

DOI:10.6041/j.issn.1000-1298.2012.03.012

AFT - DT 相结合的离心泵曲面网格划分算法*

董亮 刘厚林 谈明高 王凯 王勇

(江苏大学流体机械工程技术研究中心, 镇江 212013)

【摘要】 针对映射法的曲面网格生成容易产生畸变而导致网格质量较差的问题,提出一种基于黎曼度量,结合前沿推进技术(AFT)和 Delaunay 三角划分(DT)方法的曲面网格生成算法。该算法在黎曼度量的基础上,用改进的前沿推进技术生成参数域内的背景网格;且在对参数域内背景网格进行加密时,为了抵消映射过程中的畸变,采用插入三角形外接椭圆圆心的方法代替传统 Delaunay 插点内核,并给出了椭圆圆心定位以及判断节点是否在椭圆内的方法。该算法通过黎曼度量的引入以及合理的背景网格充分地考虑了映射畸变和算法效率,实例表明,算法易于实施,稳定性好且生成的网格质量较高。

关键词: 离心泵 曲面网格 黎曼度量 前沿推进法 Delaunay 三角划分

中图分类号: TH311 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2012)03-0062-05

Centrifugal Pumps Surface Meshing Using a Combined Advancing-front and Delaunay Triangulation Method

Dong Liang Liu Houlin Tan Minggao Wang Kai Wang Yong

(Research Center of Fluid Machinery Engineering and Technology, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract

With the aim to solve the problem of shape distortion when generating the finite element mesh of parametric surfaces, mapping method was used. But mapping method could generate distortion elements which lead to poor quality meshes easily. Based on the Riemannian metric, a combined advancing front technique (AFT) and Delaunay triangulation(DT) method were applied. In this algorithm, Riemannian metric was considered, and background grids of parametric space were generated by improved AFT. When background grids of parametric space were refined to counteract mapping distortion, the traditional Delaunay incremental insertion kernel was replaced by inserting the center of triangle circumscribed ellipse, and the algorithm for locating ellipse center and judging whether nodes within ellipse. The mapping distortion and algorithm efficiency were considered by the algorithm by introducing Riemannian metric and reasonable background mesh. Examples show that the new method is easy to implement. The mesh which has good stability and high quality can be generated.

Key words Centrifugal pumps, Surface mesh generation, Riemannian metric, Advancing front method, Delaunay triangulation

引言

离心泵曲面网格作为三维实体表面的离散形式,是三维实体网格划分的前提和基础,其质量的优劣直接影响三维实体网格划分的成败以及 CFD 数

值计算的精度。为了保证离心泵建模模型与实体的拟合程度,离心泵几何模型中往往包含大量型线,这些型线的存在(尤其是近距离的型线)会导致生成的曲面网格质量不高甚至无法直接划分成功。现有的曲面网格生成算法,在划分整体网格前,往往先由

收稿日期: 2011-04-26 修回日期: 2011-06-13

* 国家自然科学基金资助项目(51079062)、国家杰出青年科学基金资助项目(50825902)和江苏省 2010 年研究生创新计划资助项目(CX10B_263Z)

作者简介: 董亮, 博士生, 主要从事离心泵 CFD 网格划分及内流场分析研究, E-mail: edongliang@yahoo.com

人工进行碎面合并、复杂区域(如叶片进口边、蜗壳隔舌等)预划分等操作,要求软件使用人员具有丰富的经验且费时费力。因此,对曲面网格自动生成算法效率和稳定性的研究一直是近年来研究的热点,已取得了许多重要的进展^[1-3]。按曲面网格的生成方式将曲面网格的划分方法分为两大类:直接法和映射法^[4-9]。

总体而言,直接法不存在映射畸变、易控制网格密度,但程序实现复杂、复杂模型剖分效果差、不能有效地控制生成网格与原曲面的几何近似,且容易在划分结果中出现退化现象。就映射法而言,如何消除映射过程中的畸变是该方法的难点。实践证明,在消除映射畸变方面黎曼度量方法具有很好的效果,能够准确度量映射畸变,并且在合理定义黎曼度量后可以很好地控制待剖分域网格生成。然而目前考虑黎曼度量消除映射畸变的方法,大都采用某一种网格生成技术,而这些技术本身都有其各自的缺点^[10](如前沿推进技术(AFT)理论上无法保证生成的网格质量达到设定标准,而 Delaunay 方法(DT)在生成内部网格结点过程中需要寻找最大无量纲半径三角形,耗费大量时间);此外这些算法在划分过程中求取曲面上点的黎曼度量时,都是调用相关的接口函数重新计算,这样使得算法的运行效率很低。为解决这些问题,本文提出一种基于黎曼度量结合 AFT 和 DT 的参数曲面网格生成算法。

1 黎曼度量

1.1 空间点的黎曼度量

在三维空间中,某点 P 的黎曼度量可以用一个 3×3 的实对称矩阵来表示

$$\mathbf{M}_{3p} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & f \\ c & f & e \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

其中 $\mathbf{e}_i, \lambda_i (i=1, 2, 3)$ 是矩阵 \mathbf{M}_{3p} 的特征向量和特征值,并且 $\text{Det}(\mathbf{M}_{3p}) > 0, \lambda_i > 0$ 。

1.2 曲面上点的控制度量

在生成参数曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 网格时,同时要考虑曲面本身的度量和用户所指定的三维空间点的度量,这样可以得到曲面上某点 P 的控制度量

$$\mathbf{M}_{sp} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \nu \end{bmatrix} \mathbf{M}_{3p} (\tau_1 \quad \tau_2 \quad \nu) \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \nu \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中 $\tau_1 = \mathbf{r}_u, \tau_2 = \mathbf{r}_v, \nu = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}$, $[\]_2$ 表示只是考虑

矩阵的前两行两列。

1.3 曲线的欧里(Euclidean)几何长度

用 Σ 表示物理空间 (X, Y, Z) 曲面,而 Ω 则表示它所对应的参数平面 (u, v) ,设函数 γ 在区间 $[a, b]$ 内表示 Σ 中的曲线 PQ ,曲线 PQ 也可以通过函数 σ 映射 Ω 中的曲线 AB 得到,并且 AB 又可以通过函数 ω 在区间 $[a, b]$ 获得,因此得到函数 σ, γ 和 ω 之间的关系为 $\gamma(t) = \sigma(\omega(t))$ 。

Σ 中曲线 PQ 长度的计算公式^[11]为

$$L_{PQ} = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle} dt \quad (3)$$

由于 $\tau_1 = \mathbf{r}_u = \sigma'_u, \tau_2 = \mathbf{r}_v = \sigma'_v$,代入式(3)则有

$$L_{PQ} = \int_a^b \sqrt{\omega'^T(t) \mathbf{M}'_{3p} \omega'(t)} dt \quad (4)$$

因此通过式(4),可以得到参数域上曲线 AB 的长度与其对应物理空间曲线 PQ 长度的关系。

结合式(2)和式(3)就可以得到在给定度量 \mathbf{M}_{3p} 后曲线长度的计算公式

$$L_{M_{3p}PQ} = \int_a^b \sqrt{\gamma'^T(t) \mathbf{M}_{3p}(\gamma(t)) \gamma'(t)} dt \quad (5)$$

也可以写成

$$L_{M_{3p}PQ} = \int_a^b \sqrt{\omega'^T(t) \mathbf{M}_{sp}(\omega(t)) \omega'(t)} dt \quad (6)$$

由式(6)可以得到,在指定度量的情况下参数域内的线段 AB 长度与其对应的物理空间线段 PQ 长度的关系。

2 曲面网格生成

生成曲面网格具体步骤如下:

(1) 读取参数曲面信息,并确定各曲面的边界曲线。

(2) 根据给定度量离散曲线上的边界曲线,并获得各个离散点的坐标。

(3) 根据参数平面的曲线离散结果,用改进的 AFT 生成背景网格,并存储各节点的控制度量。

(4) 根据各点的控制度量采用 Delaunay 三角划分算法对参数平面进行加密,直到网格质量符合要求为止。

(5) 将划分结果映射回曲面物理空间。

2.1 边界曲线的离散算法

曲面网格划分的第一步是边界曲线的离散,边界离散的结果直接影响着曲面网格生成的质量,如果边界离散结果与给定度量相差较大,将导致生成的网格单元畸形、相交,甚至导致曲面网格生成失败。边界曲线离散的实质是对参数平面内的边界曲线进行离散,并使得在参数平面内离散后每段曲线

的长度映射到物理空间后都能满足指定的度量。

边界曲线的离散算法如下：

首先获取参数曲面以及控制度量的信息；接着通过 Romberg 公式来计算式(6)的曲线长度 L ，四舍五入找到与 L 最近的整数 n ，其中 n 就是在指定的度量情况下该段曲线离散点的个数；最后计算

$$\frac{L}{n} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\mathbf{w}'^T(t) \mathbf{M}_{sp}(\mathbf{w}(t)) \mathbf{w}'(t)} dt \quad (7)$$

$(0 \leq i \leq n-1, t_0 = a, t_n = b)$

得到不同的 t_i 值，根据 t_i 值就可计算出各个离散点坐标值。图1所示为采用本文方法对叶片边界曲线离散的结果。从图中可看出在曲率大的地方离散点较多，而曲率小的地方离散点较少。这是因为曲率大就相当于式(7)中的黎曼度量 $\mathbf{M}_{sp}(\mathbf{w}(t_i))$ 值大，因此离散点间的距离较小，单位长度上的离散点较多。

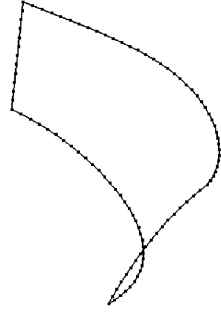


图1 叶片边界曲线
Fig.1 Boundary curve of blade

2.2 参数平面网格划分

参数平面网格划分具体步骤如下：

(1) 设 AB 为初始边，设 $P_a(P_b)$ 、 A 、 B 为 $P_a(P_b)$ 、 A 、 B 的坐标向量，计算 $P_a(P_b)$ 使得三角形 $ABP_a(ABP_b)$ 根据度量 $\mathbf{M}_{sp}(A)$ ($\mathbf{M}_{sp}(B)$) 为等边三角形。

(2) 以 $P_1 = (P_a + P_b)/2$ 为候选点，继续调整候选点 P_1 的位置，设 α_{AP_1} 、 α_{BP_1} 为 A 到 P_1 和 B 到 P_1 的向量，令 $P'_a = A + \alpha_{AP_1}/L(AP_1)$ 和 $P'_b = B + \alpha_{BP_1}/L(BP_1)$ ，其中 $L(AP_1)$ 和 $L(BP_1)$ 为

$$L(AP_1) = \int_0^1 \sqrt{\alpha_{AP_1}^T \mathbf{M}_{sp_1}(A + t\alpha_{AP_1}) \alpha_{AP_1}} dt$$

$$L(BP_1) = \int_0^1 \sqrt{\alpha_{BP_1}^T \mathbf{M}_{sp_1}(B + t\alpha_{BP_1}) \alpha_{BP_1}} dt$$

(3) 令 $P = (P'_a + P'_b)/2$ ，点 P 就是最佳的候选点，根据 P 点的坐标 $(u, v)^T$ 计算出 $\mathbf{M}_{sp}(P)$ ，根据度量 $\mathbf{M}_{sp}(P)$ 确定一个以 P 为圆心的椭圆，在该椭圆内查找阵面上的“邻近点”（不包括 A 、 B 两点），记录这些“邻近点”。

(4) 计算“邻近点”和 P 点分别与 AB 边所形成三角形单元的质量，找到质量最高的单元，那么和 AB 组成该单元的点就为最佳插入点（如图2所示），计算三角形 ABP 、 ABD 以及 ABE 的质量，同时计算并存储最佳点的控制度量。

(5) 更新阵面信息，即删去新阵面外的单元，增

补新生成的阵元。

(6) 重复前5步，直至没有阵元存在，参数平面背景网格生成结束。

(7) 在考虑黎曼度量情况下，采用 Delaunay 三角划分对参数域进一步细分。

(8) 把参数平面的网格映射到物理空间得到曲面网格。

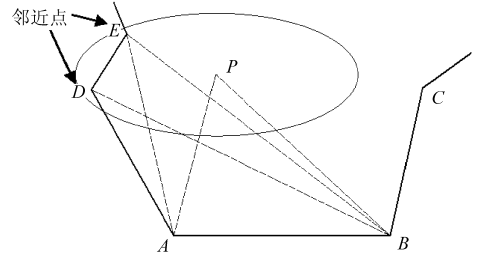


图2 最佳插入点的确定方法

Fig.2 Location of the optimal insertion point

在执行步骤(4)时为了优先使用“邻近点”以减少新插入点的个数，在计算 P 与 AB 组成的三角形的质量时乘以系数 τ ， τ 一般取 $0.7 \sim 0.9$ 。

2.3 考虑黎曼度量的 Delaunay 三角细化

传统的 Delaunay 三角细化算法，是在三角形的外接圆圆心处插入新节点，并且保证最终产生的三角形单元的外接圆内不存在其他节点。然而在考虑黎曼度量情况下，单元的外心需要根据黎曼距离公式通过求解复杂的非线性方程组得到，这个过程通常困难且耗时，并且由于映射各个方向的非等方性就需要用参数域椭圆代替曲面三角形的外接圆。本文采用一种简化的计算数域的三角形外接椭圆圆心的方法^[12]，过程如下：

曲面上某点 P 的控制度量 \mathbf{M}_{sp} ，通过求解方程组

$$\begin{cases} L_{M_{3p}}(O_k V_1) = L_{M_{3p}}(O_k V_2) \\ L_{M_{3p}}(O_k V_1) = L_{M_{3p}}(O_k V_3) \end{cases} \quad (8)$$

获得三角形 K 的外心位置 O_k ，其中 V_i ($i=1,2,3$) 表示 K 的顶点，设其坐标为 $[x_i, y_i]^T$ ， O_k 的坐标为 $[O_x, O_y]^T$ ， $\mathbf{M}_{3p} = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 2}$ ，将式(8)代入式(6)中，则式(8)可最终转换为线性方程组

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} O_x \\ O_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} \quad (9)$$

其中 $a_i = 2[m_{11}(x_i - x_1) + m_{12}(y_i - y_1)]$

$b_i = 2[m_{22}(y_i - y_1) + m_{12}(x_i - x_1)]$

$c_i = m_{11}x_i^2 + 2m_{12}x_i y_i + m_{22}y_i^2 -$

$(m_{11}x_1^2 + 2m_{12}x_1 y_1 + m_{22}y_1^2)$

从而能够求得 O_k 坐标。

设 $L_{O_k E}$ 为 O_k 到三角形任意顶点的距离， P 为参数域内一点， $L_{O_k P}$ 为 P 点到圆心的距离。于是，若

$L_{O_kE} > L_{O_kP}$, 则 P 点在椭圆内; 若 $L_{O_kE} = L_{O_kP}$, 则 P 点在椭圆上; 若 $L_{O_kE} < L_{O_kP}$, 则 P 点在椭圆外。

在考虑黎曼度量情况下, 采用 Delaunay 三角划分对参数域细化算法分为两步:

(1) 对背景网格进行 Delaunay 三角划分, 并保证任意三角形的外接椭圆内不包含其他节点 (判断是否在椭圆内的方法上文已给出)。

(2) 存储所有质量小于 K_i 的三角形单元, 遍历这些单元, 并将这些三角形的外接椭圆圆心作为插入点进行加密, 直到所有三角形的质量值都大于 K_i 为止。其中

$$K_i = 2\sqrt{3} \frac{\|\boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{\beta}\|}{\|\boldsymbol{\lambda}\|^2 + \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2}$$

式中, $\boldsymbol{\alpha}$ 表示 A 到 B 向量, $\boldsymbol{\beta}$ 表示 B 到 C 向量, $\boldsymbol{\lambda}$ 表示 C 到 A 向量; $K_1 = \sum_{i=1}^N K_i / N$, $K_2 = N / \sum_{i=1}^N 1/K_i$,

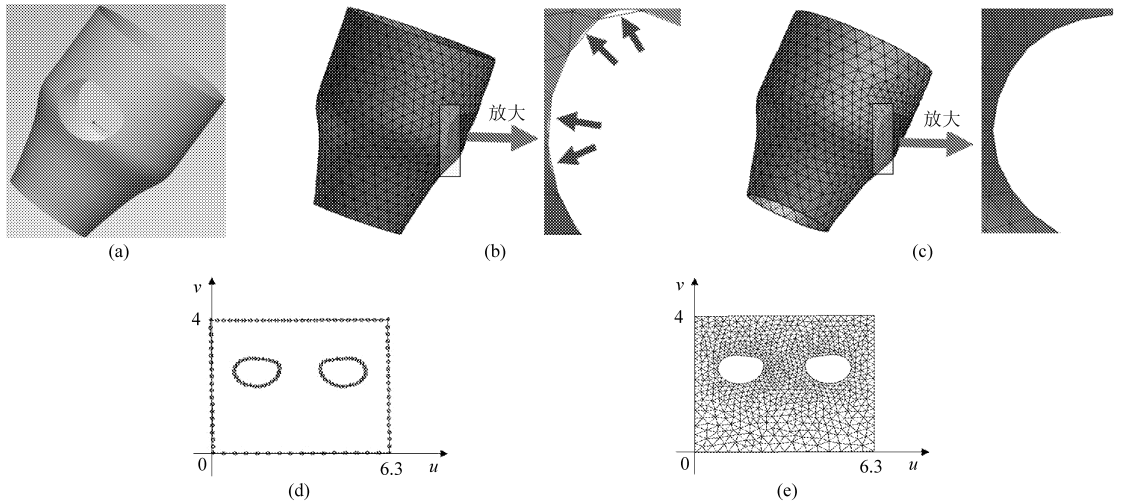


图3 参数曲面网格划分

Fig. 3 Parametric surface mesh generation

(a) 模型 (b) 某网格软件划分结果 (c) 本文算法 (d) 参数平面边界曲线离散结果 (e) 参数平面网格划分结果

表1 不同划分方法生成的曲面网格单元质量统计

Tab. 1 Comparison of the quality of the mesh for different algorithms

划分方法	网格单元质量分布					最差单元质量	平均单元质量
	0~0.2	0.2~0.4	0.4~0.6	0.6~0.8	0.8~1.0		
网格划分软件	0	0	41	248	407	0.575 4	0.917 5
本文算法	0	0	16	187	449	0.595 1	0.936 2

图 4a 是一个组合曲面的剖分, 图 4b 是该组合曲面单元生成数目与生成时间的关系曲线, 生成单元的整个过程包括曲面边界曲线的离散化、三角形单元生成等一系列过程。该测试在主频 2.0 GHz, 内存 1 GB 的 PC 机上完成。曲线表明本算法的时间复杂度基本是线性的, 在该 PC 机上每分钟平均生成并优化 100 000 个三角形单元。图 4c 是该组合曲面质量系数分布情况, 可以看出, 采用本文算法生成的组合曲面网格中只有少量单元存在于质

N 为单元总个数。

3 曲面网格生成实例

图 3b 和 3c 分别表示采用某商用网格划分软件和本文算法的划分结果。从图中可看出, 采用商用软件划分得到的网格等方性较好, 但是在不规则的边界处与边界的重合性较差 (图 3b 中的箭头所示); 而本文算法考虑曲面的黎曼度量并利用 AFT 能够较好地保证边界完整性的特点, 因此使得生成的网格与原模型有较好的重合。图 3d 和图 3e 是其在参数域内边界和网格划分结果。表 1 为以 K_i 为单元质量衡量准则, 计算得到上述两种算法生成网格的质量系数分布情况。从表中可看出, 本文算法在同样的输入条件下 (同样的参数曲面、同样的剖分尺寸), 产生的网格数目较少, 并且最差单元和平均单元质量都比商用软件有所提高。

量较差区间 (网格质量在 0~0.3, 曲面网格质量衡量准则为 K_i), 大部分网格单元都存在于高质量区间 (网格质量在 0.7 以上), 因此, 该组合曲面网格质量较高。

图 5 所示曲面网格中共有 3 861 个节点, 8 170 个三角形单元, 质量系数最小为 0.307, 最大为 0.996 1, $K_1 = 0.921 2$, $K_2 = 0.915 3$ 。通过图 5b 可以看出生成的单元质量系数大多数都在 0.8~0.9 附近, 生成的曲面网格质量较高。

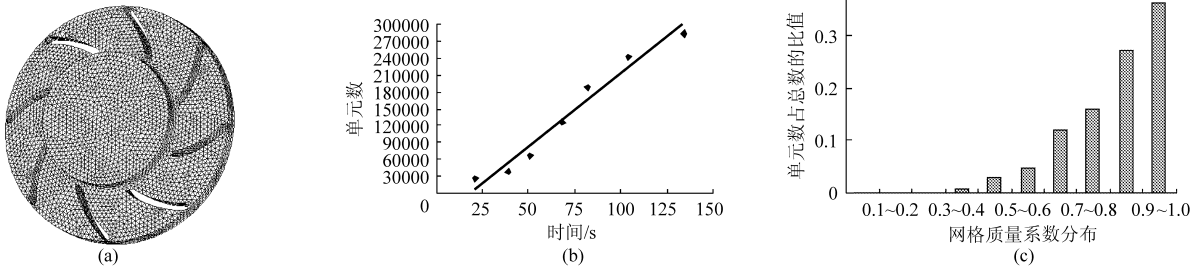


图4 曲面网格生成实例

Fig. 4 Example of parametric surface mesh generation

(a) 曲面网格划分 (b) 曲面网格划分单元个数与时间关系曲线 (c) 曲面网格质量系数分布

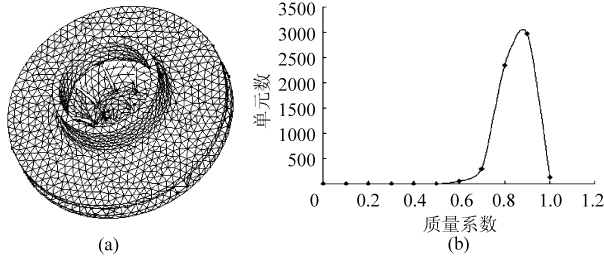


图5 复杂曲面的网格划分

Fig. 5 Complex parametric surface mesh generation

(a) 叶轮曲面的划分结果 (b) 网格质量系数分布

4 结束语

在考虑黎曼度量情况下,提出了一种采用 AFT 和 Delaunay 三角划分相结合的方式生成参数域网格的方法,既保证了边界三角形单元的质量又充分发挥了 Delaunay 三角划分在平面域内划分网格的优势,使得参数平面内生成的网格映射回物理空间后,得到的曲面网格质量较高。算例表明,该方法稳定性好,易于实施,网格单元疏密合理,过渡均匀,网格质量能满足有限元分析的要求。

参 考 文 献

- 孟宪海,李吉刚,杨钦,等. 复杂限定 Delaunay 三角化算法[J]. 中国科学:信息科学,2010,40(3):381~392.
Meng Xianhai, Li Jigang, Yang Qin, et al. Surface mesh generation conforming Delaunay triangulation [J]. Scientia Sinica: Informationis, 2010, 40(3):381~392. (in Chinese)
- Garimella V, Shosh M, Knupp M. Triangular and quadrilateral surface mesh quality optimization using local parameterizations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2004,193(9~11):913~928.
- Mirandan C, Martha L, Wawrzyniec P, et al. Surface mesh regeneration considering curvatures [J]. Engineering with Computers, 2009, 25(2):207~219.
- 孙殿柱,李心成,李延瑞,等. 三角网格曲面高精度刀轨快速生成算法[J]. 农业机械学报,2010,41(7):223~226.
Sun Dianzhu, Li Xincheng, Li Yanrui, et al. Research on high precision and fast generation algorithm of NC tool path for triangular mesh surface [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(7): 223~226. (in Chinese)
- 黄晓东,丁问司,杜群贵,等. 基于波前法的参数曲面有限元网格生成算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报,2010, 22(1): 51~59.
Huang Xiaodong, Ding Wensi, Du Qungui. Parametric surface mesh generation based on advancing front technique [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2010, 22(1): 51~59. (in Chinese)
- Chen H, Bishop J. Delaunay triangulation for curved surface [C]//Proceedings of the 6th International Meshing Roundtable, Park City, 1997: 115~127.
- Zhao Jianjun, Wang Qifu, Zhong Yifang, et al. Delaunay triangulation method of curved surfaces based on Riemannian metric [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2003, 6(1):91~93.
- 关振群,单菊林,顾元宪. 基于黎曼度量的复杂参数曲面有限元网格生成方法[J]. 计算机学报,2006,29(10):1 823~1 833.
Guan Zhenqun, Shan Julin, Gu Yuanxian. Surface mesh generation based on Riemannian metric [J]. Chinese Journal of Computers, 2006, 29(10):1 823~1 833. (in Chinese)
- 陈炎,曹树良,梁开洪. 结合前沿推进的 Delaunay 三角化网格生成及应用[J]. 计算物理,2009,26(4):527~533.
Chen Yan, Cao Shuliang, Liang Kaihong. Delaunay triangulation for internal node generation in frontal approach and application [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 2009, 26(4):527~533. (in Chinese)
- Pascal J F, Paul L G. Mesh generation [M]. Oxford: Hermes Science Publishing, 2000: 489~551.
- Dobrzynski C, Frey P. Anisotropic delaunay mesh adaptation for unsteady simulations [C]// Proceedings of the 17th International Meshing Roundtable, Pittsburgh, 2008: 177~194.