

# 圆柱螺纹牙型非接触检测失真校正\*

沈萌红<sup>1</sup> 沈绍锋<sup>1</sup> 王贤成<sup>2</sup> 陈俊华<sup>2</sup> 曾成洲<sup>2</sup>

(1. 浙江大学机械工程学系, 杭州 310027; 2. 浙江大学宁波理工学院机电分院, 宁波 315100)

**【摘要】** 在对圆柱螺纹进行非接触检测时, 螺纹牙型会产生失真现象, 为此提出图像校正的方法。从螺纹牙型失真的几何原理出发, 建立相应的螺纹数学模型, 对采集的螺纹图像进行校正, 获得真实的螺纹牙型, 并通过软件仿真和试验验证了该模型的正确性。同时表明图像校正的方法提高了圆柱螺纹非接触检测的精度、效率。

**关键词:** 圆柱螺纹 非接触检测 失真 校正

**中图分类号:** TG85; TH741 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2011)10-0224-06

## Distortion Calibration of Parallel Screw Thread Form Based on Non-contact Measurement

Shen Menghong<sup>1</sup> Shen Shaofeng<sup>1</sup> Wang Xiancheng<sup>2</sup> Chen Junhua<sup>2</sup> Zeng Chengzhou<sup>2</sup>

(1. Department of Mechanical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

2. Institute of Mechanical and Electrical Engineering, Ningbo Institute of Technology of Zhejiang University, Ningbo 315100, China)

### Abstract

Thread form showed distortion when measuring parallel screw thread parameters by using non-contact method. The traditional way had some defects, such as time consuming, skilled operator, high-precision equipment for adjustment and so on. Hence, a method through digital image calibration was presented. Based on the thread geometrical principle, the mathematical model was given out. With the above thread mathematic model, images obtained from camera were corrected and real thread form could be got. With the results of related experiments and simulation, the mathematic model was certified. This proposed method could improve accuracy and efficiency of thread measurement and detection.

**Key words** Parallel screw thread, Non-contact measurement, Distortion, Calibration

### 引言

螺纹在机器设备标准零件中被广泛使用, 提高其检测水平具有重要意义<sup>[1-3]</sup>。

通过接触检测获得螺纹重要参数的方法有螺纹千分尺、三针法等<sup>[4-5]</sup>, 但是这些方法都存在缺点<sup>[6-7]</sup>, 例如费时、出错率高, 对操作人员要求较高。

近年来, 数字图像处理技术特别是几何运算算法和图像处理算法取得了突破性进展<sup>[8-10]</sup>。Canny J<sup>[11]</sup>提出了一种基于计算机技术的边界检测方法。Pavlidis T 等<sup>[12]</sup>提出了一种图像分割的算法, 这种

方法能将区域生长和边界检测联系起来。Jiang Xiaoyi<sup>[13]</sup>等基于扫描线近似技术提出了一种新的边界检测算法, 可用于各种图像处理中。

基于各种图像处理算法, 出现了一系列非接触螺纹自动检测系统。Joshua Mutambi 等<sup>[14]</sup>提出了运用数字图像处理技术来测量螺纹参数的方法, 包括 CCD 摄像机校正、图像获取、边界检测、图像处理、数据分析、误差分析。Shen Shaowei<sup>[15]</sup>开发了基于 CCD 摄像机的螺纹参数非接触测量系统。Gadelmawla E S<sup>[16]</sup>运用 Microsoft Visual C++ 6.0 开发了圆柱螺纹自动检测、监控系统, 这种系统不仅

收稿日期: 2011-03-18 修回日期: 2011-05-27

\* 国家自然科学基金资助项目(50645032)、浙江省自然科学基金资助项目(Y105686)、宁波市科研攻关资助项目(200703B1003018)和宁波市自然科学基金资助项目(2008A610038)

作者简介: 沈萌红, 副教授, 主要从事视觉检测、自动控制研究, E-mail: hot@zju.edu.cn

能检测各种螺纹,而且能检测螺纹大部分的参数(16种),提供参照螺纹和偏差范围检测。

上述基于 CCD 摄像机的非接触检测系统主要通过图像处理算法的改进、优化,软硬件系统的不断完善来提高螺纹检测的精度,并未研究通过图像处理来消除螺纹牙型失真。因此,本文从螺纹的空间几何原理出发,提出运用图像校正的方法来消除螺纹牙型的失真。

### 1 圆柱螺纹牙型失真现象

螺纹的非接触检测通常是控制 CCD 摄像机扫描螺纹投影,并对投影图像进行预处理、二值化、边界检测、参数提取,如图 1 所示。当螺纹轴线与 CCD 摄像机轴线平行时,获得的螺纹投影中,螺纹牙型会产生失真现象。

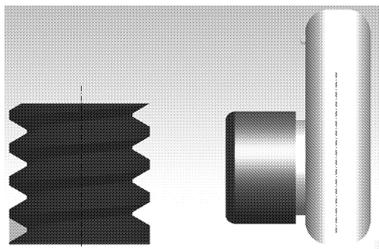


图 1 螺纹轴线与 CCD 摄像机轴线平行示意图  
Fig.1 Schematic diagram of thread axis paralleled to CCD camera axis

螺纹牙型边界会形成阴影区域,从而无法获得真实的螺纹牙型,造成测量误差,如图 2 所示。

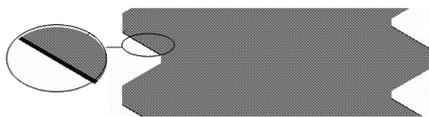


图 2 螺纹牙型边界形成的阴影  
Fig.2 Shadow of border of thread form

传统的处理方法是使螺纹轴线与 CCD 摄像机轴线保持一个螺纹升角  $\phi$ ,从而消除因为螺纹几何关系造成的螺纹牙型投影失真,如图 3 所示。然而,这种传统的解决方法存在着费时、对操作人员要求较高、需要高精度的调整设备等缺点。

### 2 圆柱螺纹牙型失真几何原理分析

构建如图 4 所示的三维坐标系,螺纹轴线平行于  $z$  轴方向,投影方向沿  $y$  轴方向。坐标平面  $xOz$  为螺纹轴截面,它与螺纹牙相交形成的直线(例如直线  $AB$ 、直线  $A'B'$ )为真实的螺纹牙型,反映了真实的螺纹参数信息。

如图 5 所示,真实螺纹牙型直线  $AB$  绕螺纹轴线旋转  $180^\circ$  到达直线  $A'B'$ ,形成空间曲面  $\Omega$ 。平面

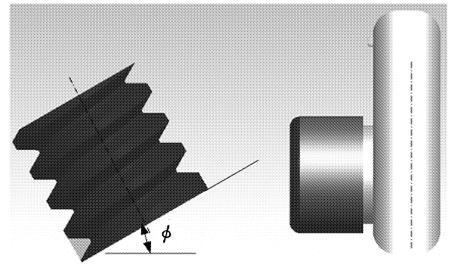


图 3 螺纹轴线与 CCD 摄像机轴线不平行示意图  
Fig.3 Schematic diagram of thread axis non-parallelled to CCD camera axis

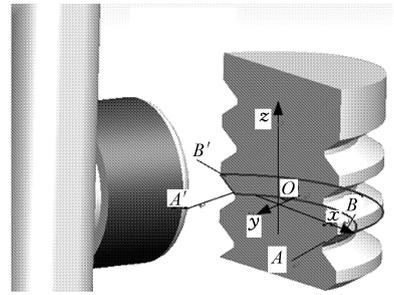


图 4 三维空间投影关系  
Fig.4 Projection relation on 3-D space

$x = a (x_A \leq a \leq x_B)$  平行于坐标平面  $yOz$ ,与直线  $AB$  相交于一点  $M$ ,点  $M$  绕螺纹轴线旋转  $180^\circ$  达到点  $M'$ ( $M'$ 在直线  $A'B'$ 上),形成空间曲线  $s_1$ 。点  $M'$  是平面  $x = -a$  与真实螺纹牙型直线  $A'B'$  的交点。

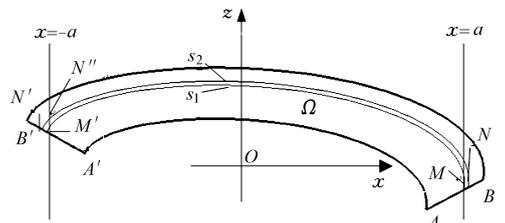


图 5 螺纹空间几何关系  
Fig.5 Thread geometric relation on 3-D space

在直线  $MB$  上取一点  $N(x_M \leq x_N \leq x_B)$ ,点  $N$  绕螺纹轴线旋转  $180^\circ$  达到点  $N'$ ,形成空间曲线  $s_2$ 。 $s_2$  与平面  $x = -a$  相交于一点  $N''$ ( $N$  绕螺纹轴线旋转小于  $180^\circ$ )。在平面  $x = -a$  上,当点  $N''$  的值小于点  $M'$ ( $z_{N''} \leq z_{M'}$ ) 时,真实螺纹牙型上的点  $M'$  就会被遮蔽,如图 6 所示。

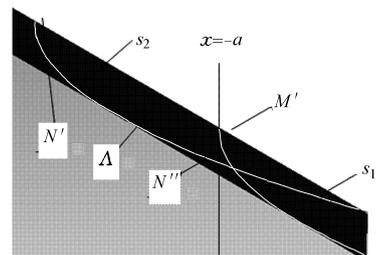


图 6 真实螺纹牙型阴影  
Fig.6 Shadow of real thread form

任意点  $N$  都会在平面  $x = -a$  上形成阴影点, 从而直线  $MB$  在平面  $x = -a$  上形成一条阴影直线。

在平面  $x = a$  上,  $a$  取  $[x_A, x_B]$  之间的任意值时, 形成如图 6 所示的阴影区域  $\Lambda$ 。

### 3 圆柱螺纹数学模型

在图 5 中, 点  $A$  的坐标为  $(x_A, z_A)$ , 直线  $AB$  的斜率为  $k$ , 所以直线  $AB$  可以表示为

$$z = k(x - x_A) + z_A \quad (1)$$

点  $M(x_M, z_M)$  是平面  $x = a$  和直线  $AB$  的交点, 所以满足

$$\begin{cases} x_M = a \\ z_M = k(x_M - x_A) + z_A \end{cases} \quad (2)$$

其中变量  $a$  表示螺纹牙型上的点与螺纹轴线的距离, 其范围为  $[x_A, x_B]$ 。

点  $M$  绕螺纹轴线旋转  $180^\circ$  达到点  $M'$  ( $M'$  在直线  $A'B'$  上), 所以点  $M'$  可表示为

$$\begin{cases} x_{M'} = -a \\ z_{M'} = k(x_{M'} - x_A) + z_A + \frac{p}{2} \end{cases} \quad (3)$$

点  $N''$  是空间曲线  $s_2$  与平面  $x = -a$  的交点 ( $N$  绕螺纹轴线旋转小于  $180^\circ$ ),  $p$  是螺纹的螺距, 所以满足

$$\begin{cases} x_{N''} = x_N \cos \alpha = -a \\ z_{N''} = k(x_N - x_A) + z_A + p \frac{\beta}{2\pi} \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\beta = \arccos \frac{-a}{x_N}$

式中  $\beta$ ——点  $N$  绕螺纹轴线旋转角度, 它的取值范围为  $[0, \pi]$

由式(4), 可以得到

$$z_{N''} = k(x_N - x_A) + z_A + \frac{p}{2\pi} \arccos \frac{-a}{x_N} \quad (5)$$

$(x_N \in [x_M, x_B])$

$$z_{\text{visual}} = \tan \frac{\alpha}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\pi^2 a^4 \tan^4 \frac{\alpha}{2} + a^2 p^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}{2\pi \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} - x_A \right) + z_A + \frac{p}{2\pi} \arccos \left( -a \left( \sqrt{\frac{\pi a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\pi^2 a^4 \tan^4 \frac{\alpha}{2} + a^2 p^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}{2\pi \tan^2 \frac{\alpha}{2}}} \right)^{-1} \right) \quad (12)$$

由式(3)得到真实螺纹牙型边界方程(直线  $A'B'$ )为

$$z_{\text{real}} = (a - x_A) \tan \frac{\alpha}{2} + z_A + \frac{p}{2} \quad (13)$$

对于平面  $x = -a$ , 为求得阴影区域  $\Lambda$  在平面  $x = -a$  上的边界值, 即  $z_{N''}$  在  $x_N \in [x_M, x_B]$  上的最小值, 对式(5)求导可得

$$z'_{N''} = k - \frac{ap}{2\pi x_N^2 \sqrt{\frac{1-a^2}{x_N^2}}} \quad (6)$$

令式(6)为零可得

$$4\pi^2 k^2 x_N^4 - 4\pi^2 k^2 a^2 x_N^2 - a^2 p^2 = 0 \quad (7)$$

求解式(7), 可以得到

$$x_N = \sqrt{\frac{\pi k^2 a^2 + \sqrt{\pi^2 k^4 a^4 + k^2 a^2 p^2}}{2\pi k^2}} \quad (8)$$

对于平面  $x = -a$ , 如果螺纹牙型不产生阴影, 则式(5)取得极值时, 点  $M$  和点  $N$  为同一点, 即  $x_N = x_M = a$ , 代入式(8)化简可得

$$k^2 a^2 p^2 = 0 \quad (9)$$

对于圆柱螺纹而言, 只有牙型角为零 ( $k=0$ ) 或螺距为零 ( $p=0$ ) 时, 螺纹真实牙型边界才不会形成阴影区域。

将式(8)代入式(5), 得到平面  $x = -a$  处  $z_{N''}$  的最小值, 即阴影边界点

$$z_{N''} = k \left( \sqrt{\frac{\pi k^2 a^2 + \sqrt{\pi^2 k^4 a^4 + k^2 a^2 p^2}}{2\pi k^2}} - x_A \right) + z_A + \frac{p}{2\pi} \arccos \frac{-a}{\sqrt{\frac{\pi k^2 a^2 + \sqrt{\pi^2 k^4 a^4 + k^2 a^2 p^2}}{2\pi k^2}}} \quad (10)$$

对于式(10),  $a$  取  $[x_A, x_B]$  的任意值时, 就形成了阴影区域  $\Lambda$  的阴影边界线, 如图 6 所示。

令螺纹牙型角为  $\alpha$ , 则斜率  $k$  可以表示为

$$k = \tan \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 则阴影区域  $\Lambda$  的阴影边界线可表示为

为了校正螺纹图像, 需要得到真实螺纹牙型边界方程和阴影区域阴影边界方程的差值方程, 将式(13)减去式(12)可得

$$z_{\text{visual}} = \tan \frac{\alpha}{2} \left( a - \frac{\sqrt{\pi a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\pi^2 a^4 \tan^4 \frac{\alpha}{2} + a^2 p^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{2\pi \tan^2 \left( \frac{\alpha}{2} \right)} \right) - \frac{p}{2\pi} \arccos \left( -a \left( \frac{\sqrt{\pi a^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\pi^2 a^4 \tan^4 \frac{\alpha}{2} + a^2 p^2 \tan^2 \frac{\alpha}{2}}}}{2\pi \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^{-1} \right) + \frac{p}{2} \quad (14)$$

### 4 螺纹数学模型仿真

为验证所建立的螺纹数学模型正确性,选用 M20 普通螺纹,螺距  $p = 2 \text{ mm}$ ,牙型角  $\alpha = 60^\circ$ ,运用软件 Matlab 进行模拟仿真。绘制圆柱螺纹真实牙型曲线、阴影区域边界曲线和校正所需的差值曲线。在图 7 中,阴影区域在螺纹牙型各个区域都存在,从而造成了螺纹牙型的失真,无法获得真实的螺纹参数。图 8 显示了校正差值与螺纹轴线距离  $a$  的关系。

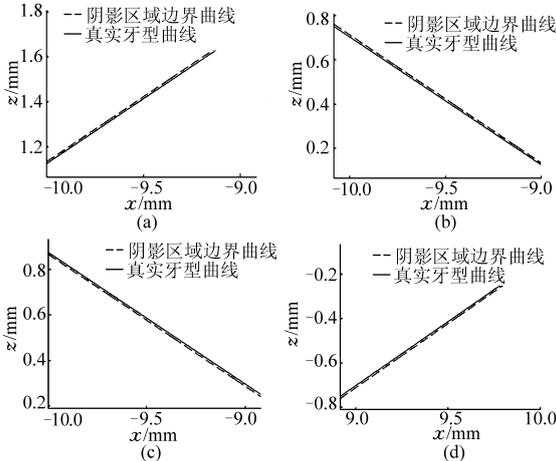


图 7 仿真曲线

Fig. 7 Simulation curves

- (a) 螺纹牙型左上侧 (b) 螺纹牙型右上侧
- (c) 螺纹牙型左下侧 (d) 螺纹牙型右下侧

5403)、光源、变压器、电源线、网线、机架、螺纹量规。CCD 摄像机采集的螺纹图像通过网线传入上位机,运用康耐视公司图像处理软件 In-Sight Explorer 4. 3. 0 完成螺纹参数的提取。

选用螺纹塞规 (M20 × 2) 作为试验对象<sup>[17]</sup>,采集其图像,通过一系列处理来完成数学模型的验证,同时根据建立的数学模型完成真实螺纹牙型的重构。

图 9 显示了对 CCD 摄像机获得的螺纹图像进行校正的过程,通过软件 Matlab 获得真实螺纹牙型上的点及其差值。同时,通过软件 In-Sight Explorer 4. 3. 0 可以从图像中提取螺纹牙型阴影区域边界上的点,这些点的值减去相应的差值,就可以得到校正后点,通过曲线拟合得到真实螺纹牙型。与通过软件 Matlab 获得的理想数学模型上的点比较,可以验证该图像校正方法的可行性。

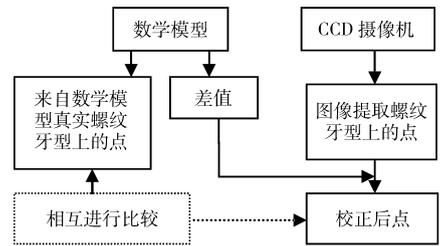


图 9 图像校正处理流程图

Fig. 9 Flow chart of image calibration processing

### 5.2 真实螺纹牙型重构

从 CCD 摄像机获得的螺纹塞规图像如图 10 所示。

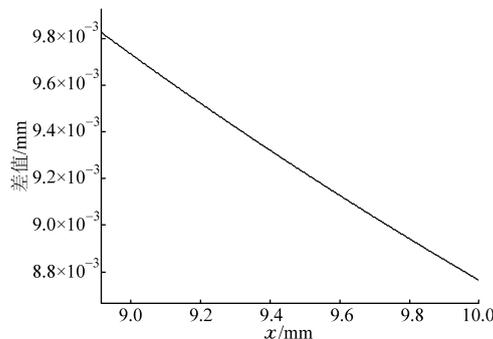


图 8 差值曲线

Fig. 8 Derivation curves

## 5 数学模型验证和真实螺纹牙型重构

### 5.1 螺纹数学模型验证

螺纹非接触检测设备包括 CCD 摄像机 (in-sight

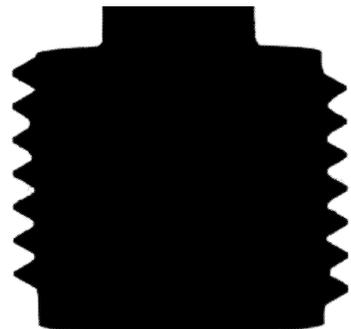


图 10 CCD 摄像机获得的图像

Fig. 10 Image obtained from CCD camera

在螺纹图像中,从右上侧螺纹牙型获得 10 个

点,范围在 9.0~9.9 mm,如图 11 所示。

表 1 为试验数据以及数据分析的结果。序号 1 是点与螺纹轴线的距离,序号 2 是图像上提取的阴影区域阴影点,序号 3 是校正所需的差值,序号 4 是校正后真实螺纹牙型上点,序号 5 是理想螺纹牙型上点。序号 6 为理想螺纹牙型上点与校正所得真实螺纹牙型上点的差值,最大偏差值 7.2  $\mu\text{m}$ 。

为消除其他因素对螺纹测量精度的影响,本文对各个影响因素进行严格控制,并选择 20 个标准螺纹塞规(M20 $\times$ 2)作为样品,编号为 1~20。根据上述图像校正方法,得到螺纹图像校正结果,螺纹塞规

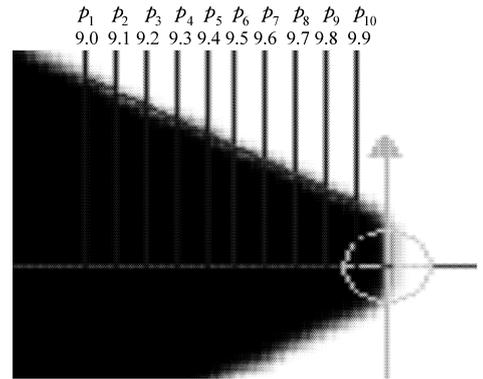


图 11 图像提取

Fig. 11 Image extraction

表 1 螺纹图像校正结果

Tab. 1 Calibration results of thread image

序号	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_7$	$P_8$	$P_9$	$P_{10}$	mm
1	9.0	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	
2	0.715 1	0.657 8	0.600 4	0.543 1	0.485 8	0.428 4	0.371 1	0.313 8	0.256 4	0.198 8	
3	0.009 7	0.009 6	0.009 5	0.009 4	0.009 3	0.009 2	0.009 1	0.009 0	0.008 9	0.008 9	
4	0.705 4	0.648 2	0.590 9	0.533 7	0.476 5	0.419 2	0.362 0	0.304 8	0.247 5	0.189 9	
5	0.702 4	0.644 6	0.586 9	0.529 1	0.471 4	0.413 7	0.355 9	0.298 2	0.240 5	0.182 7	
6	0.003 0	0.003 6	0.004 0	0.004 6	0.005 1	0.005 5	0.006 1	0.006 6	0.007 0	0.007 2	

样品最大偏差值分别为 7.2  $\mu\text{m}$ 、6.9  $\mu\text{m}$ 、6.9  $\mu\text{m}$ 、7.1  $\mu\text{m}$ 、7.2  $\mu\text{m}$ 、7.2  $\mu\text{m}$ 、6.9  $\mu\text{m}$ 、7.1  $\mu\text{m}$ 、7.1  $\mu\text{m}$ 、7.2  $\mu\text{m}$ 、7.2  $\mu\text{m}$ 、6.8  $\mu\text{m}$ 、6.9  $\mu\text{m}$ 、7.1  $\mu\text{m}$ 、7.0  $\mu\text{m}$ 、7.3  $\mu\text{m}$ 、7.2  $\mu\text{m}$ 、6.9  $\mu\text{m}$ 、6.9  $\mu\text{m}$ 、7.2  $\mu\text{m}$ 。从统计结果可知:对于各个螺纹塞规,最大偏差值差别较小,这个偏差值主要由螺纹牙型失真引起,而通过图像校正可以消除螺纹牙型失真。

得到校正后的螺纹牙型上的点后,运用曲线拟合的方法就可以得到真实螺纹牙型,如图 12 所示。

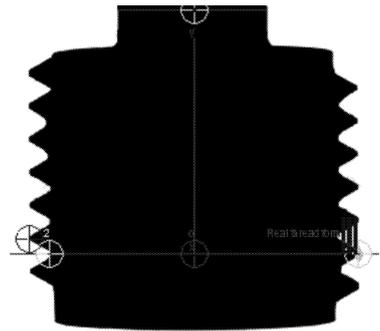


图 12 真实螺纹牙型边界拟合结果

Fig. 12 Edge fitting results of real thread form

## 6 结论

(1)通过对螺纹几何原理的分析,建立了螺纹的数学模型,包括真实螺纹牙型方程、阴影区域阴影边界方程、差值方程。

(2)运用软件 Matlab 进行模拟仿真,绘制圆柱螺纹真实牙型曲线、阴影区域边界曲线和校正所需

的差值曲线。

(3)通过一系列的试验和数据采集,发现校正后点和理想牙型上的点很吻合。通过曲线拟合,重建了真实的螺纹牙型,因此可以获得更精确的螺纹参数,包括牙型角、螺距、中径。

## 参 考 文 献

- 沈少伟,颜树华,周春雷,等. 基于 CCD 视觉的螺纹参数自动检测技术研究[J]. 半导体光电,2007,28(6):865~869. Shen Shaowei, Yan Shuhua, Zhou Chunlei, et al. Research of automatic detection technology of thread parameters based on CCD vision[J]. Semiconductor Optoelectronics,2007,28(6):865~869. (in Chinese)
- 胡汉平. 基于数字图像处理的锥螺纹参数检测技术研究[D]. 长春:长春科技大学,2008. Hu Hanping. The research on parameter detection of conical thread based on digital image processing[D]. Changchun: Changchun University of Science and Technology,2008. (in Chinese)
- 王锐. 基于数字图像处理的油管螺纹检测方法的研究[D]. 武汉:武汉理工大学,2009. Wang Rui. The research on detection method of tubing thread based on digital image processing[D]. Wuhan: Wuhan

- University of Technology, 2009. (in Chinese)
- 4 张红岩, 张国雄. 大螺纹在线测试系统[J]. 机械工程学报, 2008, 44(12): 199 ~ 202.  
Zhang Hongyan, Zhang Guoxiong. Online test system of large screw thread[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(12): 199 ~ 202. (in Chinese)
  - 5 杨丽君. 锥螺纹在线检测系统中的图像处理方法研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2006.  
Yang Lijun. Research on image processing method in taper thread-online measuring system[D]. Xi'an: Xi'an University of Electronic Science and Technology, 2006. (in Chinese)
  - 6 Tong Q B, Ding Z L, Chen J C, et al. The research of screw thread parameter measurement based on position sensitive detector and laser[J]. Journal of Physics: Conference Series, 2006, 48(1): 561 ~ 565.
  - 7 Lu Dong, Lu Zhihang, Feng Dawei. Measuring thread system using laser fiber sensor[C] // Proceedings of International Society for Optical Engineer, 2002.
  - 8 Robinson M J, Oakley J P, Cunningham M J. The accuracy of image analysis methods in spur gear metrology[J]. Measurement Science and Technology, 1995, 6(7): 323 ~ 344.
  - 9 Canny J. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, 8(6): 679 ~ 698.
  - 10 Frank Chen, Gordon M Brown, Mumin Song. Overview of three-dimensional shape measurement using optical methods[J]. Optical Engineering, 2000, 39(1): 10 ~ 22.
  - 11 Canny J. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, 8(6): 679 ~ 698.
  - 12 Pavlidis T, Liow Y T. Integrating region growing and edge detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(3): 225 ~ 233.
  - 13 Jiang Xiaoyi, Horst Bunke. Edge detection in range images based on scan line approximation[J]. Computer Vision and Image Understanding, 1999, 73(2): 183 ~ 199.
  - 14 Joshua Mutambi, Yu Lijun. Application of digital image analysis method in metric screw thread metrology[J]. Journal of Shanghai University: English Edition, 2004, 8(2): 208 ~ 212.
  - 15 Shen Shaowei, Yan Shuhua, Zhou Chunlei, et al. Research based on the CCD vision thread parameters automatic detection technology[C] // Electronic Measurement and Instruments, 2007. ICEMI'07. 8th International Conference on. Xi'an: 2007. ICEMI'2007, 2007: 2-969 ~ 2-973.
  - 16 Gadelmawla E S. A novel system for automatic measurement and inspection of parallel screw threads[J]. Sage Publications, 2004, 218(5): 545 ~ 556.
  - 17 GB/T 3934—2003 普通螺纹量规 技术条件[S]. 2003.  
GB/T 3934—2003 Specification of gauges for general purpose screw threads[S]. 2003. (in Chinese)

(上接第 223 页)

- 10 Yan W, Komvopoulos K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces[J]. J. App. Phys., 1998, 84(7): 3 617 ~ 3 624.
- 11 洗亮, 秦力, 郑林庆. 应用光全反射法及图像处理技术研究真实接触面积[J]. 摩擦学学报, 1992, 12(2): 110 ~ 115.  
Xian Liang, Qin Li, Zheng Linqing. Investigation of real contact area through the application of total reflection method and image process technique[J]. Tribology, 1992, 12(2): 110 ~ 115. (in Chinese)
- 12 高志, 吴宗泽, 郑林庆. 用声显微镜技术测量真实接触面积的研究[J]. 摩擦学学报, 1994, 14(1): 79 ~ 83.  
Gao Zhi, Wu Zongze, Zheng Linqing. The research of real contact area through acoustic microscope[J]. Tribology, 1994, 14(1): 79 ~ 83. (in Chinese)
- 13 张斌, 徐锦芬. 摩擦过程中真实接触面积的灰色分析[J]. 摩擦学学报, 1996, 16(1): 61 ~ 69.  
Zhang Bin, Xu Jinfen. Grey model analysis on real contact area during friction process[J]. Tribology, 1996, 16(1): 61 ~ 69. (in Chinese)
- 14 盛选禹, 雒建斌, 温诗铸. 基于分形接触的静摩擦系数预测[J]. 中国机械工程, 1998, 9(7): 16 ~ 18.  
Sheng Xuanyu, Luo Jianbin, Wen Shizhu. Static friction coefficient model based on fractal contact[J]. China Mechanical Engineering, 1998, 9(7): 16 ~ 18. (in Chinese)
- 15 贺朱, 朱均. 粗糙表面接触分形模型的提出与发展[J]. 摩擦学学报, 1996, 16(4): 375 ~ 384.  
He Lin, Zhu Jun. Fractal model for contact of rough surfaces[J]. Tribology, 1996, 16(4): 375 ~ 384. (in Chinese)