轮系运动分析的构件元法*

王成志　许志龙

（集美大学机械工程学院，厦门 361021）

【摘要】 用构件元的概念推导了轮系中齿轮与系杆的构件元，特别是推导出用齿数表示的雅可比元，分析了轮系中的封闭环，总结出 3 种轮系基本封闭环。通过引入有效因子，可用雅可比元按基本封闭环建立整个轮系的雅可比矩阵，求解线性方程组，就得出各构件的角速度。提出的方法无需区分基本轮系，无需绘制箭头，具有极强的模块性，手工计算和计算机自动求解都非常方便，适用于各类复杂轮系。

关键词：轮系　运动分析　雅可比矩阵　构件元　基本封闭环

中图分类号：TH113.2⁺2；TH112.3　　文献标识码：A　　文章编号：1000-1298(2011)12-0208-07

Kinematic Analysis of Gear Trains Based on Link Units

Wang Chengzhi　Xu Zhilong

(*School of Mechanical Engineering, Jimei University, Xiamen* 361021, *China*)

Abstract

By applying the notion of link units to the gear trains, the link units, especially the Jacobian units, the gear and planet carrier was gotten. The closed loops about gear train also were analyzed, and three kinds of basic closed loop were summed up. By using the effect factors and according to the basic closed loops, the units could be easily combined together to build Jacobian matrix, that was a linear equations, of whole gear train. After solved the linear equations, the angular velocities of each gears and planet carriers were yielded. It did not need to divide the compound planetary train into basic epicylic and fixed axis gear trains and also did not need to draw the arrows to determine the rotations of each links in the planar trains. It was easy to model the equations with manual hands or automatically model with computer for its modular property. The method could be used for any complex planar gear trains.

Key words　Gear trains, Kinematic analysis, Jacobian matrix, Link units, Basic closed loops

引言

轮系应用极为广泛，设计与分析中常常涉及对其进行运动分析，特别是传动比分析。结构复杂而紧凑的轮系的运动分析相对困难。传统的方法通常要先将复杂复合轮系划分成定轴轮系和基本的周转轮系，分别列出各基本轮系的传动比方程，建立它们之间的关系后联立求解得到所需结果。这种方法需对复杂轮系结构进行分析，用绘制箭头标定方向，对周转轮系常采用转化轮系法分析运动，概念不容易掌握，容易出错。因此，轮系运动分析一直受到关注，众多学者提出了许多轮系传动比计算的方法，如力矩法、图论法[1]、列表法[2]、复数矢量法[3]、速度瞬心法[4]、图形解析法[5]等。

本文以矢量法为基础，将文献[6]中提出的构件元概念应用到轮系，分析轮系中各种构件的构件元和基本封闭环，用构件元法建立轮系的运动方程组，从而求出各构件之间的角速度关系。

1　构件元运动分析基本原理

按矢量法，机构有以下形式的位置方程

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_o,\cdots,\boldsymbol{A}_L]^{\mathrm{T}}=0 \tag{1}$$

其中
$$\boldsymbol{A}_o=\sum\nabla\boldsymbol{A}_j=0$$

式中　$\boldsymbol{A}_o$——封闭环 o 的位置方程

收稿日期：2011－01－10　修回日期：2011－03－08

＊国家高技术研究发展计划（863 计划）资助项目（2006AA050203）

作者简介：王成志，教授，主要从事机构学、机械 CAD、科学计算可视化和光学测量研究，E-mail：wcz3@21cn.com

$\nabla \boldsymbol{A}_j$——封闭环经过构件 j 的矢量元

L——机构独立封闭环数

整个机构的角速度 $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 和角加速度 $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$ 为

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{B}\dot{\boldsymbol{q}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{\phi}} = -\boldsymbol{B}\ddot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{B}}\dot{\boldsymbol{q}} - \dot{\boldsymbol{J}}\dot{\boldsymbol{\phi}} \tag{3}$$

其中　$\boldsymbol{\phi} = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N]^{\mathrm{T}}$　$\boldsymbol{q} = [q_1, q_2, \cdots, q_F]^{\mathrm{T}}$

式中　$\boldsymbol{\phi}$——N 个待求位置参数

$\boldsymbol{q}$——F 个已知位置参数

F——机构自由度

$\boldsymbol{J}$、$\dot{\boldsymbol{J}}$——机构未知参数的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵

$\boldsymbol{B}$、$\dot{\boldsymbol{B}}$——机构已知参数的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵

整个机构的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵是由各个独立封闭环组合形成的，即

$$\begin{cases} \boldsymbol{J} = [\boldsymbol{J}_1, \boldsymbol{J}_2, \cdots, \boldsymbol{J}_L]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \cdots, \boldsymbol{B}_L]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{J}} = [\dot{\boldsymbol{J}}_1, \dot{\boldsymbol{J}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{J}}_L]^{\mathrm{T}} \\ \dot{\boldsymbol{B}} = [\dot{\boldsymbol{B}}_1, \dot{\boldsymbol{B}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{B}}_L]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5}$$

根据文献[6]可知，机构某个封闭环 o 的雅可比子阵和雅可比速度子阵为

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_o = \sum\limits_{j=1}^{n} \nabla \boldsymbol{J}_j \boldsymbol{U}_j \\ \boldsymbol{B}_o = \sum\limits_{j=1}^{n} \nabla \boldsymbol{J}_j \boldsymbol{K}_j \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{J}}_o = \sum\limits_{j=1}^{n} \nabla \dot{\boldsymbol{J}}_j \boldsymbol{U}_j \\ \dot{\boldsymbol{B}}_o = \sum\limits_{j=1}^{n} \nabla \dot{\boldsymbol{J}}_j \boldsymbol{K}_j \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{U}_j = [u_{km}]_{C \times T_U} \quad (k = 1, 2, \cdots, C;\ m = 1, 2, \cdots, T_U) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{K}_j = [k_{gf}]_{C \times T_K} \quad (g = 1, 2, \cdots, C;\ f = 1, 2, \cdots, T_K) \tag{9}$$

$$u_{km} = \begin{cases} 1 & (\text{当封闭环经过构件 } j \text{ 且构件的第 } k \text{ 个变量对应机构的第 } m \text{ 个未知变量时}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

$$k_{gf} = \begin{cases} 1 & (\text{当封闭环经过构件 } j \text{ 且构件的第 } g \text{ 个变量对应机构的第 } f \text{ 个已知变量时}) \\ 0 & (\text{其他}) \end{cases}$$

式中　n——机构总构件数

T_U——整个机构的未知变量数

T_K——整个机构的已知变量数

C——构件 j 在封闭环中所含变量数

$\nabla \boldsymbol{J}_j$、$\nabla \dot{\boldsymbol{J}}_j$——构件 j 的雅可比元（一阶雅可比元）和雅可比速度元（二阶雅可比元）

$\boldsymbol{U}_j$——构件未知变量有效因子矩阵

$\boldsymbol{K}_j$——已知变量有效因子矩阵

因此，构件元运动分析的求解关键是：确定各类构件在各种形态下的的构件元（矢量元 $\nabla \boldsymbol{A}_j$、雅可比元 $\nabla \boldsymbol{J}_j$ 和雅可比速度元 $\nabla \dot{\boldsymbol{J}}_j$）和分析整个轮系中独立的封闭环。根据式(6)、(7)得到各个独立封闭环的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵，再由式(4)、(5)列出整个轮系的雅可比矩阵和雅可比速度矩阵，从而根据式(2)、(3)求解线性方程组，解出各构件的角速度 $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 和角加速度 $\ddot{\boldsymbol{\phi}}$。

2　齿轮和系杆的构件元

2.1　轮系构件元基本公式推导

在轮系中一般只有 3 类构件：齿轮、系杆（行星架或转臂）和机架。假设一个封闭环中经过构件的矢量为 $\boldsymbol{l}$，则矢量元为

$$\nabla \boldsymbol{A} = \boldsymbol{l} = l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{10}$$

式中　ϕ——矢量 $\boldsymbol{l}$ 的位置角

l——矢量 $\boldsymbol{l}$ 的长度

根据文献[6]，将矢量元对变量 ϕ 求偏导，得到雅可比元

$$\nabla \boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{l}}{\partial \phi} = l\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = l\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{11}$$

分两种情况：①在圆柱齿轮组成的轮系（平面轮系）中，上述各矢量元是相互平行的（图 1a 中的 $\phi_2 = 180° + \phi_1$，图 1b、1c 的 $\phi_2 = \phi_1$，图 1 中的 $\phi_3 = 180° + \phi_1$，图 1a 中 $\phi_H = 180° + \phi_1$，图 1b 中 $\phi_H = \phi_1$）。②式(11)中 $i = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ 是指与矢量 $\boldsymbol{l}$ 垂直，表示齿轮啮合点的线速度，因此在圆锥齿轮组成的轮系中，啮合齿轮的线速度也是相互平行的。所以在一个封闭环中，代入各矢量正负号后，可以消去 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，得到轮系中构件的雅可比元

$$\nabla \boldsymbol{J} = [\pm l] \tag{12}$$

式(11)对时间求导，得到雅可比速度元

$$\nabla \dot{\boldsymbol{J}} = l\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{\mathrm{d}t} = -l\omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \tag{13}$$

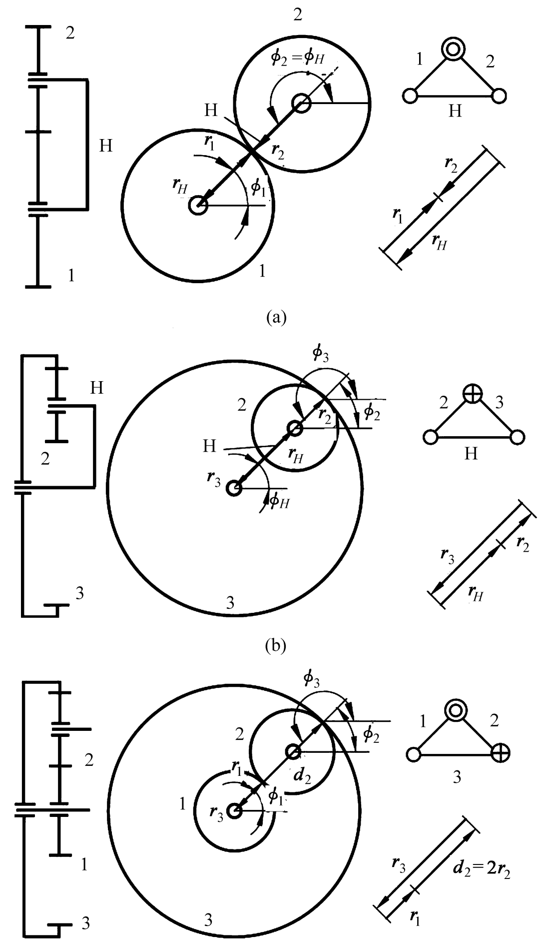
式中　ω——构件的角速度

式(13)表示节点处的向心加速度，负号表示方向与 $\boldsymbol{l}$ 相反。向心加速度不对角加速度的传递产生影响。因此，如果只分析轮系的角运动传递，可以认为轮系中任何构件的雅可比速度元为

$$\nabla \dot{\boldsymbol{J}} = [0]$$

由于$\nabla \dot{\boldsymbol{J}}=[0]$,组成整个机构的雅可比速度矩阵时,有$\dot{\boldsymbol{J}}=[0]$和$\dot{\boldsymbol{B}}=[0]$。因此,对于齿轮传动,如果求出了齿轮的角速度计算公式,比较式(2)和式(3)可知,将角速度计算公式的各齿轮的角速度替换为对应齿轮的角加速度,就直接得到角加速度的计算公式。所以,下面不再讨论轮系的角加速度计算。

利用矢量元和式(1)可以确定轮系的一个封闭环中各轮的齿数关系。但矢量元对构件的角速度计算没有直接影响。所以,下面仅讨论各构件的用齿数表示的雅可比元。



(a)　(b)　(c)

图1　轮系的基本封闭环

Fig. 1　Basic closed loop of gear train

(a) Ⅰ型　(b) Ⅱ型　(c) Ⅲ型

2.2　用齿数表示的雅可比元

2.2.1　圆柱齿轮组成的轮系

构件元与矢量经过的路径相关。圆柱齿轮组成的轮系各矢量的正向规定:外齿轮从轴心指向节点为正,内齿轮从节点指向轴心为正;连接两外齿轮的系杆(或机架)矢量,以从连接齿轮(行星轮)的回转轴心沿径向指向系杆的回转中心为正;而连接一外齿轮和一内齿轮的系杆的矢量,从系杆的回转中心沿径向指向连接齿轮(行星轮)的回转轴心为正。

根据封闭回路中矢量经过的路径,经过齿轮的矢量可以是由齿轮轴心沿径向指向节点的半径矢量$\boldsymbol{r}$,其长度为齿轮节圆半径r;也可以是从一个节点指向另一个节点的直径矢量$2\boldsymbol{r}$,这时的长度为齿轮节圆直径$2r$。将系杆看作是由一个轴心沿径向指向另一个轴心的杆矢量,其长度是其连接的太阳轮与行星轮半径的代数和。所以,在一个独立封闭环中,如果封闭环只经过相互啮合的齿轮(包括连接这两个齿轮的系杆),则方程中可以消去共同的参数$m\cos\alpha/(2\cos\alpha')$($m$是齿轮模数,$\alpha$和$\alpha'$分别是齿轮压力角和啮合角)(因此,以下节圆与分度圆的概念不再区分)。

根据式(12)得到用齿轮齿数表示的齿轮雅可比元为

$$\nabla \boldsymbol{J}_{\text{Gear}}=[\pm kz] \tag{14}$$

式中　k——齿轮矢量长系数,当矢量取齿轮节圆半径时,$k=1$;当矢量取齿轮节圆直径时,$k=2$

其中外齿轮取"+",内齿轮取"-"。

同样,由式(12)得到系杆的雅可比元为

$$\nabla \boldsymbol{J}_{\text{Carrier}}=[\pm(z_1\pm z_2)] \tag{15}$$

式中第1个"±"表示在封闭环中,系杆连接两个外齿轮(Ⅰ型),取"-";系杆连接一个外齿轮和一个内齿轮(Ⅱ型),取"+"。第2个"±"表示z_1为内齿轮时,取"-",否则取"+"。

在封闭环中机架的角速度等于零,其雅可比元$\nabla \boldsymbol{J}_{\text{Frame}}=[0]$,所以可不考虑。

各雅可比元正负号的规定也可以从图1中各矢量的$e^{i\phi}$关系中推导出来。注意:同一个系杆在不同的封闭环中,可能取不同的正负号。例如,在图2中,如果是内齿轮3、外齿轮2和系杆H组成的封闭环O_2BCO_2,则系杆的雅可比元取正;若是外齿轮1、外齿轮2和系杆H组成的封闭环$O_1ABO_2O_1$,则系杆的雅可比元取负。

因此,图1a中各构件的雅可比元为

$$\nabla \boldsymbol{J}_1=[z_1]\quad \nabla \boldsymbol{J}_2=[z_2]\quad \nabla \boldsymbol{J}_H=[-(z_1+z_2)]$$

图1b中各构件的雅可比元为

$$\nabla \boldsymbol{J}_2=[z_2]\quad \nabla \boldsymbol{J}_3=[-z_3]\quad \nabla \boldsymbol{J}_H=[z_3-z_2]$$

图1c中各构件的雅可比元为

$$\nabla \boldsymbol{J}_1=[z_1]\quad \nabla \boldsymbol{J}_2=[2z_2]\quad \nabla \boldsymbol{J}_3=[-z_3]$$

后面讨论时,有时在构件元上加注下标表示连接的运动副的路径,加注上标表示构件代号。如:$\nabla \boldsymbol{J}_{AB}^{5}$表示构件5中路径为连接A、B两运动副的雅可比元。如果不要指明路径,则用下标表示构件代号,如$\nabla \boldsymbol{J}_5$。

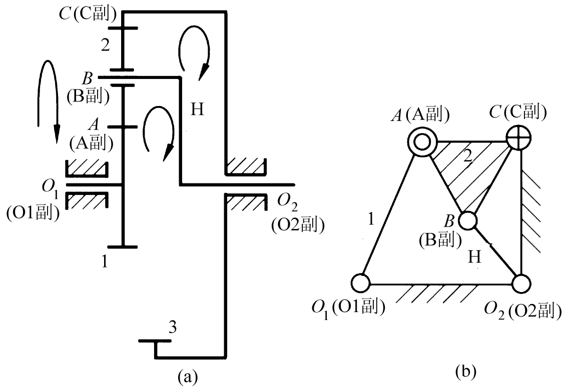


图 2　周转轮系的封闭环及轮系连接图

Fig. 2　Close loop of an epicylic gear train and the connecting graph

（a）轮系简图　（b）轮系连接图

2.2.2　圆锥齿轮组成的定轴轮系

2.2.1 节中讨论的齿轮雅可比元适用于定轴轮系以及复合轮系中的定轴轮系中的圆锥齿轮（实际也适用于蜗轮蜗杆），即

$$\nabla \boldsymbol{J}_{\mathrm{BGear}} = [z]$$

2.2.3　圆锥齿轮组成的周转轮系

如图 3a 所示，规定行星轮相对系杆的角速度 $\boldsymbol{\omega}_2^H$ 方向是从行星轮轴心指向系杆的回转轴心。当有两个行星轮且与中心轮啮合点分别位于系杆回转轴心的两侧（图 3b），则规定任意从一个行星轮轴心指向系杆的回转轴心作为 $\boldsymbol{\omega}_2^H$ 的正向。两个中心轮及系杆的转向相同，即矢量 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_3$、$\boldsymbol{\omega}_H$ 方向相同；它们的正向规定：在圆锥行星轮上画出箭头表示其回转方向，把该箭头指向的中心轮规定为主中心轮（图 3 中的轮 1），则从主中心轮的小端指向大端的方向规定为 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_3$、$\boldsymbol{\omega}_H$ 角速度的正向。在此规定下，分别得到中心轮、系杆和行星轮的雅可比元

$$\nabla \boldsymbol{J}_{\mathrm{SunGear}} = [z] \tag{16}$$

$$\nabla \boldsymbol{J}_{\mathrm{Carrier}} = [-z_S] \tag{17}$$

$$\nabla \boldsymbol{J}_{\mathrm{Planetary}} = [(-1)^{v+1} z] \tag{18}$$

式中　v——指向啮合点的箭头数

z_S——封闭环中与行星轮啮合的中心轮齿数

按规定的齿轮旋转方向分别在各齿轮上画出箭头表示其回转方向，v 表示指向啮合点的箭头数。例如，图 2 中 A 啮合点，$v=2$；图 2a 的 B 啮合点，$v=1$；图 2b 的 B 啮合点，$v=0$。

此时系杆的雅可比元取轮系封闭回路中与行星轮相啮合的中心轮齿数 z_S。

因此，图 3 的封闭环 Ⅰ 中各构件的雅可比元为

$\nabla \boldsymbol{J}_1 = [z_1]$　$\nabla \boldsymbol{J}_2 = [-z_2]$　$\nabla \boldsymbol{J}_H = [-z_1]$

图 3a 的封闭环 Ⅱ 中各构件的雅可比元为

$\nabla \boldsymbol{J}_3 = [z_3]$　$\nabla \boldsymbol{J}_2 = [z_2]$　$\nabla \boldsymbol{J}_H = [-z_3]$

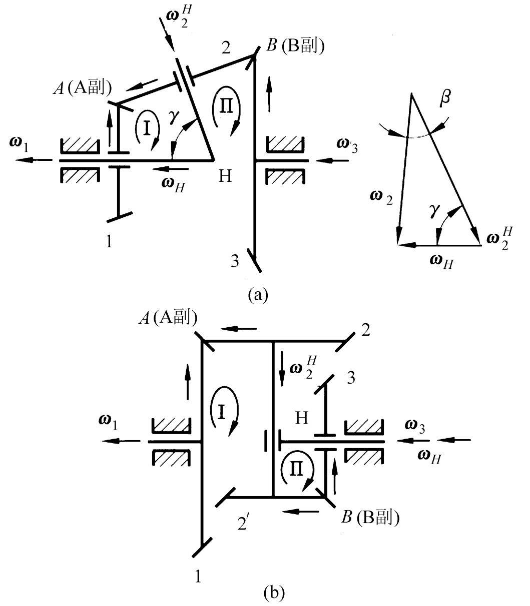


图 3　由锥齿轮组成的周转轮系

Fig. 3　Epicylic gear train consisting of bevel gears

（a）啮合点位于系杆回转轴心的同侧

（b）啮合点位于系杆回转轴心的两侧

图 3b 的封闭环 Ⅱ 中各构件的雅可比元为

$\nabla \boldsymbol{J}_3 = [z_3]$　$\nabla \boldsymbol{J}_2 = [-z_2']$　$\nabla \boldsymbol{J}_H = [-z_3]$

按上面构件元代入式（2）求出的行星轮角速度是行星轮相对系杆的角速度 $\boldsymbol{\omega}_2^H$。可以根据角速度多边形求行星轮的绝对角速度。由上面各构件角速度方向规定，画出角速度多边形（图 3a 右图），得到圆锥行星轮的绝对角速度为

$$\omega_2 = \sqrt{(\omega_2^H)^2 + (\omega_H)^2 - 2\omega_2^H \omega_H \cos\gamma} \tag{19}$$

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\omega_H}{\omega_2}\sin\gamma\right) \tag{20}$$

式中　β——行星轮实际瞬时回转轴线与行星轮轴心线的夹角

γ——行星轮轴心线与系杆回转轴线的夹角

各角速度的实际方向与假定方向相同用正值、相反方向用负值代入公式，行星轮的实际角速度方向依据角速度多边形来确定。

轮系各构件的雅可比元总结如表 1 所示。

3　轮系封闭环分析

3.1　轮系的连接图

为了便于观察与分析，轮系的回路不适合画成图 1 中相互平行的线条。轮系的回路可以采用各种形式。为便于用文献[7]的计算机自动分析独立回路的方法，参考文献[8]将齿轮机构齿轮连接成平面连杆机构，这里将其称为轮系连接图。在轮系连接图中，根据齿轮与其他构件连接情况，将齿轮绘制成直杆或多边形，回转副仍用○表示，而两个外齿轮

表1　齿轮及系杆的雅可比元

Tab.1　Jacobian units of gear and planet carrier

轮系类型	齿轮和系杆类型	雅可比元∇J
平面轮系及定轴空间轮系	外齿轮	$[kz]$
	内齿轮	$[-z]$
	系杆	$[-(z_1+z_2)]$（Ⅰ型）
		$[z_1-z_2]$（Ⅱ型）
锥齿轮周转轮系	中心轮	$[z]$
	行星轮	$[(-1)^{v+1}z]$
	系杆	$[-z_S]$

注：Ⅰ型中z_1、z_2是外齿轮齿数；Ⅱ型中z_1是内齿轮齿数，z_2是外齿轮齿数。

相啮合的齿轮副用◎表示，内齿轮与外齿轮啮合的齿轮副用⊕表示。机架用带阴影的直线段表示。例如，图2a的周转轮系可以转换为图2b所示的轮系连接图。

一个复杂的轮系通常由多个且相互独立的封闭环组成。机构独立封闭环的个数为

$$t=p-n+1 \tag{21}$$

式中　t——机构独立封闭环数

p——机构运动副数

实际上，图1c可以看成是图1a和图1b合成组成的。因此，图2中有3个封闭环$O_1ABO_2O_1$（Ⅰ型）、O_2BCO_2（Ⅱ型）和$O_1ACO_2O_1$（Ⅲ型），但独立封闭环仅有2个。

3.2　轮系的3种基本封闭环

根据式（1），构件元法以封闭环作为运动分析的基础。但在轮系（定轴轮系、周转轮系和复合轮系）中，为了直接利用齿轮齿数表示的雅可比元，必须要求封闭环经过的齿轮是相互啮合的，也就是必须是图1所示的3种形式。这里将其称为轮系的基本封闭环，分别称为Ⅰ型、Ⅱ型和Ⅲ型基本封闭环。在轮系连接图中，由不同构件组成的三边形或四边形就是轮系的基本封闭环。除回转副外，Ⅰ型基本封闭环中不含齿轮副⊕，但含一个◎；Ⅱ型含一个⊕；Ⅲ型含一个⊕和一个◎。即根据运动副符号直接可确定基本封闭环型式，便于计算机处理。图3的圆锥齿轮周转轮系的封闭环都属于Ⅰ型。

由于只允许相啮合的齿轮才构成基本封闭环，因此也可直接从机构简图中判断出基本封闭环，而不必绘制轮系连接图，参见图2a；如果要用计算机进行自动独立基本封闭环分析，可参考文献[7]的方法，但将该文中“与机架相连优先、含主动件优先”等优选原则改成：由不同构件组成，至少有一对齿轮副相啮合的三边形或四边形作为优先选择的独立封闭环。

4　复杂轮系运动分析示例

本文讨论的构件元法适用于由圆柱齿轮、圆锥齿轮和蜗轮蜗杆组成的各类轮系（定轴轮系、周转轮系和复合轮系）的运动分析。计算时，若有多个主动件，可假定某一旋转方向为正，相反方向用负值代入公式，求得的未知量的转向也依据计算结果的正负号来确定其转向。以下举3例说明本方法的应用。

例1：求图4a所示轮系中各构件的角速度。设已知各轮的齿数和齿轮1的角速度ω_1。

该轮系$n=7$，$p=11$，根据式（21），其独立封闭环数$t=5$。直接观察图4a的简图或图4b的轮系连接图，容易找出5个独立的封闭环分别为：O_1ABO_1（Ⅱ型）、$BCEB$（Ⅲ型）、$EDFE$（Ⅱ型）、$FGJF$（Ⅰ型）和$HGJH$（Ⅲ型）。

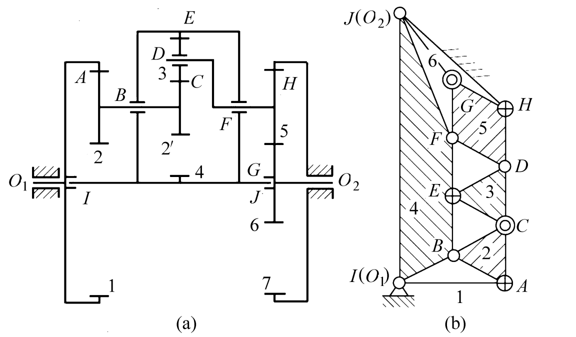


图4　双重周转轮系

Fig.4　Double epicyclic gear train

（a）轮系简图　（b）轮系连接图

构件1是主动件，$T_U=5$，$T_K=1$，$C=1$。$\dot{\boldsymbol{q}}=[\omega_1]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\boldsymbol{\phi}}=[\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\boldsymbol{\phi}}$、$\dot{\boldsymbol{q}}$中各变量的顺序，就构成了整个构件的已知和未知变量的顺序，利用有效因子$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{K}$就可以将各构件元按这个顺序加入到$\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{B}$对应的列中。

封闭环O_1ABO_1

$$\nabla \boldsymbol{J}^1_{O_1A}=[-z_1]\quad \nabla \boldsymbol{J}^2_{AB}=[z_2]\quad \nabla \boldsymbol{J}^4_{BI}=[z_1-z_2]$$

封闭环$BCEB$

$$\nabla \boldsymbol{J}^2_{BC}=[z_2']\quad \nabla \boldsymbol{J}^3_{CE}=[2z_3]\quad \nabla \boldsymbol{J}^4_{EB}=[-z_4]$$

封闭环$EDFE$

$$\nabla \boldsymbol{J}^3_{ED}=[z_3]\quad \nabla \boldsymbol{J}^4_{FE}=[-z_4]\quad \nabla \boldsymbol{J}^5_{DF}=[z_2'+z_3]$$

封闭环$FGJF$

$$\nabla \boldsymbol{J}^4_{JF}=[-(z_5+z_6)]\quad \nabla \boldsymbol{J}^5_{FG}=[z_5]\quad \nabla \boldsymbol{J}^6_{GJ}=[z_6]$$

封闭环$HGJH$

$$\nabla \boldsymbol{J}^5_{HG}=[2z_5]\quad \nabla \boldsymbol{J}^6_{GJ}=[z_6]\quad \nabla \boldsymbol{J}_{JH}=[0]$$

有效因子矩阵

$$\boldsymbol{U}_2=[1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0]\quad \boldsymbol{U}_3=[0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0]$$

$$\boldsymbol{U}_4=[0\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0]\quad \boldsymbol{U}_5=[0\quad 0\quad 0\quad 1\quad 0]$$
$$\boldsymbol{U}_6=[0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 1]\quad \boldsymbol{K}_1=[1]$$

由式(6)、(4)，可以组成整个机构的 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} z_2 & 0 & z_1-z_2 & 0 & 0\\ z_2' & 2z_3 & -z_4 & 0 & 0\\ 0 & z_3 & -z_4 & z_2'+z_3 & 0\\ 0 & 0 & -(z_5+z_6) & z_5 & z_6\\ 0 & 0 & 0 & 2z_5 & z_6 \end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -z_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

由式(2)，有

$$[\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6]^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{B}[\omega_1]^{\mathrm{T}}$$

解得

$$\begin{bmatrix}\omega_2\\ \omega_3\\ \omega_4\\ \omega_5\\ \omega_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_1\\ -z_2'(z_2'z_5+z_3z_5+z_2'z_6+z_3z_6+z_4z_5)/z_3\\ -z_2'z_5\\ z_2'(z_5+z_6)\\ -2z_2'z_5(z_5+z_6)/z_6 \end{bmatrix}\frac{z_1\omega_1}{M}$$

其中　$M_1=2z_2'z_5+2z_3z_5+2z_2'z_6+2z_3z_6+3z_4z_5+z_4z_6$

$$M=3z_2z_2'z_5-z_1z_2'z_5+2z_2z_3z_5+2z_2z_2'z_6+2z_2z_3z_6+3z_2z_4z_5+z_2z_4z_6$$

求得的未知量的转向依据计算结果的正负号来确定其与 ω_1 转向是否相同。

例 2：求如图 5a 所示复合轮系各构件的角速度。设已知各轮的齿数和齿轮 1、3 的角速度 ω_1、ω_3。

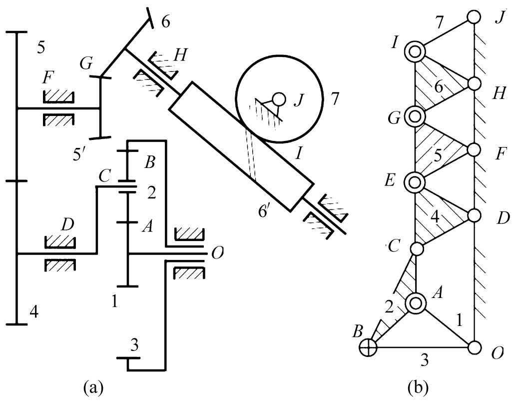


图 5　含定轴轮系的复合轮系

Fig. 5　Compound gear train consisted of fixed axis gear train

(a) 轮系简图　(b) 轮系连接图

本例是由含圆锥齿轮和蜗轮蜗杆的定轴轮系和基本周转轮系组成的复合轮系。

例 1 的求解过程是按便于计算机处理的步骤进行的。本例将采用直接观察法建立 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{B}$ 矩阵。由于每个构件只有一个角速度变量，因此整个机构的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 中每列代表未知角速度的构件，$\boldsymbol{B}$ 中每列则代表已知角速度的构件，而每行代表一个独立的封闭环。因此，可以在对应封闭环和对应构件位置上直接写入该构件的雅可比元，从而快速列出 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{B}$ 矩阵。而且，一个基本封闭环组成的角速度运动方程只由 3 项组成，也就是在式(2)中，每行(包括 $\boldsymbol{J}$、$\boldsymbol{B}$)仅有 3 个元素是非零的(如果基本封闭环中有一矢量是机架，则只有 2 个元素是非零)，其余元素都等于零。由此，可初步检查列出的方程是否正确。

该轮系 $n=7$，$p=11$，得到 $t=5$。直接观察简图或根据图 5b 的轮系连接图，可容易找出 5 个独立的基本封闭环分别为：$OACDO$(Ⅰ型)、$OBCDO$(Ⅱ型)(或Ⅲ型 $OABO$)、$DEFD$(Ⅰ型)、$FGHF$(Ⅰ型)和 $HIJH$(Ⅰ型)。构件 1、3 是主动件，$T_U=5$，$T_K=2$，$C=1$。$\dot{\boldsymbol{\phi}}=[\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7]^{\mathrm{T}}$，$\dot{\boldsymbol{q}}=[\omega_1,\omega_3]^{\mathrm{T}}$。以列分别代表未知运动的构件 2、4、5、6、7，行分别代表以上的封闭环，根据表 1 直接列出轮系的 $\boldsymbol{J}$ 为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix} z_2 & -(z_1+z_2) & 0 & 0 & 0\\ z_2 & z_3-z_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & z_4 & z_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & z_5' & z_6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & z_6' & z_7 \end{bmatrix}$$

同样，以列分别代表主动构件 1、3，行代表封闭环，由表 1 直接列出整个轮系的 $\boldsymbol{B}$ 为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} z_1 & 0\\ 0 & -z_3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由式(2)，有

$$[\omega_2,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega]^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{B}[\omega_1,\omega_3]^{\mathrm{T}}$$

解得

$$\begin{bmatrix}\omega_2\\ \omega_4\\ \omega_5\\ \omega_6\\ \omega_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [z_1\omega_1(z_2-z_3)+z_3\omega_3(z_1+z_2)]/z_2\\ \omega_1z_1+\omega_3z_3\\ -z_4(\omega_1z_1+\omega_3z_3)/z_5\\ z_4z_5'(\omega_1z_1+\omega_3z_3)/(z_5z_6)\\ -z_4z_5'z_6'(\omega_1z_1+\omega_3z_3)/(z_5z_6z_7) \end{bmatrix}\frac{1}{z_1+z_3}$$

由于该轮系轴线不相互平行，求解得到角速度的正负号并不代表其转向(若轮系中有相互平行的轴线，则仍然可以用正负号代表转向)，其转向要根据绘制箭头来决定。

例 3：求如图 6 所示轮系各构件的转速。设已知 $z_1=23$，$z_2=51$，$z_2'=18$，$z_3=92$，$z_3'=40$，$z_4=40$，$z_4'=17$，$z_5=33$，$n_1=1\ 500\ \mathrm{r/min}$。

先假定圆锥行星齿轮 4 相对系杆 H 的转向，其

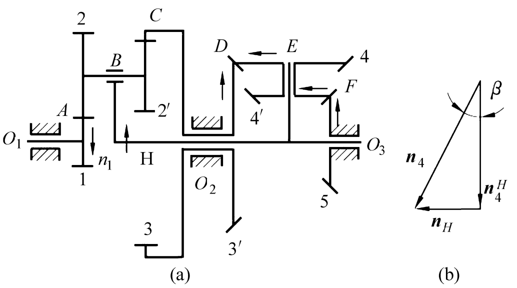


图 6 含锥齿轮的周转轮系

Fig. 6 Epicylic gear train consisted of bevel gears

(a) 轮系简图 (b) 转速多边形

箭头所指的中心轮 3′是主中心轮，按前面规定，得出中心轮 3′、5 和系杆 H 的假设转向如图 6 所示。4 个独立的基本封闭环分别为：O_1ABO_1、O_2BCO_2、O_2DEO_2和 O_3FEO_3。根据表 1 直接列出方程组

$$\begin{bmatrix} z_2 & 0 & 0 & -(z_1+z_2) \\ z_2' & -z_3 & 0 & z_3-z_2' \\ 0 & z_3' & (-1)^3 z_4 & -z_3' \\ 0 & 0 & (-1)^2 z_4' & -z_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_2 \\ n_3 \\ n_4^H \\ n_H \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} n_1$$

解得

$$\begin{bmatrix} n_2 \\ n_3 \\ n_4^H \\ n_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_2'z_3'z_4' + z_3z_4z_5 \\ z_2'(z_3'z_4' + z_4z_5) \\ z_2'z_3'z_5 \\ z_2'z_3'z_4' \end{bmatrix} \frac{z_1n_1}{z_1z_2'z_3'z_4' - z_2z_3z_4z_5}$$

代入齿数及轮 1 转速（注意 n_1 与假定的 n_3 方向相反，所以要以负值代入）。求出

$$[n_2, n_3, n_4^H, n_H]^{\mathrm{T}} = [780.112, 210.084, 138.655, 71.429]^{\mathrm{T}}$$

各值正号表示实际转向与原假定方向相同，但与 n_1 方向相反。画出行星轮 4 的转速矢量多边形（图 6b），将上述值代入式（19）、（20），得行星轮 4 的实际转速 $n_4 = 155.972$ r/min 及方向角 β 为 27.255 3°

从上述过程可以看出，本方法模块性强，整个过程特别方便计算机自动分析与处理。

5 结论

（1）提出了以轮系的最基本单元——齿轮与系杆，作为轮系运动方程建模单元的构件元法。具有很强的规律性，概念清晰，简单直观。无需区分其轮系组成，除空间轮系外，平面轮系无需绘制箭头，很方便地列出复杂轮系的运动方程，特别适用于计算机自动建模分析。

（2）轮系有 3 种形式的基本封闭环，其特点是在基本封闭环中齿轮相互啮合。利用轮系连接图分析，方便计算机自动分析独立基本封闭环。

（3）适用于任何复杂的定轴轮系、周转轮系、复合轮系等的运动分析。

参 考 文 献

1 陈良钰，薛隆泉．周转轮系自由度及运动分析的图论方法[J]．西安理工大学学报，2008，24(1)：98～102.
Chen Liangyu, Xue Longquan. Graph theory method to the freedom and motion analysis of epicyclic gear trains[J]. Journal of Xi'an University of Technology, 2008, 24(1): 98～102. (in Chinese)

2 段钦华，张维平．周转轮系运动分析的列表法[J]．成都大学学报：自然科学版，2004，23(3)：30～33.
Duan Qinhua, Zhang Weiping. The tabular method of kinematics analysis of epicyclic gear trains[J]. Journal of Chengdu University: Natural Science, 2004, 23(3): 30～33. (in Chinese)

3 符炜．复数矢量法在周转轮系传动比计算中的应用[J]．机械科学与技术，2000，19(2)：261～262.
Fu Wei. Application of complex number vector method in calculation of gear ratio of planetary gear trains[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(2): 261～262. (in Chinese)

4 杨斌久，朱希田，丛树仁．计算轮系传动比的节点方程法[J]．吉林化工学院学报，1997，14(3)：58～61.

5 胡青春，段福海，莫海军．复杂行星齿轮系运动学分析及效率计算[J]．中国机械工程，2006，17(20)：2 125～2 129.
Hu Qingchun, Duan Fuhai, Mo Haijun. Kinematic analysis and efficiency calculation for complex planetary gear trains[J]. China Mechanical Engineering, 2006, 17(20): 2 125～2 129. (in Chinese)

6 王成志，黄凯旋，张全明，等．基于构件元的平面连杆机构运动分析自动建模方法[J]．农业机械学报，2010，41(2)：214～220，226.
Wang Chengzhi, Huang Kaixuan, Zhang Quanming, et al. Automated modeling for kinematic analysis of planar linkages based on link units[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2010, 41(2): 214～220, 226. (in Chinese)

7 王成志．含复铰连杆机构的拓扑表示与其回路的自动分析[J]．农业机械学报，2009，40(2)：199～203.
Wang Chengzhi. Topological representation and automatic kinematic loop analysis for linkages with multiple joints[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(2): 199～203. (in Chinese)

8 Moise Victor, Tabara Iulian Alexandru. The kinematics of the planetary cylindrical gears using the independent loops method [J]. Mechanical Engineering: Series D, 2004, 66(2): 85～95.