

3-RPS 并联机构正解快速数值算法*

韩方元 赵丁选 李天宇

(吉林大学机械科学与工程学院, 长春 130025)

【摘要】 提出了一种求解3-RPS 并联机构正解的快速数值解法。利用3-RPS 型并联机构的结构特征, 首先计算出一组位姿坐标作为迭代初值, 然后通过逆解求出上平台各个铰支点的坐标, 并对其进行修正, 得到一组新的位姿坐标。如此反复迭代, 最终得到精确解。新算法物理模型清晰, 计算公式简单。由于不需要计算雅可比矩阵及其逆阵, 所以计算工作量较小。在相同的计算环境下, 达到相同的精度, 新算法计算速度是现有算法的1.5倍, 因而适于实时控制。

关键词: 并联机构 运动学正解 算法 数值解法

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2011)04-0229-05

A Fast Forward Algorithm for 3-RPS Parallel Mechanism

Han Fangyuan Zhao Dingxuan Li Tianyu

(College of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract

This paper presented a fast forward algorithm for 3-RPS (revolute-prismatic-spherical) parallel mechanism. Based on the structure feature of 3-RPS parallel mechanism, firstly, a group of position and orientation coordinates were calculated as the initial value, then the coordinates of each hinge fulcrum on the platform by means of reverse algorithm were obtained and adjusted. No derivative operation or Jacobi matrix inverse operation was needed in proposed algorithm. It effectively reduced the computational load, and the formula was simple. In the same computing environment, the calculation experiment results showed that the amount of programming of the proposed algorithm was only 40% of the existing algorithms, the calculation speed of the proposed algorithm was about 1.5 times of the existing algorithms to achieve the same accuracy. It can be applied to online control.

Key words Parallel mechanism, Forward kinematics, Algorithm, Numerical method

引言

在实时控制计算中, 3-RPS 型并联机构多运用数值算法求正解。主要有两大类数值求解方法: 使用 Newton 法或 Newton-Raphson 法来求其正解^[1-4], 这一类算法, 每次迭代都要计算雅可比矩阵及其逆阵, 需要较大的计算工作量; 另一类不使用雅可比矩阵求其正解^[5-7], 但算法比较复杂, 计算精度有时不能达到要求。本文在深入分析 3-RPS 型并联机构结构特征的基础上, 提出适合于 3-RPS 型并联机构实时控制的一种正解快速数值算法。

1 问题描述及现有的反解和正解算法

1.1 问题描述

本文研究对象(图1)是 3-RPS 型并联机构。该机构由基础平台、上平台及连接它们的 3 个支链构成。支链由转动副、移动副和球副组成。移动副是主动副, 其余运动副是被动副。上平台与支链由球铰连接, 基础平台与支链由转动副连接。上平台和基础平台的铰点处于等边三角形顶点上。各转动副的中心线在基础平台平面内, 并且垂直于转动副中心与基础平台正三角形中心的连线。

收稿日期: 2011-01-11 修回日期: 2011-02-16

* 国家自然科学基金资助项目(50475011)和吉林省科技发展计划重点资助项目(20080506、20090335)

作者简介: 韩方元, 博士生, 主要从事机构学研究, E-mail: fangyuanhan@sina.com

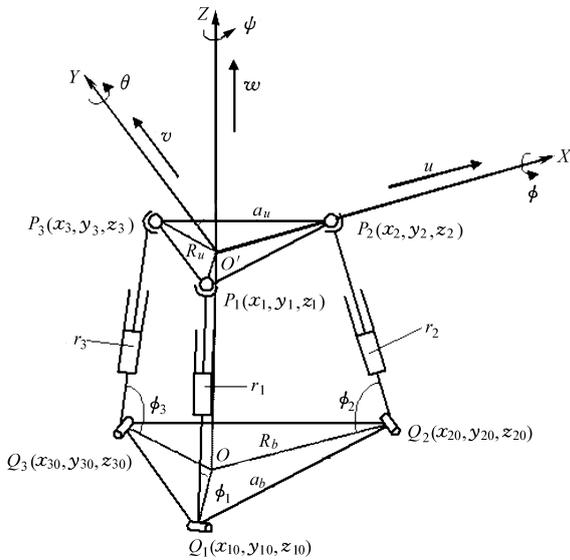


图1 3自由度并联机构示意图

Fig.1 Mathematical model of 3 degree of freedom manipulator

动坐标系的建立:以中立位置时上平台的中心点作为坐标原点建立右手坐标系, $XO'Y$ 平面平行于水平面, X 轴正方向向右, 并通过一个球铰的中心。

基础坐标系的建立:以基础平台的中心作为坐标原点建立右手坐标系, xOy 平面平行于水平面, 取 x 轴正方向向右并过基础平台三角形的一个顶点。

设基础平台铰支点中心所在圆的半径为 R_b , 上平台铰支点中心所在圆的半径为 R_u , 基础平台相邻两铰支点中心之间的距离为 a_b , 上平台相邻两铰支点中心之间的距离为 a_u , 3 个支链的长度分别为 r_1, r_2, r_3 , 3 个支链与基础平台平面之间的夹角分别是 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 。

设上平台绕 X, Y, Z 轴的转动角分别为 ϕ, θ, ψ (其中 $\psi = 0$), 沿 X, Y, Z 轴的平移量分别为 u, v, w (其中 $u = 0, v = 0$)。该机构具有 3 个自由度 (ϕ, θ, w)。当 $u = 0, v = 0, w = 0$ 时是中立位置。上平台 3 个球铰中心是 P_1, P_2, P_3 ; 在基础平台上, 3 个转动副的安装位置中心是 Q_1, Q_2, Q_3 。

1.2 现有反解算法的显式解

在基础坐标系下, 上平台上任一点的坐标可以经过坐标变换得到

$$P'_i = R(x, \phi)R(y, \theta)P_i + P_z \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

其中

$$R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \quad P_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{bmatrix}$$

整理后得到 P_1, P_2, P_3 在基础坐标系下的坐标:

$$P''_1 \left(-\frac{R_u(C + \sqrt{3}D)\cos\phi}{2\sqrt{C^2 + D^2}}, -\frac{\sqrt{3}R_u(C + \sqrt{3}D)\cos\phi}{2\sqrt{C^2 + D^2}}, \frac{1}{2}R_u(\cos\phi\sin\theta - \sqrt{3}\sin\phi) + w \right);$$

$$P''_2 \left(\frac{R_u[C(3\cos\theta - \cos\phi) + 3D^2]}{2\sqrt{C^2 + D^2}}, 0, -R_u\cos\phi\sin\theta + w \right);$$

$$P''_3 \left(-\frac{R_u(C - \sqrt{3}D)\cos\phi}{2\sqrt{C^2 + D^2}}, \frac{\sqrt{3}R_u(C - \sqrt{3}D)\cos\phi}{2\sqrt{C^2 + D^2}}, \frac{1}{2}R_u(\cos\phi\sin\theta + \sqrt{3}\sin\phi) + w \right)。$$

式中 $C = \cos\theta + \cos\phi, D = \sin\theta\sin\phi$ 。于是可求得各支链的长度

$$r_i = \sqrt{(P''_{ix} - Q_{ix})^2 + (P''_{iy} - Q_{iy})^2 + (P''_{iz} - Q_{iz})^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2)$$

1.3 现有的正解算法——桥本算法简述

桥本等人提出的正解算法^[3] (下称桥本算法) 是根据各支链的长度 r_1, r_2, r_3 和 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 等, 求得 P_1, P_2, P_3 的坐标。然后将约束条件

$$|P_1P_2|^2 = |P_2P_3|^2 = |P_3P_1|^2 = a_u^2 \quad (3)$$

展开可得 3 个关系式。例如展开 $|P_1P_2|^2$ 得

$$r_1^2 + r_1r_2\cos\phi_1\cos\phi_2 + r_2^2 - 2r_1r_2\sin\phi_1\sin\phi_2 + a_b^2 - a_u^2 - \sqrt{3}a_b(r_1\cos\phi_1 + r_2\cos\phi_2) = 0 \quad (4)$$

桥本算法就是用 Newton 法, 将满足这 3 个公式的 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 解出。桥本等的论文没有涉及到 ϕ, θ, w 的算法, 但已知 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 很容易解出 P_1, P_2, P_3 点的坐标, 从而不难算出 ϕ, θ, w 。

2 正解快速数值算法

2.1 基本原理

在图 1 中, 3 个支链与 Z 轴形成 3 个平面, 3 个平面间的夹角是 120° 。平面内有 3 个四边形 P_1Q_1OO', P_2Q_2OO' 和 P_3Q_3OO' (图 2)。这 3 个四边形有一个公用边 OO' , 如果知道或假定一个 OO' 长度, 就可以解这个四边形。当 OO' 长度与实际的上下平台中心点距离相同时, P_1, P_2, P_3 就是上平台 3 个球铰的真实位置。因此, 选取 OO' 长度作为迭代变量, 记为 w 。以某一个 w 值作为初值, 逐次迭代、修正, 逼近 w 真值和 P_1, P_2, P_3 的真实位置。

2.2 初值的选取

在四边形 $P_iQ_iOO' (i = 1, 2, 3)$ 中 (图 2), 假设 P_iO' 垂直于 Z 轴, P_iO' 长度等于 R_u 。解这 3 个四边形, 求出 P_i 的 Z 坐标

$$P_{iz} = \sqrt{r_i^2 - (R_b - R_u)^2} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

由 P_1, P_2, P_3 确定一个平面, 该平面与 Z 轴交点的 Z 坐标是

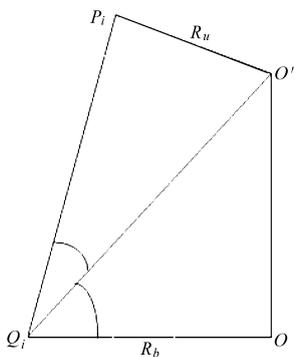


图2 四边形 P_iQ_iOO' 示意图

Fig. 2 Schematic diagram of quadrilateral P_iQ_iOO'

$$w_0 = \frac{1}{3}(P_{1z} + P_{2z} + P_{3z}) \quad (6)$$

以 w_0 为基础,重新解 3 个四边形 P_iQ_iOO' ($i = 1, 2, 3$), 求出新的 P_1, P_2, P_3 的 z 坐标, 然后根据并联机构的结构特征, 计算 P_1, P_2, P_3 的 x 坐标和 y 坐标。从而得

$$P_{1z} = r_1 \sin\left(\arctan\left(\frac{w_0}{R_b}\right)\right) + \arccos\left(\frac{r_1^2 + w_0^2 + R_b^2 - R_u^2}{2r_1 \sqrt{w_0^2 + R_b^2}}\right)$$

$$P_{1x} = -\frac{1}{2}R_b + \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 - P_{1z}^2}$$

$$P_{1y} = \frac{P_{1x}}{\tan \frac{\pi}{6}}$$

$$P_{2z} = r_2 \sin\left(\arctan\left(\frac{w_0}{R_b}\right)\right) + \arccos\left(\frac{r_2^2 + w_0^2 + R_b^2 - R_u^2}{2r_2 \sqrt{w_0^2 + R_b^2}}\right)$$

$$P_{2x} = R_b - \sqrt{r_2^2 - P_{2z}^2}$$

$$P_{2y} = 0$$

$$P_{3z} = r_3 \sin\left(\arctan\left(\frac{w_0}{R_b}\right)\right) + \arccos\left(\frac{r_3^2 + w_0^2 + R_b^2 - R_u^2}{2r_3 \sqrt{w_0^2 + R_b^2}}\right)$$

$$P_{3x} = -\frac{1}{2}R_b + \frac{1}{2}\sqrt{r_3^2 - P_{3z}^2}$$

$$P_{3y} = -\frac{P_{3x}}{\tan \frac{\pi}{6}}$$

由 P_1, P_2, P_3 的新坐标求出 $P_1P_2P_3$ 平面的法线、 $P_1P_2P_3$ 平面与 Z 轴交点, 进而求得机构此时的近似姿态 ϕ_0, θ_0, w_0 。过程如下: 设 $S = (S_x, S_y, S_z)$ 为上平台平面法线矢量(方向向上), 知: $S = l_{P_1P_3} \times l_{P_1P_2}$, 由空间解析几何知识可得到

$$\begin{cases} \phi_0 = -\arctan\left(\frac{S_y}{\sqrt{S_x^2 + S_z^2}}\right) \\ \theta_0 = \arctan\left(\frac{S_x}{S_z}\right) \\ w_0 = \frac{1}{3}(P_{1z} + P_{2z} + P_{3z}) \end{cases} \quad (7)$$

2.3 迭代计算过程

由利用初值得到的近似姿态 ϕ_0, θ_0, w_0 用运动学逆解方程求出该姿态下的 P_1, P_2, P_3 坐标。新的 P_1, P_2, P_3 坐标不一定是真实的上平台球铰中心位置坐标。即 P_iQ_i 不一定等于 r_i , 为此加以修正(图 1、2)。对 P_1, P_2, P_3 的 z 坐标修正

$$P'_{iz} = r_i \sin\varphi_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (8)$$

$$\text{其中 } \sin\varphi_i = \frac{P_{iz}}{\sqrt{(P_{ix} - Q_{ix})^2 + (P_{iy} - Q_{iy})^2 + P_{iz}^2}}$$

φ_i 为 $\angle P_iQ_iO$ 。

调整后, P_iQ_i 长度更接近于 r_i 。然后用式(7)求出新的姿态 ϕ_1, θ_1, w_1 。判断迭代收敛的条件可以设为

$$\Delta = |w_0 - w_1| \leq 10^{-6} \quad (9)$$

式中 w_1 为本次迭代计算得到的 w 值, w_0 为上次迭代得到的值。如果不符合收敛条件, 则令 $\phi_0 = \phi_1, \theta_0 = \theta_1, w_0 = w_1$, 并重新进入迭代过程。如果符合收敛条件则退出迭代过程, 输出最终的 ϕ_1, θ_1, w_1 , 程序结束。程序流程图如图 3 所示。

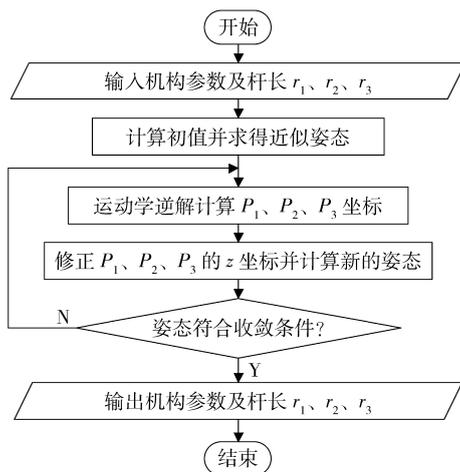


图3 算法程序流程图

Fig. 3 Algorithm flowchart

3 算法性能对比分析

桥本算法是一种较好的实时控制算法, 应用较广。本文将桥本算法作为一种基准算法, 新算法与之比较, 以评价新算法的优劣。

3.1 两种算法对比的原则

为了得到令人信服的对比结果, 对比环境和条件做如下规定:

(1) 均以吉林大学工程机器人实验室的 3-RPS 型并联机构为例, 结构参数(见图 1): $R_u = 600 \text{ mm}, R_b = 700 \text{ mm}$, 机构处于中立位置时 $r_{10} = r_{20} = r_{30} = 980 \text{ mm}$ 。其运动范围为: $\phi = \pm 15^\circ, \theta = \pm 15^\circ, w = \pm 130 \text{ mm}$ 。

(2) 两个算法都用 C 语言编写运算程序。

(3) 对两种算法的最大计算误差及其所在的方位进行比较。在本例中,上平台最大倾角为 15° ,支链达到了极限伸缩长度, Z 方向的平移 w 为 0。使倾斜的方位角从 0 至 360° 变化,即可找到两种算法的最大计算误差及其所在的方位。

(4) 使用同一台计算机计算,获取每次迭代所需的时间,进行实时控制仿真对比。使用的计算机 CPU 为 AMD6000+,主频为 3.0 GHz,内存为 1 GB。

3.2 两种算法对比的结果

3.2.1 编制程序工作量对比

使用 C 语言程序,新算法只需要 80 余条有效语

句。而桥本算法编程至少需要 210 余条有效语句。

3.2.2 计算精度、计算误差对比

为了具有可比性,两种算法都选择了最大误差对应的姿态。经测试新算法最大误差所处的姿态 (ϕ, θ, w) 为 $(-9.374\ 107\ 40, -11.762\ 923\ 85, 0)$,桥本算法最大误差所处的姿态 (ϕ, θ, w) 为 $(-13.782\ 934\ 01, -5.976\ 869\ 55, 0)$ 。表 1 与表 2 是编写的 C 语言程序运行结果。每迭代 1 次,新算法计算精度可提高 1 个数量级,桥本算法可提高 3 个数量级。达到相同的计算精度时,新算法的迭代次数多于桥本算法。但新算法同样可以实现任意精度要求的结果。

表 1 新算法计算结果

Tab.1 Computed results of the proposed method

迭代次数	$\phi/(^\circ)$		$\theta/(^\circ)$		w/mm		时间 / μs
	计算结果	绝对误差	计算结果	绝对误差	计算结果	绝对误差	
初值计算	-9.188 211	0.185 896	-11.668 047	0.094 876	6.500 801	6.500 801	1.028 312
1	-9.355 426	0.018 681	-11.751 875	0.011 049	0.044 989	0.044 989	1.536 313
2	-9.372 159	0.001 948	-11.761 702	0.001 222	0.005 155	0.005 155	2.042 558
3	-9.373 901	0.000 206	-11.762 793	0.000 130	0.000 555	0.000 555	2.554 682
4	-9.374 086	0.000 022	-11.762 910	0.000 014	0.000 059	0.000 059	3.060 646
5	-9.374 105	0.000 002	-11.762 922	0.000 001	0.000 006	0.000 006	3.565 114
6	-9.374 107	0.000 000	-11.762 924	0.000 000	0.000 001	0.000 001	4.071 300
7	-9.374 107	0.000 000	-11.762 924	0.000 000	0.000 000	0.000 000	4.576 382

表 2 桥本算法计算结果

Tab.2 Computed results of Hashimoto's method

迭代次数	$\phi/(^\circ)$		$\theta/(^\circ)$		w/mm		时间 / μs
	计算结果	绝对误差	计算结果	绝对误差	计算结果	绝对误差	
1	-13.750 734	0.032 200	-5.957 672	0.019 197	0.078 185	0.078 185	2.177 391
2	-13.782 893	0.000 041	-5.976 845	0.000 025	0.000 097	0.000 097	3.980 004
3	-13.782 934	0.000 000	-5.976 870	0.000 000	0.000 000	0.000 000	5.770 165

第 1 次迭代误差新算法与桥本算法相当或新算法略优于桥本算法;新算法的第 4 次迭代误差与桥本算法的第 2 次迭代误差相当;新算法的第 7 次迭代误差与桥本算法的第 3 次迭代误差相当。

3.2.3 收敛速度和迭代所需时间对比

达到相同的计算精度时,虽然新算法需要较多的迭代次数,但所需时间很短。例如要使 w 计算精度达到 μm 级,新算法所需要的计算时间是 2.554 682 μs ,桥本算法用时 3.980 004 μs ,新算法是桥本算法用时的 64%;而要使 w 计算精度达到 nm 级,新算法用时 4.576 382 μs ,桥本算法用时 5.770 165 μs ,新算法是桥本算法用时的 79%。

3.3 快速算法的适用范围

3.3.1 算法对各种尺度的并联机构的适应性

改变 3-RPS 并联机构的尺度,测试各种情况。例如,3 个 R 副在同一平面内,下平台半径不变,支链长度不变,上平台半径在 $0.1R_b < R_u < R_b$ 范围内变化,形成尺度和形状不同的正棱台形并联机构;下平台半径不变,支链长度不变,上平台半径大于下平台半径时,形成倒棱台形的 3-RPS 并联机构。测试了上平台半径与下平台半径相差不大 ($R_u < 1.5R_b$) 的各种情况。计算测试表明:各种情况下算法都收敛,且具有很高的计算精度和较好的收敛速度,算法也不用修改。因此本算法既适用于正棱台形的 3-RPS 并联机构,也适用于部分倒棱台形的

3-RPS 并联机构。

3.3.2 机构处于奇异位型附近时的情况

对机构处于奇异位型附近时进行了测试。例如,上平台与下平台距离很近、平台直径较大 ($H_{\min} < 0.2R_u$), 并联机构是一个扁平的结构, 机构接近于奇异位型, 此时算法仍然收敛, 但收敛速度变慢。奇异位型时肯定不收敛。因此, 应用本算法时要避开奇异位型。

4 结束语

根据 3-RPS 型并联机构的结构特征, 提出了一种正解数值算法。该算法不需要导数运算和雅可比矩阵及其求逆运算, 物理模型清晰, 计算公式简单。使用新算法可以实现任意的精度要求, 编程工作量减少 60%, 与现有算法相比, 一次迭代节省时间 30%, 因而适用于实时控制。

参 考 文 献

- 1 Lee K, Shah K D. Kinematic analysis of a three degrees of freedom in-parallel actuated manipulator [J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988, 4(3): 361 ~ 367.
- 2 Warldron K J, Raghavan M, Roth B. Kinematics of a hybrid series-parallel manipulation system [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1989, 111(2): 211 ~ 221.
- 3 Hashimoto Minoru, Imamura Yuichi. Kinematic analysis and design of a 3 DOF parallel mechanism for a passive compliant wrist of manipulators [J]. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1998, C64: 2 116 ~ 2 123.
- 4 Pfreundschun G H, Khmer V, Thomas G S. Design and control of a 3 DOF in-parallel actuated manipulator [C] // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1991, 2: 1 659 ~ 1 664.
- 5 王进戈, 范丽华, 徐礼钜. 3-RPS 并联平台机构的位置正解与奇异构形分析的数值-符号解 [J]. 机械设计, 2005, 22(5): 15 ~ 19.
Wang Jinge, Fan Lihua, Xu Liju. Positional forward solution and numeric-symbolic solution of singular configuration analysis for 3-RPS parallel platform mechanism [J]. Journal of Machine Design, 2005, 22(5): 15 ~ 19. (in Chinese)
- 6 李树军, 王阴, 王晓光. 3-RPS 并联机器人机构位置正解的杆长逼近法 [J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2001, 22(3): 285 ~ 287.
Li Shujun, Wang Yue, Wang Xiaoguang. Forward position analysis of 3-RPS in-parallel manipulator using self-modified successive approximation method [J]. Journal of Northeastern University: Natural Science, 2001, 22(3): 285 ~ 287. (in Chinese)
- 7 张继有, 原福永, 刘大为, 等. 基于神经网络的并联 3 自由度机器人位置正解 [J]. 计算机仿真, 2004, 21(10): 133 ~ 135, 106.
Zhang Jiyou, Yuan Fuyong, Liu Dawei, et al. Solution for forward kinematics of 3-DOF-parallel-robot based on neural network [J]. Computer Simulation, 2004, 21(10): 133 ~ 135, 106. (in Chinese)

(上接第 223 页)

- 7 陈洪涛, 程光明, 肖献强, 等. 宏/微双重驱动技术的研究和应用现状 [J]. 机械设计与制造, 2007(1): 153 ~ 155.
Chen Hongtao, Cheng Guangming, Xiao Xianqiang, et al. Research and application of macro/micro dual-drive technology [J]. Machinery Design & Manufacture, 2007(1): 153 ~ 155. (in Chinese)
- 8 Roberto Horowitz, Li Yunfeng, Kenm Oldham. Dual-stage servo systems and vibration compensation in computer hard disk drives [J]. Control Engineering Practice, 2007, 15(3): 291 ~ 305.
- 9 晏祖根, 孙立宁, 詹华群. 基于实时误差补偿的机器人系统研究 [J]. 中国机械工程, 2007, 18(11): 1 299 ~ 1 303.
Yan Zugen, Sun Lining, Zhan Huaqun. Research on high-speed high-precision robot based on real-time error compensation [J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(11): 1 299 ~ 1 303. (in Chinese)
- 10 孙绍云, 曲东升, 孙立宁, 等. 宏/微驱动定位系统滑模变结构控制的研究 [J]. 机器人, 2004, 26(1): 32 ~ 34.
Sun Shaoyun, Qu Dongsheng, Sun Lining, et al. Sliding mode variable structure control of a macro/micro drive positioning system [J]. Robot, 2004, 26(1): 32 ~ 34. (in Chinese)