

doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2013.05.051

# 考虑杆件弹性变形的改进型 Delta 并联机构刚度特性分析\*

徐东涛<sup>1,2</sup> 孙志礼<sup>2</sup> 于晓光<sup>1</sup>

(1. 辽宁科技大学机械工程与自动化学院, 鞍山 114051; 2. 东北大学机械工程与自动化学院, 沈阳 110004)

**摘要:** 基于传统的机构刚度映射矩阵, 建立了改进型 Delta 并联机构的刚度模型。模型不仅考虑了驱动铰链刚度和外载荷对机构刚度的影响, 还考虑了构件重力和在约束力下杆件弹性变形对刚度的影响, 更具有一般性和精确性。由于用刚度矩阵来评价机构刚度性能不够直观, 提出了以机构弹性变形来评价机构刚度特性的方法。利用虚功原理计算出机构各个约束铰链上静态约束力, 利用叠加原理计算出每个杆件约束反力和重力作用下的弹性变形量。然后, 通过坐标变换法计算出机构的综合弹性变形量, 进而分析了机构的刚度特性。

**关键词:** 改进型 Delta 机构 刚度映射 刚度特性 弹性变形 坐标变换法

**中图分类号:** TP242.2; TH122 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2013)05-0294-05

## Stiffness Characteristic Analysis of Modified Delta Parallel Mechanism Based on Bars' Elastic Deformation

Xu Dongtao<sup>1,2</sup> Sun Zhili<sup>2</sup> Yu Xiaoguang<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical Engineering and Automation, University of Science and Technology Liaoning, Anshan 114051, China)

(2. School of Mechanical Engineering and Automation, Northeastern University, Shenyang 110004, China)

**Abstract:** Based on the traditional stiffness mapping matrix, a stiffness mapping model of modified Delta mechanism was established. The model considered both the influence of stiffness of active joints and external load and the influence of gravities factor and all parts' elastic deformation under the constraint force on the mechanism stiffness so that it was more general and exact than any other stiffness models. Evaluating the stiffness characteristic of parallel mechanism by stiffness matrix form was not intuitive. An idea was proposed to evaluate the stiffness performance by the elastic deformation of the mechanism. The static constrained forces of all joints were calculated by using the principle of virtual work. The elastic deformation under the constrained force and gravity was calculated by superposition principle. At last, the comprehensive elastic deformation of the mechanism was obtained by coordinate transformation method. The stiffness characteristic of the mechanism was further analyzed.

**Key words:** Modified Delta mechanism Stiffness mapping Stiffness characteristic Elastic deformation Coordinate transformation method

### 引言

并联机构刚度<sup>[1]</sup>是末端操作器在外力作用下, 由于弹性元件变形引起位移大小的度量。现有机构的刚度分析方法大致可分为有限元分析法<sup>[2~3]</sup>和模型解析法<sup>[4]</sup>。有限元分析法计算简便, 精确度较

高, 但工作量大。刚度解析模型是指机构的操作力和末端变形之间的映射。Gosselin<sup>[4]</sup>依据虚功原理, 给出了平面和空间机构操作力与末端变形间映射的建立方法。在此基础上, 刚度解析逐步向精度高、考虑因素全面的方向发展。李树军等<sup>[5]</sup>考虑结构位形变化和外力影响, 对并联机构刚度特性进行了分

收稿日期: 2013-01-11 修回日期: 2013-02-27

\* 国家科技重大专项资助项目(2009ZX04014-014)

**作者简介:** 徐东涛, 讲师, 东北大学博士生, 主要从事工业机器人研究, E-mail: xudongtao@sohu.com

**通讯作者:** 孙志礼, 教授, 博士生导师, 主要从事机械可靠性工程 and 智能设计研究, E-mail: zhlsun@mail.neu.edu.cn

析。赵铁石等<sup>[6-7]</sup>通过引入机构的二阶影响矩阵推导了精度较高的并联机构刚度非线性映射。

Delta 并联机构<sup>[8]</sup>由 Clavel R 提出,是一种具有 3 个平动自由度的高速并联机构,它的最大缺点就是存在多个球铰,加工难度大,精度难以保证。Tsai L W 发明了一种改进型 3 自由度 Delta 并联机构<sup>[9-11]</sup>,该机构的最大特点是各运动副均是转动副,刚度高,承载能力大,在工业领域具有很好的应用前景。

本文以改进型 Delta 并联机构为研究对象,在传统的刚度模型基础上,增加主动、被动关节的弹性变形和部件重力对机构刚度的影响,以便所得结果更具有一般性和精确性。

### 1 改进型 Delta 机构描述

改进型 Delta 机构是由运动平台、固定平台及连接两个平台的 3 个相同的支链组成,  $A_i B_i C_i (i=1, 2, 3)$  为机构的任意分支,每个支链的主动臂(臂长为  $a$ )和固定平台,主动臂和从动臂(臂长为  $c$ ),从动臂和运动平台分别是由 3 个互相平行的转动副连接而成,从动臂各杆件也是由转动副连接,  $u_i, w_i$  分别是主、从动臂方向单位矢量。运动平台中心  $P$  点坐标值为  $(x, y, z)$ 。每个支链按等边三角形配置,其外接圆半径  $OA_i$  和  $PC_i$  分别为  $r_1$  和  $r_2$ 。如图 1 所示。

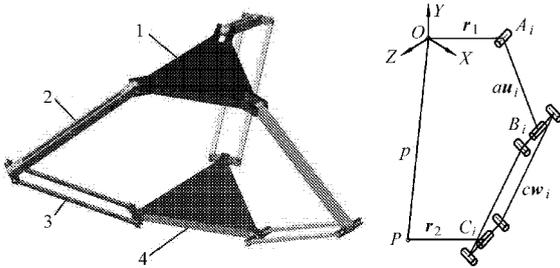


图 1 机构模型及运动支链描述

Fig. 1 Mechanical model and description of kinematics chain

1. 固定平台 2. 主动臂 3. 从动臂 4. 运动平台

运动中主动臂、从动臂旋转角度分别为  $\theta_{1i}, \theta_{2i}$ ; 从动臂摆角为  $\theta_{3i}$ 。全局坐标系  $OXYZ$ , 简记为  $\{O\}$ , 设在固定平台中心处。如图 2 所示。

设在第  $i$  支链上  $A_i$  点的坐标系为  $A_i X_i Y_i Z_i$ , 简记为  $\{A_i\}$ ,  $\{A_i\}$  是  $\{O\}$  绕着  $Y$  轴旋转  $\beta_i$  形成的, 它们间的变换矩阵为  ${}^O R_{A_i}$ ; 坐标系  $\{A_i\}$  绕  $Z$  旋转  $\theta_{1i}$  形成坐标系  $\{B_i\}$ , 它们间的变换矩阵为  ${}^{A_i} R_{B_i}$ ; 坐标系  $\{A_i\}$  绕  $Z$  旋转  $\theta_{1i} + \theta_{2i}$  形成坐标系  $\{D_i\}$ , 它们之间的变换矩阵为  ${}^{A_i} R_{D_i}$ ; 坐标系  $\{D_i\}$  绕  $Y$  旋转  $\pi/2 - \theta_{3i}$  形成坐标系  $\{C_i\}$ , 它们间的变换矩阵为  ${}^{D_i} R_{C_i}$ 。并联机构的位姿正、反解计算, 运动学研究已经很成熟<sup>[12-13]</sup>, 本文不再赘述。

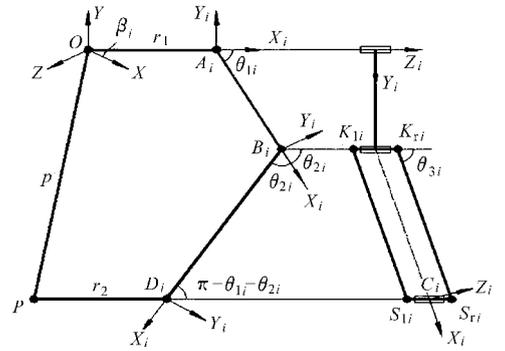


图 2 单链坐标系

Fig. 2 Coordinate system of each chain

### 2 速度与静力分析

#### 2.1 雅可比矩阵

机构的雅可比矩阵是主动臂输入角速度与运动平台速度间的映射矩阵

$$v = J \dot{q} \quad (1)$$

式中  $J$ ——机构的雅可比矩阵  
 $v$ ——机构运动平台质心点速度向量  
 $\dot{q}$ ——主动臂的输入角速度合成向量

#### 2.2 各关节和构件质心点的速度映射

主动臂质心点的速度映射可表示为

$$v_{1i} = {}^O R_{A_i} \begin{bmatrix} \frac{a}{2} \sin \theta_i & \frac{a}{2} \cos \theta_i & 0 \end{bmatrix}^T \Psi_i \dot{q} = J_{Y1i} \dot{q} \quad (i=1, 2, 3) \quad (2)$$

其中  $\Psi_1 = [1 \ 0 \ 0]$   $\Psi_2 = [0 \ 1 \ 0]$   $\Psi_3 = [0 \ 0 \ 1]$

式中  $J_{Y1i}$ ——机构主动臂输入角速度到主动臂质心点速度的映射矩阵

${}^O R_{A_i}$ ——坐标系  $\{A_i\}$  到  $\{O\}$  的转换矩阵

关节  $B_i$  处的速度映射为

$$v_{B_i} = 2v_{1i} = J_{A_i} \dot{q} \quad (i=1, 2, 3) \quad (3)$$

式中  $J_{A_i}$ ——机构主动臂输入角速度到被动铰链  $B_i$  速度的映射矩阵

从动臂质心点速度映射可表示为

$$v_{2i} = \frac{v + v_{B_i}}{2} = \frac{J + J_{A_i}}{2} \dot{q} = J_{Y2i} \dot{q} \quad (i=1, 2, 3) \quad (4)$$

式中  $J_{Y2i}$ ——机构主动臂输入角速度到从动臂质心点速度的映射矩阵

#### 2.3 平衡驱动力

机构各主动臂的驱动力矩合成向量为  $\tau_\theta = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ , 主动臂、从动臂的重力分别为  $G_1, G_2$ , 运动平台的重力为  $G$ , 组成从动臂的从动杆  $S_i K_i$  重力为  $G_3$ , 运用虚功原理可得驱动方程

$$\tau_\theta = J^T (F + G) + \sum_{i=1}^3 (J_{Y1i}^T G_1) + \sum_{i=1}^3 (J_{Y2i}^T G_2) \quad (5)$$

式中  $F$ ——机构的外载荷

### 2.4 运动副的约束反力

在机构的第  $i$  分支  $C_i$  处,把运动平台与从动臂的运动副拆开,该分支  $C_i$  处的约束力为  $F_{3i} = (F_{3ix}, F_{3iy}, F_{3iz})$ ,应用虚位移原理得到

$$F_{3i}^T \delta X = \tau_i \delta \theta_i - G_1^T \delta X_{1i} - G_2^T \delta X_{2i} \quad (i=1,2,3) \quad (6)$$

式中  $\delta X_{1i}, \delta X_{2i}$ ——主、从动臂质心的虚位移向量  
 $\delta \theta_i$ ——第  $i$  支链主动臂的虚转角位移

结合力矩平衡条件可得运动副  $B_i, C_i$  处约束力  $F_{2i}$  和  $F_{3i}$ 。

在坐标系  $\{C_i\}$  中,从动杆两端约束反力左侧为  $F_{3cil}$  和  $F_{2cil}$ ,右侧为  $F_{3cir}$  和  $F_{2cir}$ 。在静平衡状态下,约束反力和杆件自身重力形成平衡力系。 $S_{li}, K_{li}$  与  $G_3$  构成力作用平面,如图3所示。

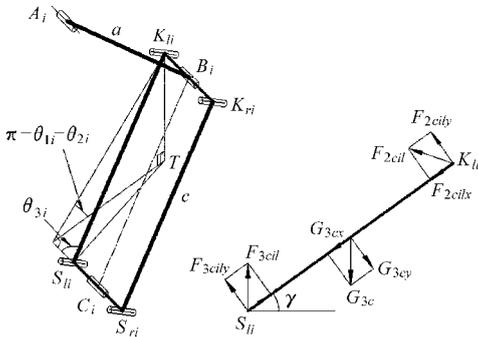


图3 单个杆件受力分析简图  
 Fig.3 Force analysis of a bar

根据左侧从动杆力作用面内平衡条件,可得到约束反力的  $Y$  轴方向分量

$$F_{3cily} = F_{2cily} = G_{3cy}/2 = |G_{3c}| \cos \gamma \quad (i=1,2,3) \quad (7)$$

式中  $\gamma$ ——力作用面中杆件的倾角

在坐标系  $\{O\}$  中,运动副  $C_i$  处会产生力矩

$$M_i = F_{3ir} \times^o R_{ai} \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T - F_{3il} \times^o R_{ai} \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T \quad (i=1,2,3) \quad (8)$$

$$且 \quad F_{3ir} = F_{3i} - F_{3il} \quad (i=1,2,3) \quad (9)$$

当从动杆间距为  $r_3$  时,由运动平台力矩平衡得

$$\sum_{i=1}^3 M_i = \sum_{i=1}^3 (F_{3i} \times^o R_{ai} [r_3 \ 0 \ 0]^T) \quad (10)$$

将式(7)~(9)代入式(10)中,整理后可以得到含有3个未知数  $F_{3il}$  的3个方程,解上述方程,可求出  $S_{li}$  点和  $S_{ri}$  点 R 副上的约束力。

## 3 机构刚度分析

### 3.1 传统的并联机构守恒转换刚度矩阵

根据文献[5],并联机构的守恒转换刚度矩阵为

$$K = J^{-T} (K_f + K_a) J^{-1} \quad (11)$$

$$其中 \quad K_f = -\frac{dJ^T}{d\theta} F = -\begin{bmatrix} \frac{dJ^T}{d\theta_1} F & \frac{dJ^T}{d\theta_2} F & \frac{dJ^T}{d\theta_3} F \end{bmatrix}$$

式中  $K$ ——机构的刚度矩阵

$K_a$ ——主动关节刚度矩阵

$K_f$ ——外力(力矩)作用下的机构几何变形产生的刚度矩阵

此时,机构的刚度矩阵不够准确,没有考虑组成机构构件的质量,以及由于关约束反力而产生的杆件弹性变形。

### 3.2 单杆在约束反力和自身重力下的变形分析

杆件末端在约束反力的作用下,发生拉压和弯曲弹性变形,如图4所示。

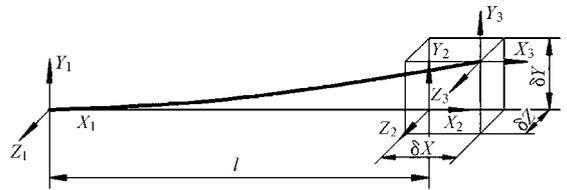


图4 单个杆件弹性变形图

Fig.4 Deformation at tip of link

约束力产生的轴向变形和挠曲变形分别为

$$\begin{cases} \delta x_1 = \frac{l}{EA} F_x \\ \delta y_1 = \frac{l^3}{3EI_y} F_y \\ \delta z_1 = \frac{l^3}{3EI_z} F_z \end{cases} \quad (12)$$

式中  $E$ ——杆件的弹性模量

$A$ ——杆件的横截面积

$l$ ——杆件的长度

$I_y, I_z$ ——杆件截面惯性矩

同理,作用在杆件质心处的重力可分解为轴向的  $G_x$  和径向的  $G_y, G_z$ ,该力产生的轴向变形和挠曲变形分别为

$$\begin{cases} \delta x_2 = \frac{l}{2EA} G_x \\ \delta y_2 = \frac{5l^3}{48EI_y} G_y \\ \delta z_2 = \frac{5l^3}{48EI_z} G_z \end{cases} \quad (13)$$

由式(12)、(13)可得到杆件由约束反力和自身重力产生的柔度矩阵

$$C_1 = \begin{bmatrix} l/(EA) & 0 & 0 \\ 0 & l^3/(3EI_y) & 0 \\ 0 & 0 & l^3/(3EI_z) \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} L/(2EA) & 0 & 0 \\ 0 & 5l^3/(48EI_y) & 0 \\ 0 & 0 & 5l^3/(48EI_z) \end{bmatrix} \quad (15)$$

### 3.3 机构在约束反力和自身重力下的刚度分析

根据改进型Delta机构的结构特点,结合式(12)~(15),再利用坐标变换法求出从动臂在{O}中的各个因素产生的刚度。主动臂在约束反力和自身重力下的刚度为

$$K_{2i} = {}^{ai}R_o^{-1} {}^{bi}R_{ai}^{-1} (C_{21}^{-1} + C_{22}^{-1}) {}^{bi}R_{ai} {}^{ai}R_o \quad (i=1,2,3) \quad (16)$$

式中  $C_{21}$ 、 $C_{22}$ ——主动臂约束反力、重力作用下的柔度矩阵

从动臂在约束反力和自身重力下的刚度为

$$K_{3i} = {}^{ai}R_o^{-1} {}^{di}R_{ai}^{-1} (C_{31}^{-1} + C_{32}^{-1}) {}^{di}R_{ai} {}^{ai}R_o \quad (i=1,2,3) \quad (17)$$

式中  $C_{31}$ 、 $C_{32}$ ——从动杆约束反力、重力作用下的柔度矩阵

根据式(16)、(17),主、从动臂弹性变形刚度对机构刚度矩阵的影响为

$$\begin{cases} K_b = \sum_{i=1}^3 J^{-T} J_{\lambda i}^T K_{2i} J_{\lambda i} J^{-1} \\ K_c = \sum_{i=1}^3 K_{3i} \end{cases} \quad (18)$$

于是,考虑机构构件自身重力和关约束反力作用下机构弹性变形的影响,以及机构外力和主动关节刚度对刚度的影响,机构运动平台的自重对机构刚度影响可以看作作用在质心的外力对机构刚度的影响,则机构的刚度为

$$K = J^{-T} (K_f + K_a + K_b + K_c) J^{-1} \quad (19)$$

### 4 机构刚度性能评价

刚度矩阵  $K$  作为矩阵形式来评估刚度大小不够直观。根据机构刚度的定义,可以以末端操作器在外力作用下的位移大小来评价机构的刚度特性。

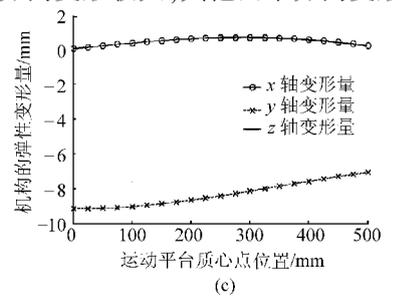
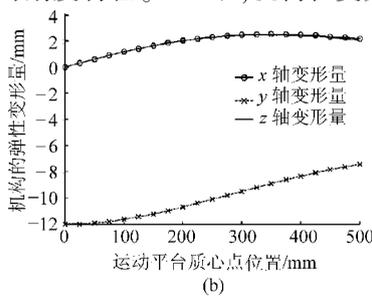
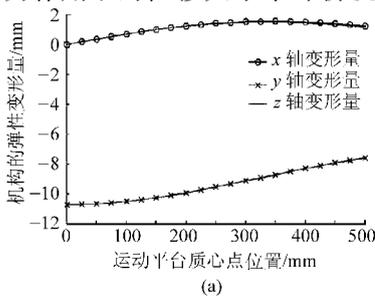


图5 工作空间内不同位置机构的刚度性能

Fig. 5 Stiffness characteristic of mechanism with different positions in workspace

(a)  $y = -1\ 000\ \text{mm}, z = x$  (b)  $y = -800\ \text{mm}, z = x$  (c)  $y = -1\ 200\ \text{mm}, z = x$

当不考虑机构主、被动关节刚度产生末端位移时,整个机构的位移主要是由各个杆件受力后产生的弹性变形引起的。

根据叠加原理及式(12)、(13),单个杆件在受到末端约束反力  $F_i$  和自身重力  $G_i$  作用下的弹性变形为

$$\delta X_i = C_1 F_i + C_2 G_i \quad (i=1,2,3) \quad (20)$$

根据式(20),在坐标系{O}中,任意支链两个并联从动杆的弹性变形为

$$\delta X_{3ci} = {}^{ai}R_o^{-1} {}^{di}R_{ai}^{-1} {}^{ci}R_{di}^{-1} \cdot (C_{31} F_{3cil} + C_{31} F_{3cir} + 2C_{32} G_{3c})/2 \quad (i=1,2,3) \quad (21)$$

同理,主动臂在坐标系{O}中的弹性变形为

$$\delta X_{2bi} = {}^{ai}R_o^{-1} {}^{bi}R_{ai}^{-1} (C_{21} F_{2bi} + C_{22} G_{1b}) \quad (i=1,2,3) \quad (22)$$

式中  $F_{2bi}$ 、 $G_{1b}$ ——在坐标系{B}中主动臂受到的约束反力和重力

结合式(20)~(22),可以得出机构在坐标系{O}中运动平台质心点的弹性变形为

$$\delta X = \sum_{i=1}^3 (\delta X_{2i} + \delta X_{3i})/3 \quad (23)$$

### 5 数值算例

改进型Delta机构结构参数: $r_1 = r_2 = 500\ \text{mm}$ ,  $a = c = 1\ 000\ \text{mm}$ ,从动杆间距  $r_3 = 100\ \text{mm}$ ,运动平台、主动臂、从动臂、从动杆的质量分别为  $m = 27.385\ 8\ \text{kg}$ 、 $m_1 = 7.183\ 6\ \text{kg}$ 、 $m_2 = 6.484\ 2\ \text{kg}$ 、 $m_3 = 3.168\ 6\ \text{kg}$ 。机构的弹性模量  $E = 2.07 \times 10^5\ \text{N/mm}^2$ ,主动臂和从动杆的截面面积分别是  $A_1 = 900\ \text{mm}^2$ 、 $A_2 = 400\ \text{mm}^2$ 。主动臂、从动杆截面惯性矩分别为  $I_1 = 67\ 500\ \text{mm}^4$ 、 $I_2 = 13\ 333\ \text{mm}^4$ 。

为考核机构不同状态下的刚度特性,当运动平台质心点受到  $F = (0, -500, 0)\ \text{N}$  的外力,在工作空间不同位置机构的弹性变形如图5所示。根据图示,机构在受力方向变形较大,其他两个方向变形几

乎一致,  $y$  向坐标值越大变形越大, 说明机构的伸展状态时刚度较好, 整体刚度与机构位姿有关。

当机构运动平台在  $-1\ 000\ \text{mm}$  平面上运动, 且在运动平台质心点施加  $0 \sim 1\ 000\ \text{N}$  负  $y$  向力

时, 机构的刚度特性如图 6 所示。根据图示, 机构受力越大, 约束反力就越大, 机构弹性变形就越大; 同时, 机构各个构件的重力对机构的刚度有重要影响。

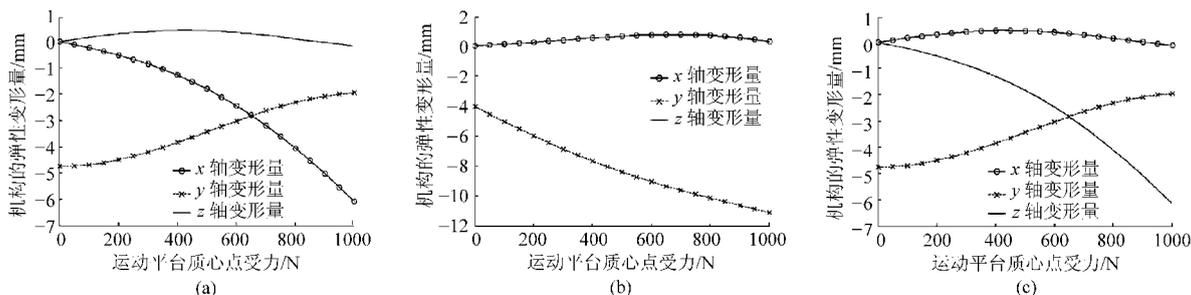


图 6 工作空间内不同载荷时机机构的刚度性能

Fig. 6 Stiffness characteristic of mechanism with different forces in workspace

(a)  $x$  向受力 (b)  $y$  向受力 (c)  $z$  向受力

## 6 结论

(1) 建立了包括机构各个杆件弹性变形在内的改进型 Delta 并联机构刚度模型, 计算出机构在自身重力和关约束力下产生的弹性变形, 并以弹性变形量作为评价机构刚度性能的指标, 该方法在形

式上更为直观、新颖。

(2) 研究表明机构各个构件自身的重力对机构刚度的影响不可忽视; 同时机构刚度与各杆件末端约束力、结构参数、机构位姿有关。得到了不同位姿、不同外力状态下, 机构的弹性变形量, 以此作为评价机构刚度特性指标, 可以对机构的刚度控制提供参考。

## 参 考 文 献

- 熊有伦, 丁汉, 刘恩沧. 机器人学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.
- Piras G, Cleghorn W L, Mills J K. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links[J]. Mechanism and Machine Theory, 2005, 40(7): 849 ~ 862.
- 李嘉, 陈昱, 董怡, 等. 并联柔性铰机器人的静刚度研究[J]. 清华大学学报, 1999, 39(8): 16 ~ 20.  
Li Jia, Chen Ken, Dong Yi, et al. Study on the static stiffness of the parallel flexure joint robot [J]. Journal of Tsinghua University, 1999, 39(8): 16 ~ 20. (in Chinese)
- Gosselin C. Stiffness mapping for parallel manipulators [J]. IEEE Transactions on Robotics and Automation, 1990, 6(3): 377 ~ 382.
- 李树军, Clement Gosselin. 3-RRR 平面并联机构的刚度特性分析[J]. 东北大学学报, 2007, 28(1): 91 ~ 94.  
Li Shujun, Clement Gosselin. Stiffness analysis and stiffness mapping of 3-RRR planar parallel mechanism based on CCT stiffness matrix [J]. Journal of Northeastern University, 2007, 28(1): 91 ~ 94. (in Chinese)
- 赵铁石, 赵延治, 边辉, 等. 空间并联机构连续刚度非线性映射[J]. 机械工程学报, 2008, 44(8): 20 ~ 25.  
Zhao Tieshi, Zhao Yanzhi, Bian Hui, et al. Continuous stiffness nonlinear mapping of spatial parallel mechanism [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(8): 20 ~ 25. (in Chinese)
- 赵延治, 张洁, 赵铁石. 弹性铰平面并联三自由度机器人连续刚度映射研究[J]. 燕山大学学报, 2008, 32(4): 283 ~ 289.  
Zhao Yanzhi, Zhang Jie, Zhao Tieshi. Research on continuous stiffness mapping of planar parallel 3-DOF manipulator with flexible joints [J]. Journal of Yanshan University, 2008, 32(4): 283 ~ 289. (in Chinese)
- Clavel R. Device for the movement and positioning of an element in space: WO, W08703528A1 [P]. 1987-07-18.
- Tsai L W. Multi-degree-of-freedom mechanism for machine tools and the like; US. 5,656,905 [P]. 1997-08-12.
- Tsai L W, Walsh G C, Stamper R E. Kinematics of novel three DOF translational platforms [C] // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minnesota, 1996, 4: 3 446 ~ 3 451.
- Stamper R E, Tsai L W, Walsh G C. Optimization of a three DOF translational platform for well-conditioned workspace [C] // Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation, Minnesota, 1997, 4: 3 250 ~ 3 255.
- Xu Dongtao, Sun Zhili, Shi Jialian. Kinematic analysis and simulation of the translational parallel mechanism [C] // Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Advanced Material Research, Chengdu, 2011: 43 ~ 47.
- 杨启志, 郭宗和, 马履中, 等. 三平移全柔性微动机器人机构的位置运动分析[J]. 农业机械学报, 2006, 37(11): 96 ~ 99.  
Yang Qizhi, Guo Zonghe, Ma Lüzong, et al. Kinematics of a novel 3-DOF translational fully compliant parallel micromanipulator [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2006, 37(11): 96 ~ 99. (in Chinese)