DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.07.014

控制体有限元中插值函数特性比较与算例分析*

宋 宇 曹树良

(清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084)

【摘要】 探讨了求解不可压流动问题的控制体有限元方法,提出了流线 FCBI 构造插值函数的方法,并与传统 FCBI 和推广 FCBI 方法进行比较。选择方腔流动和 S 型管道流动两个经典算例,分析讨论了 3 种插值函数在求解不同流动问题时的共性与特性。结果表明:对对流占优的流动问题,尤其是流动较为复杂的对流占优问题,流线 FCBI 插值函数能更好地描述单元中速度的分布,较其他两种插值函数更容易获得稳定的收敛解;对非对流占优的流动问题,当单元 *Re* 小于 5 时,3 种插值函数均能获得较精确的计算结果,但当单元 *Re* 数较高时,3 种插值函数的精度均较低。

关键词: 不可压流动 控制体 有限元方法 插值函数 管道流

中图分类号: O242.21; O357.1 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-1298(2012)07-0079-06

Comparison of Interpolation Functions in Control Volume Finite Element Method and Numerical Analysis

Song Yu Cao Shuliang

(*State Key Laboratory of Hydroscience and Engineering*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *China*)

Abstract

Control volume finite element method to solve incompressible flow problems was investigated. The streamline FCBI method was built and compared with the original FCBI and general FCBI method. Lid-driven cavity flow and S-channel flow were chosen as the test cases. The similarities and differences among the three interpolation functions were discussed according to the analysis. The results showed that for convection-dominated flow, especially with complex performances, the Streamline FCBI method could better describe the velocity distributions in the element and achieve more stable converged results. For convection-diffusion problems, the precision of all the methods were low when element *Re* was high. From the analysis that for convection-diffusion problems, it is concluded that good results can be achieved by using FCBI methods when element *Re* is less than 5.

Key words Incompressible flow, Control volume, Finite element method, Interpolation function, Channel flow

引言

加权有限元方法可以通过选择不同的权函数和插值函数建立求解方程,当权函数和插值函数取相同形式的时候,称为 Galerkin 有限元方法(Galerkin finite element method,简称 GFEM);当权函数和插值函数取不同形式的时候,称为 Petro – Galerkin 有限元方法。GFEM 能保证整个计算区域的方程守恒,但并不能保证局部方程守恒。Baliga 和 Patankar[1] 在 Petro – Galerkin 方法中,应用阶梯函数作为权函数,首次提出了控制体有限元方法(control volume finite element method,简称 CVFEM),选取带迎风格

收稿日期: 2011-09-21 修回日期: 2011-11-09

* 国家自然科学基金资助项目(51176088)

作者简介: 宋宇,博士生,主要从事流体机械研究,E-mail: songyu07@mails.tsinghua.edu.cn

通讯作者: 曹树良,教授,博士生导师,主要从事流体机械研究,E-mail: caoshl@mail.tsinghua.edu.cn

式的三角形单元求解了对流扩散方程,计算结果与实验吻合很好。CVFEM 不仅具有有限元方法计算灵活的优点,还继承了有限体积法保证局部方程守恒的特性。因此,CVFEM 作为一种不同于有限差分、有限体积和有限元的新的离散方法,得到了广泛关注。Banaszek[2] 分析了 CVFEM 和 GFEM 求解定常对流扩散问题时的误差,结果表明 CVFEM 可以获得更高的精度。Martinez[3] 证明了在线性定常和非定常对流扩散问题计算上,CVFEM 和 GFEM 具有类似的精度,而对于非线性问题,此结论不成立。另一方面,尽管 CVFEM 在求解对流扩散方程时能获得较精确的计算结果,然而对于具有压力耦合项的 Navier - Stokes 方程,其表现出不同于对流扩散方程的性质,尤其在压力梯度变化较大时,会表现出强烈的非线性。在这种情况下,CVFEM 的实用性和准确性还需要进一步研究。Piller 和 Stalio[4] 结合高阶有限元和谱方法有限元,发展了一种高精度的控制体有限元方法求解线性对流扩散方程,为建立求解 Navier - Stokes 方程更通用的方法打下了基础。

Bathe[5] 提出基于流动条件构造插值函数(flow-condition-based interpolation,简称 FCBI)的控制体有限元方法求解 Navier - Stokes 方程,该方法是一种不需要压力修正的控制体有限元方法。在 FCBI 有限元方法中,单元的插值函数由一维对流扩散方程的解析解推导得出,迎风格式通过指数形式引入,不包含任何经验系数,物理意义明确,并具有很好的稳定性[6]。在文献[6]中,Haruhiko 和 Bathe 进一步提出了推广 FCBI 的插值方法,并验证了传统 FCBI 方法和推广 FCBI 方法求解对流扩散方程的稳定性和准确性。本文比较传统 FCBI 方法和推广 FCBI 方法在求解不可压缩流动问题上的性质,结合推广 FCBI 方法的不足,提出流线 FCBI 方法构造插值函数,针对对流占优和非对流占优两种不同类型的流动问题,结合其物理性质分析以上 3 种插值函数的共性与特性。

1　数学模型

1.1　控制方程

在整个计算域 Ω,流体满足 Navier - Stokes 方程。在有限元离散过程中,定义两个速度空间 V_h 和 U_h,对流项中的对流速度应用速度空间 V_h 描述,其他速度应用速度空间 U_h 描述。同时定义压力空间 P_h,权函数空间 W_h 和 Q_h。应用高斯定理,二维不可压流动方程的 Petrov - Galerkin 弱解形式可以表示为:寻找速度矢量 $\boldsymbol{u}_h \in U_h$,$\boldsymbol{v}_h \in V_h$,压力 $p_h \in P_h$,对于所有的权函数 $w_h \in W_h$,$q_h \in Q_h$ 满足

$$\int_S w_h \boldsymbol{n}(\rho \boldsymbol{u}_h \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{u}_h, p_h))\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{1}$$

$$\int_S q_h \boldsymbol{n}(\rho \boldsymbol{u}_h)\,\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{2}$$

其中　$\boldsymbol{u}_h^{\mathrm{T}} = (u_{hx}, u_{hy})$　$\boldsymbol{v}_h^{\mathrm{T}} = (v_{hx}, v_{hy})$

式中　$\boldsymbol{u}_h^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{v}_h^{\mathrm{T}}$——速度空间 U_h 和 V_h 中任意点的速度矢量

S——控制体边界　　ρ——流体密度

$\boldsymbol{\tau}$——应力　　$\boldsymbol{n}$——控制体边界法向向量

计算域的空间离散及连续方程和动量方程的控制体如图 1 所示,其中 r、s 为单元的局部坐标,r、$s \in [0,1]$。

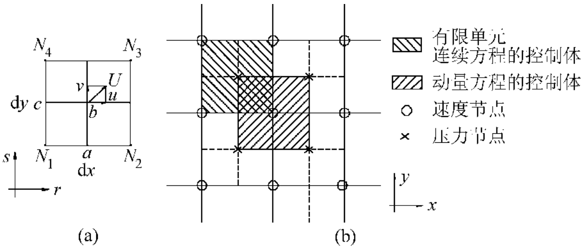

图 1　空间离散

Fig. 1　Domain discretization

(a) 有限单元及单元局部坐标　(b) 连续方程和动量方程的控制体

1.2　速度 $\boldsymbol{u}_h$ 的插值函数

如图 1a 所示,在速度空间 U_h 中,单元内任意点的速度可以表示成

$$u_{hj} = \sum_{i=1}^{4} h_i u_{ij} \quad (j = x, y) \tag{3}$$

式中　u_{ix}、u_{iy}——单元内各节点沿 x 方向和 y 方向的速度

h_i——对应空间内单元插值函数的分量

h_i 可表示为

$$\begin{bmatrix} h_1^u & h_4^u \\ h_2^u & h_3^u \end{bmatrix} = \boldsymbol{h}(r)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(s) \tag{4}$$

其中　$\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\beta) = (1-\beta, \beta)$　$(\beta = r, s)$

压力节点取在单元中心,并假定单元内压力为常数。权函数 w_h 为阶梯函数,在动量方程的控制体内为 1,其他位置为 0。权函数 q_h 也为阶梯函数,在连续方程的控制体内为 1,其他位置为 0。

1.3　对流速度 $\boldsymbol{v}_h$ 的插值函数

1.3.1　传统 FCBI 方法

传统的 FCBI 方法根据一维对流扩散方程的解析解建立单元插值函数,插值函数呈指数格式,不仅与该点的位置有关,而且与单元中各个节点的速度有关。如图 1a 所示,在计算通过 ab 边或 bc 边的流量时,沿 r 或 s 方向引入迎风格式。例如,计算通过 ab 边的流量时,在 r 方向引入指数形式的迎风格式,而在 s 方向引入线性格式,插值函数的分量 h_i^v 可以

表示为

$$\begin{bmatrix} h_1^v & h_4^v \\ h_2^v & h_3^v \end{bmatrix} = (\boldsymbol{h}(m^1), \boldsymbol{h}(m^2))\boldsymbol{h}(s)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(s) \quad (5)$$

$$\begin{cases} m^k = \dfrac{\mathrm{e}^{n^k r} - 1}{\mathrm{e}^{n^k} - 1} \\ n^k = \dfrac{\rho\, \overline{\boldsymbol{u}}^k \Delta \boldsymbol{d}^k}{\mu} \end{cases} \quad (6)$$

其中 $\overline{\boldsymbol{u}}^k$ 是对应线段（当 k 为 1、2 时，分别为 N_1N_2、N_4N_3）中心点的速度，$\Delta\boldsymbol{d}^k$ 为对应线段的长度，n^k 为单元中沿 x 方向的 Re 数。

1.3.2　推广 FCBI 方法

如上所述，传统的 FCBI 方法仅在 r 或 s 的某一方向引入迎风格式，因此无法准确描述单元中复杂的速度分布。推广 FCBI 方法通过在 r 和 s 方向同时引入一维对流扩散方程的解析解建立迎风格式，由此构造的插值函数 h_i^v 可以表示为

$$\begin{bmatrix} h_1^v & h_4^v \\ h_2^v & h_3^v \end{bmatrix} = \boldsymbol{h}(\alpha)\boldsymbol{h}^{\mathrm{T}}(\beta) \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{n^\alpha r} - 1}{\mathrm{e}^{n^\alpha} - 1} \\ \beta = \dfrac{\mathrm{e}^{n^\beta r} - 1}{\mathrm{e}^{n^\beta} - 1} \end{cases}$$

$$n^k = \frac{\rho \overline{\boldsymbol{u}}^k \cdot \Delta \boldsymbol{x}^k}{\mu} \quad (k = \alpha, \beta)$$

$$\begin{cases} \Delta \boldsymbol{x}^\alpha = \dfrac{\Delta \boldsymbol{x}^1 + \Delta \boldsymbol{x}^2}{2} \\ \Delta \boldsymbol{x}^\beta = \dfrac{\Delta \boldsymbol{x}^3 + \Delta \boldsymbol{x}^4}{2} \end{cases}$$

$$\Delta \boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 \quad \Delta \boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_4$$

$$\Delta \boldsymbol{x}^3 = \boldsymbol{x}_4 - \boldsymbol{x}_1 \quad \Delta \boldsymbol{x}^4 = \boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2$$

其中，$\boldsymbol{x}_i$（$i = 1 \sim 4$）为单元中各节点的空间坐标。

该插值函数虽对 FCBI 方法有改进，但在单元的 Re 数比较大时，单元中所有点的速度将只由某一节点的速度决定，无法准确描述迎风效应，此时推广 FCBI 方法失效。

1.3.3　流线 FCBI 方法

许多学者的研究成果表明，迎风效应主要发生在沿流线方向。基于这种思想，结合上述两种方法构造插值函数的基本原理，提出了一种构造插值函数的流线 FCBI 方法。如图 1a 所示，u、v 为单元内的平均速度，建立单元 Re 数（Re_Δ）的概念

$$Re_\Delta = \frac{\rho U \mathrm{d}l}{\mu} \quad (8)$$

其中　$U = \sqrt{u^2 + v^2}$　$\mathrm{d}l = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$

对于空间中任意一点（例如图 2 中的 i_{pl}），过该点作一条与单元内平均速度方向平行的直线 NM，NM 与有限单元边界的交点分别为 N 和 M。沿 NM

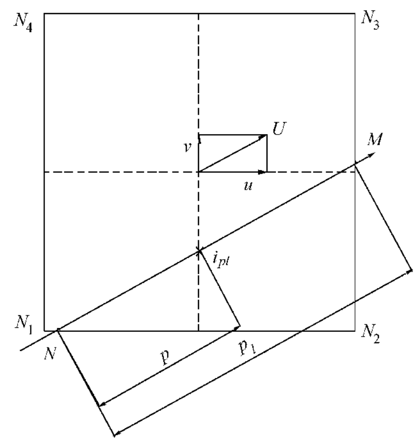

图 2　单元中积分点插值函数构造示意图

Fig. 2　Diagram of the interpolation function construction for the integration point in an element

方向引入指数插值函数，i_{pl}点的插值函数各分量 h_i^v 为

$$[h_1^v \quad h_2^v \quad h_3^v \quad h_4^v] = (1 - q)\boldsymbol{h}_n + q\boldsymbol{h}_m \quad (9)$$

其中

$$q = \frac{\mathrm{e}^{Re_\Delta p_r} - 1}{\mathrm{e}^{Re_\Delta} - 1} \quad (10)$$

$$p_r = p / p_l \quad (11)$$

$$\boldsymbol{h}_n = (1 - n, n, 0, 0) \quad \left(n = \frac{\| N_1 N \|}{\| N_1 N_2 \|}\right) \quad (12)$$

$$\boldsymbol{h}_m = (0, 1 - m, m, 0) \quad \left(m = \frac{\| N_2 M \|}{\| N_2 N_3 \|}\right) \quad (13)$$

如图 2 所示正方形单元，设边长为 10^{-3} m，当单元的平均速度 $u = 4 \times 10^{-3}$ m/s，$v = 3 \times 10^{-3}$ m/s 时，$Re_\Delta = 7.071$，插值函数各分量 h_i^v 在单元中的分布如图 3 所示。

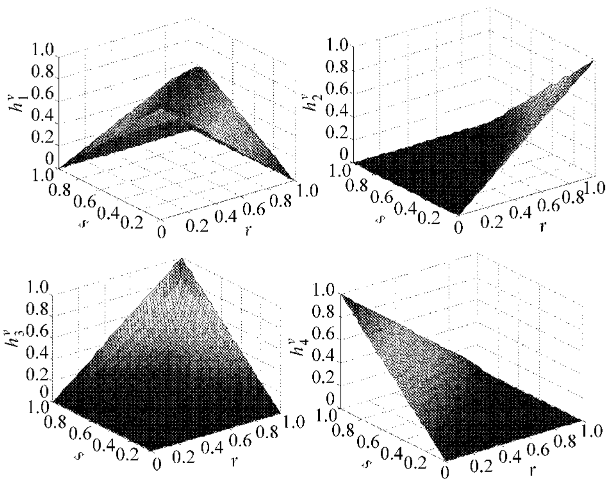

图 3　单元插值函数分量在单元内的分布

Fig. 3　Distribution of interpolation function components

从图 3 可以看出，在流线 FCBI 方法中，迎风格式沿流线引入，不包含任何人工变量，符合流动的基本原理。单元内平均速度与 x 方向呈 37°夹角，节点 1 的速度对单元内各点的速度影响最大，而节点 3 最小。

1.3.4　不同插值函数的比较

前人的研究表明，迎风格式的引入实质上是增

加了人工粘性项以获得稳定的数值解。图 4 为有限单元中，当 Re_Δ取不同值时，式(10)中 q 随 p_r 的变化曲线。由图可见，当 Re_Δ接近于 0 时，q 与 p_r 呈线性关系；当 Re_Δ大于 16 时，指数迎风格式接近一阶迎风格式。显然，Re_Δ越大，单元中引入的人工粘性项就越大。人工粘性项的引入能增强算法的稳定性，尤其在 Re 比较大的时候，具有重要意义。然而，人工粘性项同时也会降低解的精度。因此，需要合理选择人工粘性项的大小，一方面保证数值解的稳定性，另一方面保证解的精度。

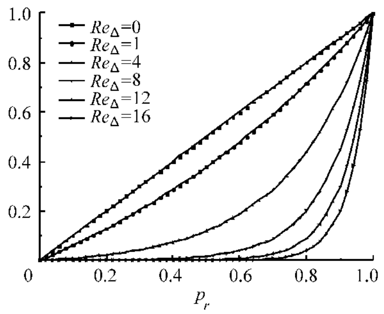

图 4 q 随 p_r变化曲线

Fig. 4 Curves of q with respect to p_r

为比较不同插值函数的影响，以图 2 中点 i_{pl}（坐标为$(r,s)=(0.5,0.25)$）为例，设单元边长为 10^{-3} m，当平均速度 $u=4\times10^{-3}$ m/s，$v=3\times10^{-3}$ m/s 时，$Re_\Delta=7.071$，应用不同方法构造的对流速度 $\boldsymbol{v}_h$的插值函数如下：传统 FCBI 方法中，$\boldsymbol{h}^v=(0.505,0.245,0.082,0.168)$；推广 FCBI 方法中，$\boldsymbol{h}^v=(0.508,0.3078,0.0701,0.115)$；流线 FCBI 方法中，$\boldsymbol{h}^v=(0.657,0.211,0.1320)$。3 种 FCBI 方法均能引入迎风效应，但在一定 Re_Δ下，对于同一点，3 种 FCBI 方法构造的插值函数不同。

2 算例及分析

2.1 方腔顶盖驱动流

如图 5 所示，本算例的计算区域为二维正方形方腔，边长为 D，方腔的左、右及下边界分别为固定壁面边界条件，上边界为运动壁面边界条件，速度为 u_0，定义 Re 数为 $Re=\rho u_0 D/\mu$。应用 40×40 非均匀网格，选取上述 3 种插值函数模拟了不同 Re 数下方腔内部流动，并将数值结果和 Ghia 等[7]的基准解进行了比较。

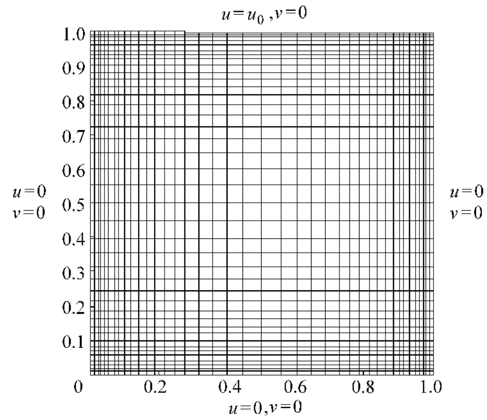

图 5 方腔顶盖驱动流的网格和边界条件

Fig. 5 Mesh and boundary conditions for the lid-driven square cavity flow

图 6 所示为 $Re=100$ 和 $Re=400$ 时，方腔内各个单元的 Re_Δ（定义见式(8)）分布的等值面图。图 7 为 $Re=100$ 和 $Re=400$ 时，应用不同 FCBI 方法得到的方腔中沿水平中线的垂直速度分布曲线。如图所示，当 $Re=100$ 时，方腔内各单元的 Re_Δ不是很高，应用 3 种插值函数均能获得较准确的数值结果，推广 FCBI 和流线 FCBI 方法相比传统的 FCBI 方

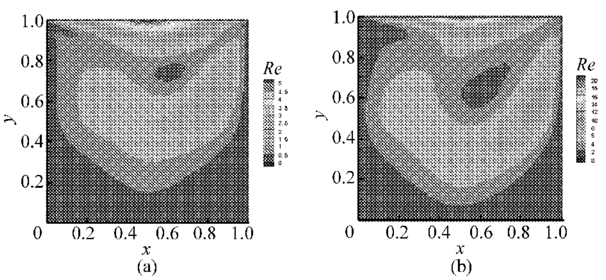

图 6 方腔内 Re_Δ数的分布

Fig. 6 Re_Δ distributions in the square cavity

(a) $Re=100$ (b) $Re=400$

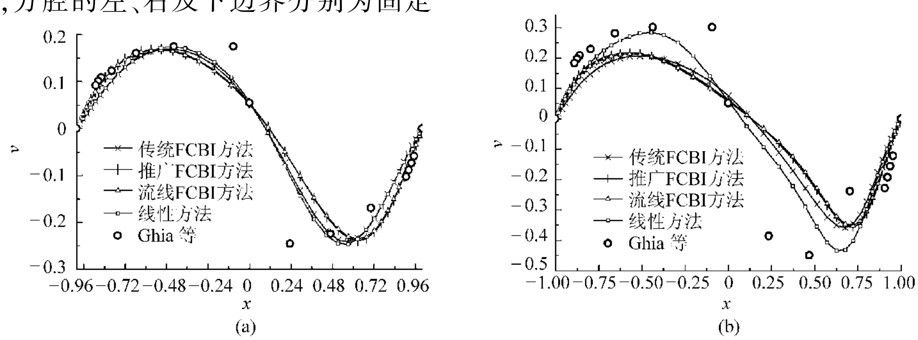

图 7 应用不同 FCBI 方法得到的方腔沿水平中线的垂直速度分布曲线

Fig. 7 Vertical velocity profiles along the horizontal centre lines using different FCBI methods

(a) $Re=100$ (b) $Re=400$

法，可以更精确地描述方腔边界附近的速度分布。图 7 中线性方法为应用线性插值函数计算获得的数值结果，可以当作不引入任何人工粘性项时的计算结果。应用传统 FCBI 方法获得的曲线和应用流线 FCBI 方法获得的曲线的差别反映了在非流线方向引入的人工粘性项所造成的误差。应用线性方法获得的曲线和应用流线 FCBI 方法获得的曲线的差别反映了在流线方向引入的人工粘性项所造成的误差。当 $Re=100$ 时，沿方腔水平中线上的 Re_Δ 均小于 3，应用 3 种 FCBI 方法引入的人工粘性项很小，能获得较精确的计算结果。当 $Re=400$ 时，沿方腔水平中线上的最大 Re_Δ 约为 10，此时，应用 3 种 FCBI 方法在数值计算中引入的人工粘性项所造成的误差较大，为 20% 左右。若保持当前网格状态，进一步增大 Re，单元 Re_Δ 会增大，应用上述 3 种插值函数将引入更大的人工粘性，将无法准确描述方腔内的流动状态。

2.2　S 型通道流动

图 8 为 S 型通道流的计算区域和边界条件，进口速度沿抛物线分布，最大速度为 u_0，入口宽度为 D，法向出口，定义 Re 数为 $Re=\rho u_0 D/\mu$。通道流动与方腔驱动流有着不同的特性，通道内各点流动方向较为一致，对流占主导作用。S 型通道流动由于结构比较复杂，在 Re 数较高时，在拐角处会产生漩涡，出口会出现回流[6]。图 8b 所示为本算例使用的计算网格，节点数为 946，单元数为 850。图 8c 为 $Re=1\,000$ 时通道内 Re_Δ 的分布，此时通道内各个单元的 Re_Δ 较高，为 100 左右。选用 3 种不同的插值

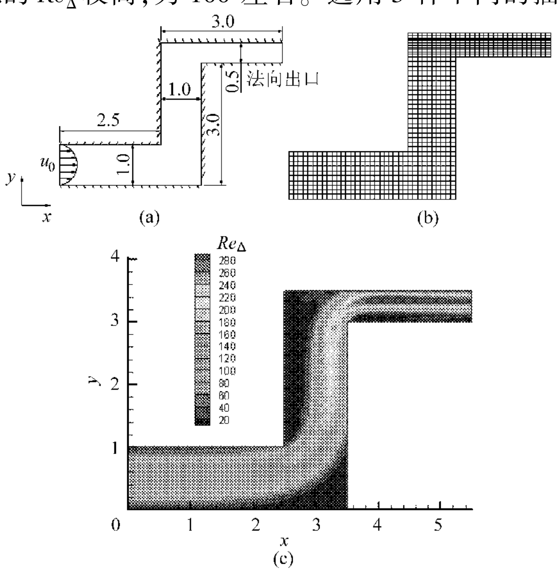

图 8　S 型管道的计算区域、网格和 Re_Δ 的分布

Fig. 8　Computational domain, mesh and Re_Δ distribution in the S-channel

(a) 边界条件　(b) 网格　(c) $Re=1\,000$ 时 Re_Δ 分布

函数，模拟了此时 S 型通道的内部流动。计算过程中：应用传统 FCBI 插值函数计算出现了明显的振荡，经过 30 步获得收敛解；扩展 FCBI 插值函数已失效，无法获得收敛解；应用流线 FCBI 插值函数运行 16 步获得收敛解。

图 9 为应用传统 FCBI 插值函数和流线 FCBI 插值函数计算获得的 S 型通道中流线的分布。由图可见，对于 S 型管道中右下和左上两个拐角处的漩涡，两种方法均能给出合理的流线图谱，但对于 S 型通道出口处存在的回流，只有流线 FCBI 方法才能够给出。

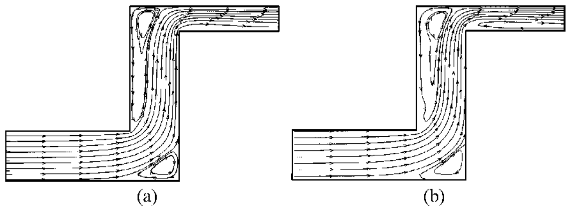

图 9　管道内流线分布图

Fig. 9　Streamline distributions in S-channel

(a) 应用传统 FCBI 方法　(b) 应用流线 FCBI 方法

2.3　结果讨论

3 种插值函数的构造思想都是基于一维对流扩散方程的解析解，称为 FCBI 类插值函数，应用此类插值函数计算的控制体有限元方法称为 FCBI 类方法。对于方腔驱动问题和管道流动问题，此类插值函数表现出不同的性质。基于上文分析，可以将流动问题分成两类，一类为对流占优的流动问题，如管道流动，此类流动中，主流速度方向比较一致，对流占主导作用，扩散作用可以忽略；另一类为非对流占优问题，如方腔问题，一般指主流速度方向不相同，扩散作用产生重要影响的流动。这种分类方式只与流动问题有关，与 Re 数无关，换句话说，无论方腔流动的 Re 数有多大，扩散作用仍然不能忽略，为非对流占优问题。

对于高 Re 的对流占优问题，线性插值方法已经无法获得稳定的数值解，此时 FCBI 类方法具有明显优势。从 2.2 节可以看出，对于单元 Re_Δ 数比较高的情形，流线 FCBI 方法表现出更好的准确性和稳定性，这是由于流线 FCBI 插值方法能够更好地描述单元内部的速度分布，而且不会随着 Re_Δ 数的增大而失效。对于非对流占优的流动问题，2.1 节表明，当 Re_Δ 小于 5 时，FCBI 类方法均可以获得比较准确的结果；但当 Re_Δ 大于 5 时，3 种方法都由于引入了过多的人工粘性项而带来较大的误差。此时 FCBI 类方法并不具有优势。

究其原因，在 FCBI 类方法中，迎风格式的构造是根据标准对流扩散方程的解析解建立的，对于对

流占优的流动问题,Navier - Stokes 方程表现出非常接近对流扩散方程的性质,此时应用 FCBI 类插值函数可以自动引入迎风格式,不包含任何人工系数,尤其是流线 FCBI 插值函数可以较精确地描述单元内对流速度的分布,获得较精确的计算结果;而对于非对流占优的流动问题,Navier - Stokes 方程表现出强烈的扩散特性,此时用 FCBI 类插值函数并不能合理地描述单元内对流速度的分布。换句话说,迎风格式在处理非对流占优问题上会引入过多的人工耗散,并不适用。

3 结束语

研究了控制体有限元中传统 FCBI、推广 FCBI 和流线 FCBI 插值函数,选择方腔流动和 S 型管道流动 2 个算例,讨论了 3 种方法的特性与共性。对对流占优问题,尤其是流动较为复杂的对流占优问题,流线 FCBI 插值函数能更好的描述单元中速度的分布,较其他 2 种单元更容易获得稳定的收敛解;对非对流占优问题,3 种方法的精度在 Re_Δ 数较高时略低,这是因为 3 种方法均引入过多的人工粘性项,此时在流线方向上引入的人工粘性项远远超过了在非流线方向引入的人工粘性项,是数值误差的主要来源,流线 FCBI 方法优势不明显。算例分析表明,对于非对流占优问题,当 Re_Δ 小于 5 时,FCBI 类方法能获得较精确的计算结果。

参 考 文 献

1 Baliga B R, Patankar S V. A control volume finite-element method for two-dimensional fluid flow and heat transfer [J]. Numerical Heat Transfer, 1983, 6(3):245 ~ 262.

2 Banaszek J. Comparison of control volume and Galerkin finite element methods for diffusion-type problems [J]. Numerical Heat Transfer, Part B, 1989,16(1):59 ~ 78.

3 Martinez M J. Comparison of Galerkin and control volume finite element for advection-diffusion problems [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2006, 50(3):347 ~ 376.

4 Piller M, Stalio E. Development of a mixed control volume-finite element method for the advection-diffusion equation with spectral convergence [J]. Computers & Fluids, 2011, 40(1):269 ~ 279.

5 Bathe K J, Zhang H. A flow-condition-based interpolation finite element procedure for incompressible fluid flows [J]. Computers & Structures, 2002, 80(14 ~ 15):1 267 ~ 1 277.

6 Bathe K J, Zhang H. Finite element developments for general fluid flows with structural interactions [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004, 60(1): 213 ~ 232.

7 Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier - Stokes equations and a multigrid method [J]. Journal of Computational Physics, 1982, 48(3):387 ~ 411.

8 Bathe K J. Finite element procedures [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.

9 李庆扬,关治,白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京:清华大学出版社,2002.

10 Zienkiewicz O C, Taylor R L. 流体动力学[M]. 符松,刘扬扬,译. 北京:清华大学出版社,2008.

11 宋宇,曹树良. 考虑不可凝结气体的空化流模型及数值模拟[J]. 排灌机械工程学报,2012,30(1):1 ~ 5.
Song Yu, Cao Shuliang. Cavitation model with non-condensable gas effect and its numerical simulation[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2012,30(1):1 ~ 5. (in Chinese)

(上接第 88 页)

7 陆雄,范宗林,雪建欣. 单级单吸离心泵轴向力实验研究[J]. 水泵技术,1998(3):3 ~ 9.
Lu Xiong, Fan Zonglin, Xue Jianxin. The study of the axial force of single-stage single-suction centrifugal pump [J]. Pump Technology, 1998(3):3 ~ 9. (in Chinese)

8 关醒凡. 泵的理论与设计[M]. 北京:机械工业出版社,1987.

9 何朝辉,陈存东,王拥军. 管道式磁力泵轴向力研究[J]. 排灌机械,2000,18(6):3 ~ 7.
He Zhaohui, Chen Cundong, Wang Yongjun. The study on axial force of pipeline magnetic pump[J]. Drainage and Irrigation Machinery, 2000,18 (6): 3 ~ 7. (in Chinese)

10 蒋庆磊,戴维平,吴大转,等. 离心泵内泄漏流计算及其对转子振动的影响[J]. 排灌机械工程学报,2010,28(3):202 ~ 206.
Jiang Qinglei, Dai Weiping, Wu Dazhuan, et al. Computation of leakage flow in centrifugal pumps and its effects on rotor’s vibration[J]. Journal of Drainage and Irrigation Machinery Engineering, 2010,28(3):202 ~ 206. (in Chinese)