单位面积上粗糙表面的峰点数为  $n$ ,则参与接触的峰点数为

$$m = n \int_h^\infty \varphi(z) dz \quad (9)$$

各个接触峰点的法向变形量为  $z - h$ , 由式(9)得实际接触面积为

$$A_r = m\pi R(z - h) = n\pi R \int_h^\infty (z - h)\varphi(z) dz \quad (10)$$

接触峰点支承的总载量为

$$W = \frac{4}{3}mE_jR^{\frac{1}{2}}(z - h)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}nE_jR^{\frac{1}{2}} \int_h^\infty (z - h)^{\frac{3}{2}}\varphi(z) dz \quad (11)$$

由式(9)代入式(7),可得单位面积上的法向刚度为

$$k_{nj} = mk_n = 2E_j \sqrt{\frac{ma}{\pi}} = 2E_j \sqrt{\frac{A_r}{\pi}} \quad (12)$$

### 2.3 结合部等效材料参数弹性模量 $E_j$

通常实际粗糙表面的轮廓高度按照高斯分布<sup>[12]</sup>,靠近  $z$  值较大的部分近似于指数型分布。令  $\varphi(z) = \exp(-z/\sigma)$ ,式(10)和(11)可改写为

$$A_r = n\pi R\sigma \exp(-h/\sigma) \quad (13)$$

$$W = \frac{4}{3}nE_jR^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{3}{2}} \exp(-h/\sigma) \quad (14)$$

由式(14)代入式(13),可得

$$A_r = \frac{3W\pi}{4E_j} \sqrt{\frac{R}{\sigma}} \quad (15)$$

由式(15)代入式(12),可得

$$E_j = \frac{k_{nj}^2}{3W} \sqrt{\frac{\sigma}{R}} \quad (16)$$

### 2.4 结合部等效材料参数泊松比 $\mu_j$

在 GW 接触模型中,基于 Hertz-Mindilin 接触理论,结合部的单位面积法向刚度  $k_{nj}$  和单位面积切向刚度  $k_{\tau j}$  分别为<sup>[17]</sup>

$$k_{nj} = D_s \frac{E_j}{1 - \mu_j} R^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \int_h^\infty (z - h)^{\frac{1}{2}} \varphi(z) dz \quad (17)$$

$$k_{\tau j} = D_s \frac{\alpha E_j}{(2 - \mu_j)(1 + \mu_j)} R^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} \int_h^\infty (z - h)^{\frac{1}{2}} \varphi(z) dz \quad (18)$$

式中  $D_s$ ——结合部接触表面的单位面积峰值密度

$\alpha$ ——结合部接触条件相关的参数,

Mindlin<sup>[14]</sup> 和 Johnson<sup>[12]</sup> 研究得到  $\alpha =$

$$2, \text{Sherif}^{[15]} \text{ 研究得到 } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

由式(17)和(18),可得

$$\frac{k_{nj}}{k_{\tau j}} = \frac{2 - \mu_j}{\alpha(1 - \mu_j)} \quad (19)$$

由式(19),可得

$$\mu_j = \frac{\frac{\alpha k_{nj}}{k_{\tau j}} - 2}{\frac{\alpha k_{nj}}{k_{\tau j}} - 1} \quad (20)$$

## 3 算例

螺栓连接机械结构试验台如图 5a 所示,试验简化模型如图 5b 所示,由 I、II、III、IV 4 个构件组成。构件 I、II 均为 45 钢,弹性模量  $E = 2.06 \times 10^{11}$  Pa,泊松比  $\mu = 0.26$ ; I、II 两构件之间接触表面磨削加工,粗糙度  $R_n$  为  $0.8 \mu\text{m}$ ,干接触、无油;构件 I 固定不动;构件 III 为弹簧垫圈,型号为 GB/T 93—12; 构件 IV 为六角头全螺纹螺栓,型号为 GB/T 5781 M12  $\times$  50;螺栓 IV 与构件 II 间隙配合。如图 5c 所示,测试点有 A、B、C 共 3 个,各测试点位于构件 II 上表面。试验中通过转动螺栓 IV 施加载荷,测量各测试点 Z 向变形。

图 6 为螺栓连接的机械结构试验计算模型,将

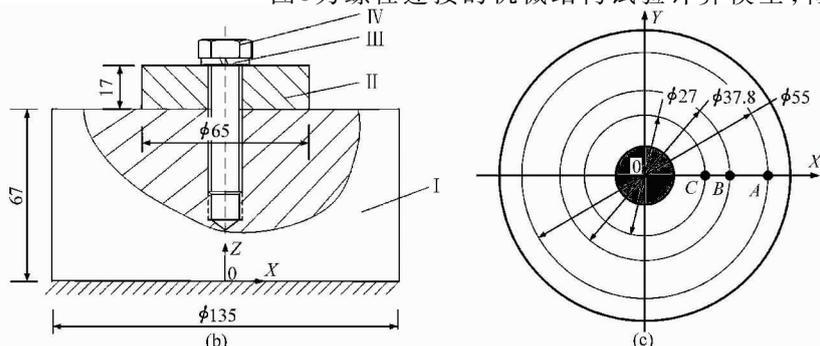
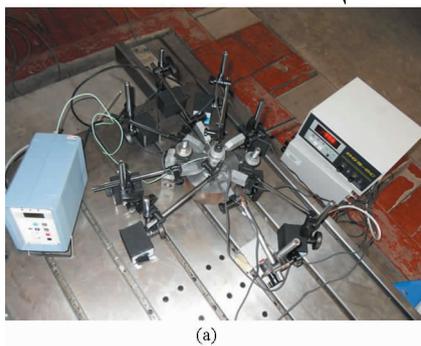


图 5 螺栓连接的机械结构试验

Fig. 5 Test of bolted structure

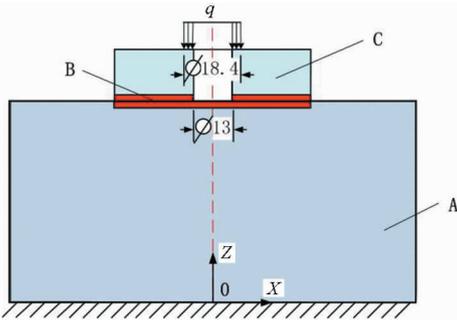


图6 机械结构试验计算模型

Fig.6 Test of the bolted structure

与构件 I 连接的螺栓 IV 部分和构件 I 简化成为一个构件 A, 构件 I 和构件 II 接触部分组成的结合部定义为构件 B, 构件 II 定义为构件 C, 构件 C 的上表面承受环形均布载荷  $q$ 。

图 7 为各测试点 A、B、C 随环形均布载荷  $q$  变化在 Z 向变形量计算值与实测值的对比。从图 7 可以看出, 测试点 A、B、C 在 Z 方向的变形计算值与实测值均非常接近, 且随着载荷的变化各测试点在 Z 向的变形趋势与实际情况也是一致的。

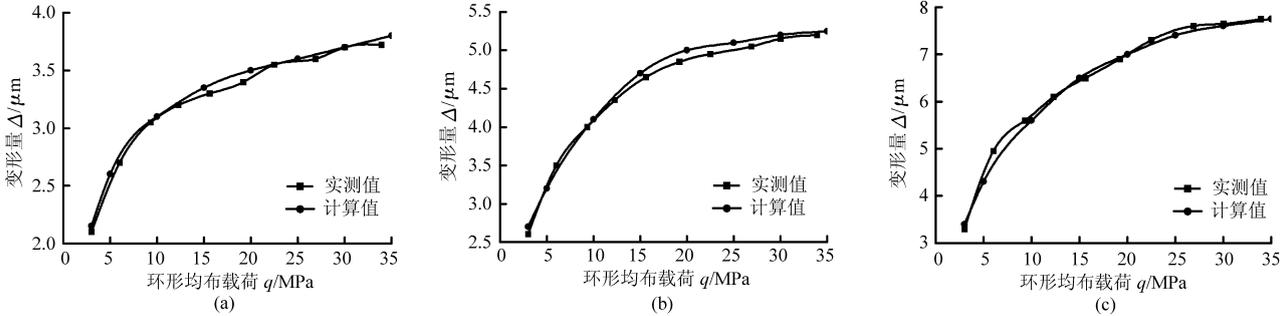


图7 各测试点 Z 向变形量计算值与实测值对比曲线

Fig.7 Calculating and experimental solution of Z direction deflection of test points

(a) 测点 A (b) 测点 B (c) 测点 C

## 4 结束语

将机械结合部特性理论计算和结合部特性试验研究相结合, 基于 GW 接触模型和 Hertz-Mindilin 接触理论, 由机械结合部试验研究获得的单位面积刚

度, 推导出结合部等效材料参数—弹性模量和泊松比。以螺栓连接的机械结构为研究对象, 对不同载荷作用下结构各测试点的变形进行数值计算, 并将计算结果与试验测量结果进行比较, 结果表明, 计算结果和试验结果吻合较好。

## 参 考 文 献

- Greenwood J A, Williamson J B P. Contact of nominally flat surfaces[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1966, 295:300 - 319.
- Majumdar A, Bhushan B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces[J]. ASME Journal of Tribology, 1991, 113(1):1 - 11.
- 张学良, 丁红钦, 兰国生, 等. 基于分形理论的结合面法向接触阻尼与损耗因子模型[J]. 农业机械学报, 2013, 44(6): 287 - 294.  
Zhang Xueliang, Ding Hongqin, Lan Guosheng, et al. Normal contact damping and dissipation factor model of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(6): 287 - 294. (in Chinese)
- 温淑花, 张宗阳, 张学良, 等. 固定结合面刚度分形模型[J]. 农业机械学报, 2013, 44(2): 255 - 260.  
Wen Shuhua, Zhang Zongyang, Zhang Xueliang, et al. Stiffness fractal model for fixed joint interfaces[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2013, 44(2): 255 - 260. (in Chinese)
- 兰国生, 张学良, 丁红钦, 等. 基于分形理论的结合面静摩擦因数改进模型[J]. 农业机械学报, 2012, 43(1): 213 - 218.  
Lan Guosheng, Zhang Xueliang, Ding Hongqin, et al. Modified model of static friction coefficient of joint interfaces based on fractal theory[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2012, 43(1): 213 - 218. (in Chinese)
- Shi X, Polycarpou A A. Investigation of contact stiffness and contact damping for magnetic storage head-disk interface[J]. ASME Journal of Tribology, 2008, 130(2): 021901 - 021909.
- Gonzalez-Valadez M, Baltazar A, Dwyer-Joyce R S. Study of interfacial stiffness ratio of a rough surface in contact using a spring model[J]. Wear, 2010, 268(3 - 4): 373 - 379.
- Tian Hongliang, Li Bin, Liu Hongqi, et al. A new method of virtual material hypothesis-based dynamic modeling on fixed joint interface in machine tools[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2011, 51(3): 239 - 249.
- 温铸诗, 黄平. 界面科学与技术[M]. 北京: 清华大学出版社, 2011.
- 王世军, 黄玉美. 机床整机特性的有限元分析方法[J]. 机床与液压, 2005(3): 20 - 22.

- Wang Shijun, Huang Yumei. Finite element analysis method for global characteristic of machine tools [J]. Machine Tool & Hydraulics, 2005(3):20-22. (in Chinese)
- 11 黄玉美,张广鹏,高峰. 虚拟样机整机结构特性边界元仿真[M]. 北京:机械工业出版社,2004.
- 12 Johnson K L. Contact mechanics[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- 13 Persson B N J. Contact mechanics for randomly rough surfaces[J]. Surface Science Reports, 2006, 61(4):201-227.
- 14 Mindlin R D. Compliance of elastic bodies in contact[J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1948, 16(3):259-264.
- 15 Sherif H A, Abu Omar T M. Interface properties due to microslip from vibration measurement[J]. ASME Journal of Tribology, 2001, 123(1):230-233.

## Establishment and Experiment of Mechanical Joint Equivalent Material Properties

Shi Kun Song Li Shi Junping

(School of Mechanical and Precise Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

**Abstract:** In order to improve the commonality of research findings in the mechanical joint properties, the equivalent material properties of the mechanical joints were proposed. Based on GW contact model and Hertz-Mindilin contact theory, the Young's modulus and the Poisson's ratio of the equivalent material properties were deduced by the stiffness per unit area in the joint, which was obtained by the experiment. A bolted structure was taken as the example. The deformation of the structure was measured and analyzed under the different loads, which including the deformation of the structure's joints. The comparison between the results of calculation and experiment validated the feasibility and effectiveness of the equivalent material properties of the mechanical joints.

**Key words:** Joint Equivalent material properties GW contact model