

DOI:10.3969/j.issn.1000-1298.2010.06.041

平面柔性并联机构弹性动力学研究*

鲁开讲^{1,2} 师俊平¹ 高秀兰² 淡卜绸²

(1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院, 西安 710048; 2. 宝鸡文理学院机电工程系, 宝鸡 721007)

【摘要】 以设计适于高速运行的平面3自由度并联机构为目标,对机构的正向运动学进行了全面研究,得到了机构速度及加速度特性。在给定主动件的运动以后,求得了机构的所有位置正解构型,根据运动连续性的条件,规划出动平台的最佳运动轨迹,揭示了机构的速度和加速度特性。将机构划分成杆单元和平面三角形单元,建立了机构的有限元模型。结合运动学分析,使动平台沿着预先规划的轨迹运动,分析了机构的模态频率和主振型随机构位姿的变化情况。研究机构在主动力和惯性力激励下的动态响应,得到机构弹性位移误差和动应力的变化规律,从而对机构的运动学和动力学性能进行了综合评估。

关键词: 并联机构 运动学 有限元模型 动力学性能

中图分类号: TH112 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1298(2010)06-0208-08

Elastic-dynamics of Planar Flexile Parallel Mechanism

Lu Kaijiang^{1,2} Shi Junping¹ Gao Xiulan² Dan Bochou²

(1. School of Mechanical and Instrumental Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China

2. Mechanical and Electrical Engineering Department, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721007, China)

Abstract

In order to design the high-speed planar 3-DOF parallel mechanism, the direct kinematics was studied comprehensively. Velocity and acceleration characteristics of mechanism were gained. With the driving parts' movement, all the forward position configurations were obtained. According to the continuity conditions of movement, the optimal trajectory of moving platform was planned. The velocity and acceleration characteristics of mechanism were implied. The mechanism was divided into stroke unit and plane triangle unit. The finite element model of the mechanism was established. By combining kinematics, the moving platform was moving along the planning track, the modal frequency and main vibration mode of the mechanism with the change of mechanism' position and posture were analyzed. Variation law of elastic displacement error and the dynamic stress of mechanism was obtained by researching the dynamic response of mechanism in drive force and inertial force excitation. Therefore, the kinematics and the dynamic performance of mechanism were assessed comprehensively.

Key words Parallel mechanism, Kinematics, Finite element model, Dynamic performance

引言

最大限度地提高机构的运行速度是机器人机构的发展趋势,然而机器人在高速作业时,构件在惯性力作用下变形加大,从而使机构的运动产生误差,影响了并联机构的运动精度。随着速度的提高,激振

力的频率和振幅也随之增加,引发了谐振的危险,也加剧了构件的动应力,使构件产生疲劳破坏,成为阻碍机器人向高速发展的主要因素。为了改善机器人的动态性能,许多学者对并联机构进行了弹性动力分析:为了避免共振并得到满足工程实用的动态特性参数而进行模态频率分析^[1-3]和模态参数辨

收稿日期: 2009-04-24 修回日期: 2009-12-10

* 陕西省教育厅专项科研计划项目(09JK327)和陕西省自然科学研究计划项目(2007A17)

作者简介: 鲁开讲, 博士生, 宝鸡文理学院副教授, 主要从事机器人运动学、动力学研究, E-mail: lkj81456@163.com

识^[4-5];为了满足运动精度的要求,需要进行弹性位移分析,估算动平台的位姿误差^[6-10],对于高精度的机构,为了将机构的动态误差限制在容许的范围内,而采用振动抑制和控制技术^[11-12];在机构速度较高时,为了防止构件疲劳破坏,而进行动态响应分析,获得动应力的分布及变化情况^[13]。本文对平面3自由度并联机构的正向运动学进行研究,以行程最短的准则进行轨迹规划,使机构具有较好的运动性能。结合运动学的结果,对机构进行弹性动力分析,研究机构的模态特性和动态响应,得到机构振动的形态和动应力的变化规律,找到机构的主要柔性环节和动应力的危险部位。

1 平面3自由度并联机构正向运动学

平面3自由度并联机构由基座 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 和动平台 $\Delta C_1 C_2 C_3$ 组成,这两个三角形的边长分别为 a 和 b ,如图1所示。机构以3个连架杆的关节转角作为输入运动,使动平台实现两个坐标方向的平动和平面内的转动。选取参考坐标系 Oxy ,原点位于 $\Delta A_1 A_2 A_3$ 的中心, x 轴平行于 $A_1 A_2$ 。取与动平台固连的坐标系 $Px'y'$,原点位于 $\Delta C_1 C_2 C_3$ 的中心, x' 轴平行于 $C_1 C_2$ 。

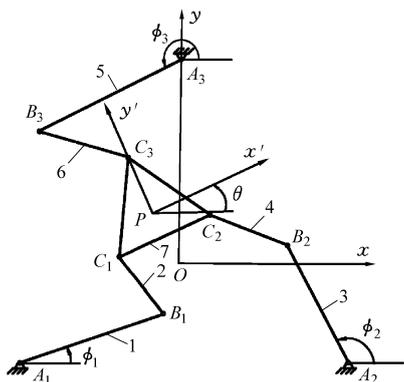


图1 平面3自由度并联机构运动简图

Fig. 1 Kinematic sketch of the planar 3-DOF parallel mechanism

1.1 机构位置正解

转动副中心 B_i 、 C_i 在参考坐标系的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{A_i} \\ y_{A_i} \end{bmatrix} + l_1 \begin{bmatrix} \cos \phi_i \\ \sin \phi_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{C_i} \\ y'_{C_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

式中 l_1 ——驱动杆长度

θ 、 x 、 y ——动平台的位姿

利用杆长 $B_i C_i = l_2$ 的约束条件得机构的约束方程

$$\begin{cases} f_1 = (x_{C_1} - x_{B_1})^2 + (y_{C_1} - y_{B_1})^2 - l_2^2 = 0 \\ f_2 = (x_{C_2} - x_{B_2})^2 + (y_{C_2} - y_{B_2})^2 - l_2^2 = 0 \\ f_3 = (x_{C_3} - x_{B_3})^2 + (y_{C_3} - y_{B_3})^2 - l_2^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$f_2 - f_1$ 、 $f_3 - f_1$ 得

$$a_j x + b_j y + c_j = 0 \quad (j=2,3)$$

其中 $a_j = 2b \cos \theta - 2a - 2l_1 \cos \phi_j + 2l_1 \cos \phi_1$

$$b_j = 2b \sin \theta - 2l_1 \sin \phi_j + 2l_1 \sin \phi_1$$

$$c_j = b^2 - 2ab \cos \theta - 2bl_1 \cos(\phi_j - \theta) + a^2 + 2al_1 \cos \phi_j$$

式(1)是关于 x 、 y 的线性方程,从中解出 $x =$

$$x(\theta), y = y(\theta), \text{代入 } f_1, \text{并替换 } \cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin \theta =$$

$\frac{2t}{1+t^2}$,得到机构位置正解方程

$$\sum_{k=0}^8 a_k t^k = 0 \quad (2)$$

它是关于参数 t 的8次代数方程。

1.2 机构速度、加速度分析

将机构每个分支看成开式运动链,该分支关节运动速度到动平台的运动速度矢量的映射关系为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -(y-y_A) & -(y-y_B) & -(y-y_C) \\ x-x_A & x-x_B & x-x_C \end{bmatrix}^{(r)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{bmatrix} = (\mathbf{G}_\phi^H)^{(r)} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)}$$

式中 r ——分支序号

从式中反解出该分支的各关节速度

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)} = (\mathbf{G}_\phi^H)^{-1(r)} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}_H^\phi)^{(r)} \dot{\mathbf{x}} \quad (3)$$

在各个分支中第一个运动副是输入副,从式(3)中取出主动运动的方程,并将3个分支合写成矩阵

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_1^{(1)} \\ \dot{\phi}_1^{(2)} \\ \dot{\phi}_1^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{G}_H^\phi)^{(1)}_{1;} \\ (\mathbf{G}_H^\phi)^{(2)}_{1;} \\ (\mathbf{G}_H^\phi)^{(3)}_{1;} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \mathbf{G}_H^q \dot{\mathbf{x}}$$

式中 $\dot{\mathbf{q}}$ ——输入速度矢量,下标“1:”表示矩阵的第1行

当给定主动关节的速度后,可由上式反求得动平台的运动速度

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{G}_H^q)^{-1} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{G}_q^H \dot{\mathbf{q}} \quad (4)$$

将 $\dot{\mathbf{x}}$ 代入式(3)可求得各分支的关节运动速度。

在每个分支中,关节运动加速度到动平台运动加速度的映射关系为

$$\ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{\theta} \quad \ddot{x} \quad \ddot{y}]^T =$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)T} (\mathbf{H}_\phi^H)^{(r)} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)} + (\mathbf{G}_H^H)^{(r)} \ddot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)}$$

式中 $(\mathbf{H}_\phi^H)^{(r)} \in \mathbf{R}^{3 \times 3 \times 3}$, 称为二阶影响系数矩阵, 其每个元素都是一个 3 维矢量

$$(\mathbf{H}_\phi^H)^{(r)}_{m:n} = \begin{cases} [0 \quad x_n - x \quad y_n - y]^{(r)T} & (m \leq n) \\ [0 \quad x_m - x \quad y_m - y]^{(r)T} & (m > n) \end{cases}$$

x_m, y_m, x_n, y_n 的下标与该分支关节序号对应。

从上式中反解出该分支的关节加速度

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)} = (\mathbf{G}_H^\phi)^{(r)} [\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)T} (\mathbf{H}_\phi^H)^{(r)} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)}] \quad (5)$$

从中取出含有输入运动的第一式, 它是以求动平台加速度矢量为未知数的线性方程组, 可整理成

$$(\mathbf{G}_H^\phi)^{(r)}_{1:1} \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\boldsymbol{\phi}}_1^{(r)} + (\mathbf{G}_H^\phi)^{(r)} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)T} (\mathbf{H}_\phi^H)^{(r)} \dot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)} \quad (r = 1, 2, 3) \quad (6)$$

在求得动平台加速度后, 回代到式(5), 即可求得各支链的关节相对加速度 $\ddot{\boldsymbol{\phi}}^{(r)}$ 。

当给定主动构件的关节转角、速度和加速度后, 可以按照式(2)、(4)及(6)求得动平台的位姿、速度和加速度。

2 平面 3 自由度并联机构的有限元模型

2.1 单元位移

将机构按构件划分成一个三角形单元和 6 个杆单元(图 1)。三角形单元每个结点有 2 个位移分量, 如图 2 所示。单元位移列阵 $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$, 单元内任意一点的位移可以表示成该点的局部坐标和结点位移的线性函数

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) u_i(t) \\ v = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) v_i(t) \end{cases} \quad (7)$$

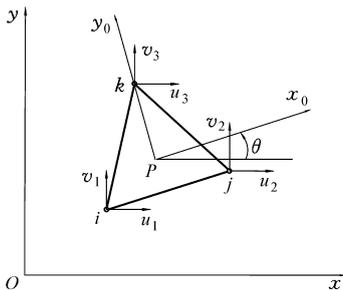


图 2 平面三角形单元
Fig. 2 Planar triangle element

杆单元承受轴向振动和横向振动, 单元是按构件划分的, 杆单元与相邻单元以转动副连接, 相邻单元在结点处具有不同的转角, 但曲率为零, 因而对于机构的杆单元, 不考虑结点处的曲率, 结点位移包括轴向位移 u_1, u_2 , 横向位移 v_1, v_3 , 以及转角位移 v_2 、

v_4 , 如图 3 所示。单元位移列阵 $\boldsymbol{\delta}^{(e)} = [u_1 \quad v_1 \quad v_2 \quad u_2 \quad v_3 \quad v_4]^T$, 任意截面的纵向位移和横向位移可以表示成结点位移的线性函数

$$\begin{cases} u(x, t) = \sum_{i=1}^2 \eta_i(x) u_i(t) \\ v(x, t) = \sum_{j=1}^4 \phi_j(x) v_j(t) \end{cases} \quad (8)$$

利用边界条件可求得式(7)和(8)中的型函数 $N_i(x, y)$ 、 $\eta_i(x)$ 、 $\phi_j(x)$ 。

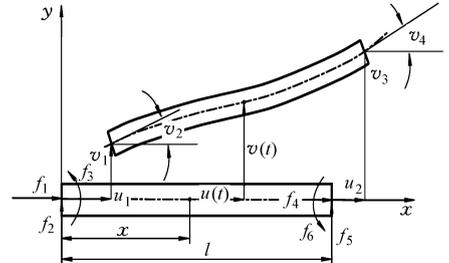


图 3 杆单元上的位移及广义力

Fig. 3 Displacement and generalized force on pole element

2.2 单元广义力

当机构阻尼很小而可以忽略不计时, 各单元的运动微分方程具有相似形式

$$\mathbf{m} \ddot{\boldsymbol{\delta}}^{(e)} + \mathbf{k} \boldsymbol{\delta}^{(e)} = \mathbf{f}^{(e)}$$

式中 \mathbf{m} 、 \mathbf{k} ——单元的质量矩阵和刚度矩阵

$\mathbf{f}^{(e)}$ ——单元广义力列向量

三角形单元上的作用力有: 作用在动平台上的集中载荷 $\mathbf{F} = (M, F_x, F_y)^T$; 相邻单元之间在节点处的作用力, 是系统的内力; 由惯性引起的分布力。集中载荷和惯性力所作的虚功

$$\delta w = [\delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta u_3 \quad \delta v_3] \cdot$$

$$\left\{ \mathbf{N}^T \Big|_{x=x_p, y=y_p} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} + \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} q dx dy \right\}$$

其中 $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$

式中 q ——单元的面积密度

x_p, y_p ——集中力作用点的坐标

式中大括号里的表达式即是与各个广义坐标对应的广义力。

杆单元上的作用力有: 机构运动时由惯性引起的分布力; 相邻单元的内力。设单元上任意一点的加速度为 a_A^x, a_A^y , 对单元来说, 惯性力所作的虚功

$$\begin{aligned} \delta w = & \int_0^l q a_A^x dx \delta u(x, t) + \int_0^l q a_A^y dx \delta v(x, t) = \\ & \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^l q a_A^x \eta_i(x) dx \right] \delta u_i(t) + \\ & \sum_{j=1}^4 \left[\int_0^l q a_A^y \phi_j(x) dx \right] \delta v_j(t) \end{aligned}$$

式中各广义坐标虚位移前的积分即是与该广义坐标对应的广义力。

2.3 系统的运动微分方程

各单元的运动微分方程选用局部坐标系,各单元的局部坐标系彼此之间方向不同,在建立整个系统运动方程时,必须将各结点位移统一到同一坐标系,称为总体坐标系。结点在局部坐标系 $O'x'y'$ 的位移为 $u_i^{(e)}$ 、 $v_i^{(e)}$,将它们转换到总体坐标系 Oxy ,即 u_i 、 v_i ,如图4所示。

$$\begin{bmatrix} u_i^{(e)} \\ v_i^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中 α ——单元局部坐标系与总体坐标系间夹角

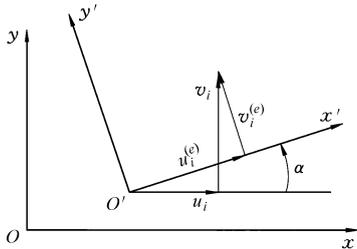


图4 单元位移向总体坐标系的变换示意图

Fig.4 Coordinate system transformation from element displacement to overall coordinate

杆单元的转角位移不会随坐标系变化,平面三角形单元和杆单元的变换矩阵分别为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l & & \\ & l & \\ & & l \end{bmatrix} \quad \mathbf{L}' = \begin{bmatrix} l & & \\ & 1 & \\ & & l \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

在确定了单元坐标系到总体坐标系的变换矩阵后,各单元在总体坐标系中的运动方程为

$$\mathbf{L}^T \mathbf{m} \mathbf{L} \ddot{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{L}^T \mathbf{k} \mathbf{L} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{L}^T \mathbf{f}^{(e)}$$

经过坐标变化以后,各结点位移统一到总体坐标系,为了获得全系统的运动方程,先要建立单元结点位移与系统位移之间的对应关系。系统由3条完全相同的分支组成,在每个分支中,相邻单元用转动副连接,如果不考虑转动副的间隙,则相邻单元在转动副连接的结点上具有相同的线位移,而两个单元分别属于不同的构件,因而具有不同的转角。由于机构的机座一般具有较大的刚度,因而忽略机座的位移,杆单元与机座连接的结点上,只有转角位移。这样每条分支具有8个结点位移。按顺序记作 $\mathbf{u}^{(r)} = [u_1, u_2, \dots, u_8]^T$ 。其中, u_1, u_4 为杆 $A_r B_r$ 在 A_r 和 B_r 处的转角位移; u_2, u_3 为结点 B_r 沿 x, y 坐标方向的位移; u_5, u_8 为杆 $B_r C_r$ 在 B_r 和 C_r 处的转角位移; u_6, u_7 为结点 C_r 沿 x, y 坐标方向的位移。因而系统总共有24个结点位移,合写成 $\mathbf{U} = [\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)},$

$\mathbf{u}^{(3)}]^T$ 。

对于机构第一个分支,杆 $A_1 B_1$ 有4个结点位移 u_1, \dots, u_4 ,将单元矩阵(包括质量矩阵和刚度矩阵)的元素 m_{ij} 和 k_{ij} 叠加到系统相应矩阵的 M_{ij} 和 K_{ij} 的元素中。杆 $B_1 C_1$ 有6个结点位移 $u_2, u_3, u_5, \dots, u_8$,将其单元矩阵的元素 m_{ij} 和 k_{ij} 叠加到系统相应矩阵的 M_{pq} 和 K_{pq} 的元素中, i, j 到 p, q 的转换关系为

$$p = \begin{cases} i+1 & (i \leq 2) \\ i+2 & (i > 2) \end{cases} \quad q = \begin{cases} j+1 & (j \leq 2) \\ j+2 & (j > 2) \end{cases}$$

杆 $A_1 B_1$ 和杆 $B_1 C_1$ 的单元矩阵合并成了8阶方阵,它位于系统矩阵的第1~8行(列)。同样对于机构第2和第3个分支,也先构建相同的8阶方阵,然后将它们分别叠加到系统矩阵的第9~16行(列)和第17~24行(列)。

对于动平台上的三角形单元,有6个结点位移,在系统位移中序号是 $8(r-1)+6$ 和 $8(r-1)+7$,将其单元矩阵的元素 m_{ij} 和 k_{ij} 叠加到系统相应矩阵的 M_{pq} 和 K_{pq} 元素中, i, j 到 p, q 的转换关系为 $p = 6(r-1)+i+5, q = 6(r-1)+j+5$ 。

在单元矩阵向系统矩阵叠加时,单元广义力向量的第 i 个分量也要叠加到系统广义力向量 \mathbf{F} 的第 p 个分量上。由此可以得到机构的运动微分方程

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (10)$$

3 机构动态特征

3.1 机构振动模态频率和主振型

系统的质量矩阵和刚度矩阵是机构结构参数和位形的函数,机构的模态频率是随着机构位形的变化而变化的。为了避免发生谐振,应使各构件的运行速度远离机构的各阶模态频率。当系统作第 r 阶主振动时,各广义坐标的相对大小保持固定不变的比值。将结点在总体坐标系的位移通过坐标变换式(9)转换到单元局部坐标系中,则单元内任意点 $E(x'_E, y'_E)$ 在局部坐标系的位移 $u_E^{(e)}$ 、 $v_E^{(e)}$,由该点所属的单元位移函数(式(7)或(8))确定,将机构的真实运动看作是机构的刚体运动和弹性振动的叠加,该点随机构振动时,它在局部坐标系中的坐标为

$$x_E'' = x_E' + u_E^{(e)} \quad y_E'' = y_E' + v_E^{(e)}$$

在总体坐标系中的坐标为

$$\begin{bmatrix} x_E & y_E \end{bmatrix}^T = \mathbf{L} \begin{bmatrix} x_E'' & y_E'' \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}^T \quad (11)$$

式中 x_0, y_0 ——单元局部坐标系原点在整体坐标系中的坐标

依次计算机构上各点的位置坐标,顺序连接即是机构第 r 阶主振动的型态。

3.2 机构的弹性位移

用振型叠加法,可以求得系统在广义力激励下的动态响应。在机构运动的任意位置,先求得系统的各阶模态频率 p_r 和正则振型矩阵 \mathbf{A}_N ,用正则坐标 \mathbf{U}_N 代替原广义坐标,进行线性变换

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}_N \mathbf{U}_N \quad (12)$$

将式(12)代入式(10),并左乘 \mathbf{A}_N^T 得到一组正则坐标表示的互不耦合的强迫振动方程

$$\ddot{u}_{Nr} + p_r^2 u_{Nr} = F_{Nr}(t) \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

每个正则坐标的响应为

$$u_{Nr} = \frac{\dot{u}_{Nr0}}{p_r} \sin(p_r t) + u_{Nr0} \cos(p_r t) + \frac{F_{Nr}}{p_r^2} [1 - \cos(p_r t)] \quad (13)$$

式中 u_{Nr0}, \dot{u}_{Nr0} ——正则坐标下的初始值

由于系统的物理参数 (\mathbf{M}, \mathbf{U} 和 \mathbf{F}) 以及模态频率 p_r 都是时间 t 的极其复杂的函数,式(13)无法表示成时间 t 的解析式。因而将时间离散,在每个微小时间间隔,以上的物理参数和模态参数可看作常量,每个时间间隔计时都从零开始,间隔用 t_k 表示,系统的响应递推格式为

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{U}_{N0}^{(k)} &= \mathbf{A}_N^{(k)T} \mathbf{M}^{(k)} \mathbf{U}_0^{(k)} \\ \dot{\mathbf{U}}_{N0}^{(k)} &= \mathbf{A}_N^{(k)T} \mathbf{M}^{(k)} \dot{\mathbf{U}}_0^{(k)} \\ u_{Nr0}^{(k+1)} &= \frac{\dot{u}_{Nr0}^{(k)}}{p_r^{(k)}} \sin(p_r^{(k)} t_k) + \\ &u_{Nr0}^{(k)} \cos(p_r^{(k)} t_k) + \frac{F_{Nr}^{(k)}}{p_r^{2(k)}} [1 - \cos(p_r^{(k)} t_k)] \\ \dot{u}_{Nr0}^{(k+1)} &= \dot{u}_{Nr0}^{(k)} \cos(p_r^{(k)} t) - \\ &p_r^{(k)} u_{Nr0}^{(k)} \sin(p_r^{(k)} t_k) + \frac{F_{Nr}^{(k)}}{p_r^{(k)}} \sin(p_r^{(k)} t_k) \\ \mathbf{U}^{(k+1)} &= \mathbf{A}_N^{(k+1)} \mathbf{U}_{N0}^{(k+1)} \\ \dot{\mathbf{U}}^{(k+1)} &= \mathbf{A}_N^{(k+1)} \dot{\mathbf{U}}_{N0}^{(k+1)} \end{aligned} \right. \quad (r=1, 2, \dots, n)$$

与机构的刚体运动相比,构件的弹性变形引起的位移很小,这种弹性位移不会影响机构的刚体运动,因而机构的真实运动可以看作是机构的刚体运动和弹性振动的叠加,弹性位移标志着在运动过程中振动量的大小,它是机构运动误差的度量。在得到瞬时位置的广义坐标 $\mathbf{U}^{(k+1)}$ 后,经过式(9)的坐标变换,得到各节点在其局部坐标系的位移,再依次用式(7)、(8)和(11)求得机构各点的真实位置,将其与机构作刚体运动的相应位置进行比较,即能确定机构上各点振动量的大小,及最大位移误差出现的部位。并联机构运动准确性可由动平台参考点的位

移误差度量,机构连续运动时,可得到动平台参考点的弹性位移误差的变化曲线,从而对给定运动条件下的机构运动精度进行评估。

3.3 机构的动应力分析

将三角形单元的位移表达式求偏导数,得到单元内任意一点的应变分量

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} u_i(t) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} v_i(t) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial y} u_i(t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i(x, y)}{\partial x} v_i(t) \end{aligned}$$

根据应力-应变关系方程得该点的应力分量

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\mu^2} \gamma_{xy} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

式中 E ——材料的弹性模量

μ ——材料的泊松比

该点的两个主应力和最大正应力、最大剪应力为

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_{\max} &= \sigma_1 \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned}$$

杆单元纵向振动引起的轴向应力沿截面均匀分布,杆横向振动产生的最大弯曲应力出现在截面上离中性轴最远处,在线弹性范围内,杆单元任意截面的最大正应力应是以上两种应力的叠加

$$\sigma_{\max} = \sigma^{(u)} + \sigma_{\max}^{(v)} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \eta_i(x)}{\partial x} u_i(t) + \frac{EJ}{W_z} \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} v_j(t)$$

式中 J ——截面的惯性矩

W_z ——抗弯截面系数

机构的动应力是一个重要指标,过大的动应力将导致构件疲劳破坏。由式(14)可见,在机构的每一位置,三角形平面单元的正应力和剪应力都与位置坐标无关,单元内各点具有相同的应力状态。而对于杆单元,最大正应力的轴向应力部分是位置坐标的常值函数,弯曲应力是位置坐标的线性函数,所以最大值出现在杆端部。

4 应用实例

给定机构的结构参数: $a = 60 \text{ cm}$, $b = 36 \text{ cm}$, $l_1 = 11.2 \text{ cm}$, $l_2 = 42.2 \text{ cm}$, 杆的直径分别为 $d_1 = 3 \text{ cm}$, $d_2 = 4 \text{ cm}$, 动平台为厚度 $h = 2.5 \text{ cm}$ 的均质板。各个主动构件初始位置角 $\phi_1^{(0)} = 60^\circ$, $\phi_2^{(0)} = 0$, $\phi_3^{(0)} = 220^\circ$, 主动构件匀速转动, $\dot{\phi} = [0.6 \quad 0.5 \quad 0.66] (\text{rad/s})$ 。以支链2的主动件连续转动一周为例, 在每一时刻, 机构位置正解方程式(2)有8组解, 其中4组符合机构的约束条件, 即对每一组主动件的输入参数, 动平台有4组可达位姿, 如何从多组解中挑选出最优的一组, 可以有不同的准则。通常情况下采用行程最短准则, 即在规划轨迹时选取一组使动平台的位姿变化量最小的解, 按照这个准则规划的动平台的位姿及轨迹变化平缓、光滑, 如图5和图6所示。在规划了机构的运动轨迹后, 动平台的运动速度和加速度可以分别按式(4)和式(6)求得, 得到机构的速度特性和加速度特性曲线, 如图7和图8所示。在主动件一个运动周期中, 按行程最短准则进行路径规划, 动平台的轨迹、速度和加速度表现出较好的运动学性能。

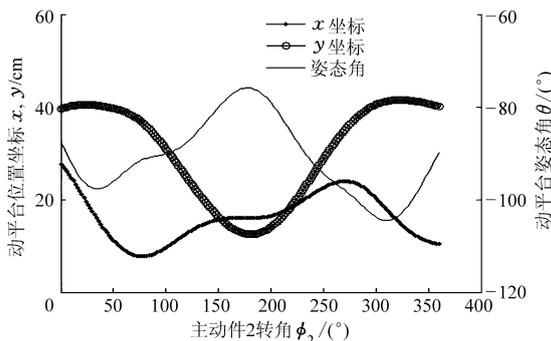


图5 动平台位姿变化曲线

Fig. 5 Position and posture variation of the moving position platform

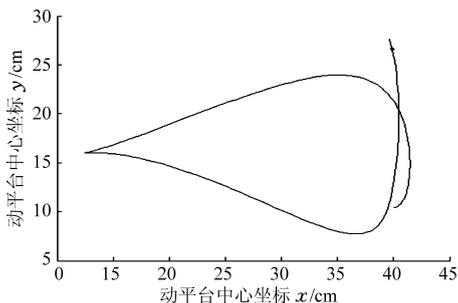


图6 动平台中心运动轨迹

Fig. 6 Trajectory of the moving platform's center

机构运动时, 系统的物理参数和模态参数等固有特性都会随之变化, 前几阶模态频率及其主振型随机构位姿的变化规律如图9和10所示。结果显示, 机构模态频率密集, 这表明除基频外, 前几阶振

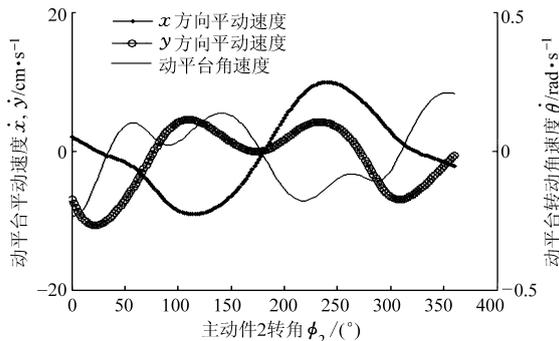


图7 动平台速度特性

Fig. 7 Velocity characteristics of the moving platform

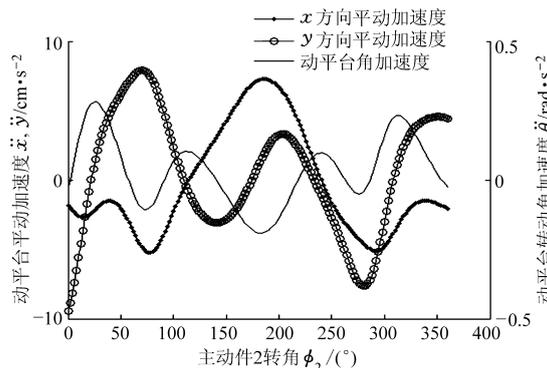


图8 动平台加速度特性

Fig. 8 Acceleration characteristics of the moving platform

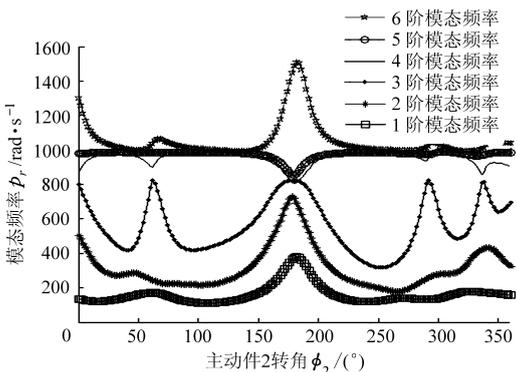


图9 机构模态频率

Fig. 9 Modal frequency of the mechanism

型对动态响应的影响不能低估, 因而在利用式(13)计算由结点位移构成的广义坐标时, 选取了机构的所有振型。由机构的主振型可见, 机构在低阶振型下, 各广义坐标振动的量级大致相当, 随着振动阶次的增高, 杆单元的振动比动平台振动强, 振动的型态也变得复杂多样, 尤其是杆的横向振动, 长度较大的杆单元成为机构的主要柔性环节。机构的真实运动可以看作是机构的刚体运动和弹性振动的叠加, 机构瞬时残余振动的型态, 反映了构件变形引起的运动误差, 机构按照预定的轨迹连续运动时, 动平台的位姿误差如图11所示, 动平台的真实运动是以其刚体运动为中心的波动。x坐标方向位置误差幅值为6.456 mm, y坐标方向位置误差幅值为9.158 mm,

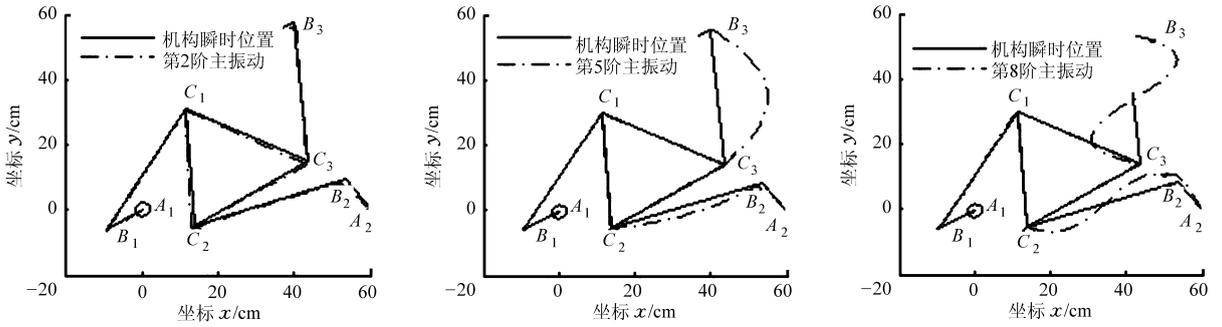


图10 机构主振型

Fig. 10 Main vibration mode of the mechanism

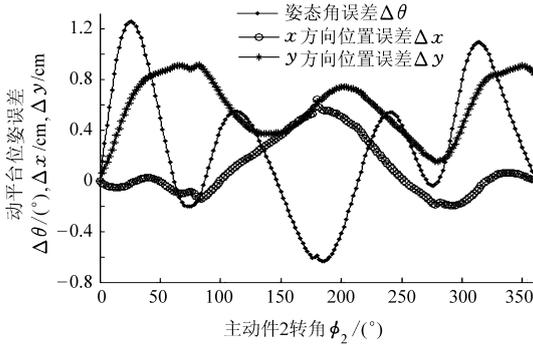


图11 动平台弹性位移变化曲线

Fig. 11 Elastic displacement variation of the moving platform

姿态误差的幅值为 1.2630° 。如前所述杆单元最大动应力出现在杆端部,三角形单元各点具有相同的应力状态,图12为支链2的杆端部最大动应力和动平台的应力随机构位姿变化的规律,在主动件2转动一周内,各个构件的应力状态是交替变化的,杆 A_2B_2 上动应力的变化范围为 $\pm 3.4671 \times 10^5$ Pa,杆 B_2C_2 上动应力的变化范围为 $\pm 1.3799 \times 10^5$ Pa,动平台上最大正应力变化范围为 $-5.5301 \times 10^4 \sim 6.0095 \times 10^4$ Pa,最大剪应力 2.7085×10^3 Pa,机构最大动应力出现在输入杆上,动平台上剪应力很小。

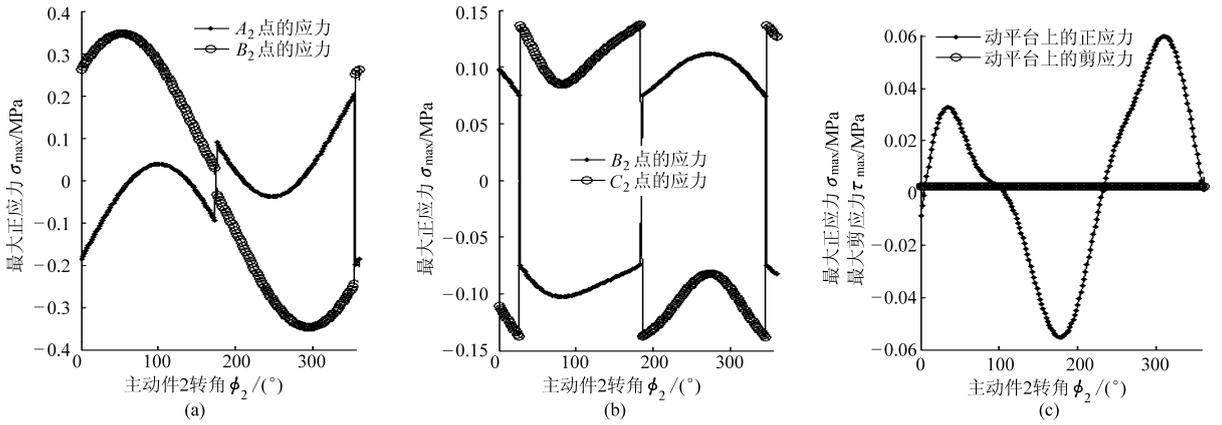


图12 最大动应力的变化曲线

Fig. 12 Variation of the maximum dynamic stress

(a) 杆件 A_2B_2 (b) 杆件 B_2C_2 (c) 动平台

5 结束语

采用行程最短的准则规划了机构的运动轨迹,使机构的轨迹、速度和加速度表现出较好的运动性能。利用有限元方法建立机构运动微分方程,得到机构模态频率随机构位姿的变化规律,通过模态分

析,揭示了机构残余振动的型态及动平台位姿误差的变化规律,找出了机构的主要柔性环节。讨论了动应力的分布及变化情况,找到了动应力危险部位。通过上述研究,可对并联机器人的运动学和动力学性能作出全面的评估。

参考文献

1 王友渔,赵兴玉,黄田,等. 可重构混联机械手 TriVariant 与 Tricept 的静动态特性预估与比较[J]. 天津大学学报, 2007, 40(1): 41 ~ 45.
Wang Youyu, Zhao Xingyu, Huang Tian, et al. Estimation and comparison of static and dynamic performance of two reconfigurable hybrid robots—the TriVariant and the Tricept [J]. Journal of Tianjin University, 2007, 40(1): 41 ~ 45.

- (in Chinese)
- 2 Gabriel P. Dynamic finite-element analysis of a planar high-speed, high-precision parallel manipulator with flexible links[D]. Toronto, Canada: University of Toronto, 2003.
 - 3 刘善增,余跃庆,苏丽颖,等. 3-RRS 柔性并联机器人的动力学建模与频率特性分析[J]. 中国机械工程, 2008, 19(10): 1 219 ~ 1 223.
Liu Shanzeng, Yu Yueqing, Su Liying, et al. Dynamics modeling and frequency analysis of a 3-RRS flexible parallel manipulator [J]. China Mechanical Engineering, 2008, 19(10): 1 219 ~ 1 223. (in Chinese)
 - 4 韩清凯,于涛,杜戊,等. 六杆并联机器人模态实验与动力学特性分析[J]. 振动工程学报, 2003, 16(3): 349 ~ 353.
Han Qingkai, Yu Tao, Du Wu, et al. Experimental modal measurement and dynamical analysis for 6 link parallel robot [J]. Journal of Vibration Engineering, 2003, 16(3): 349 ~ 353. (in Chinese)
 - 5 邱丽芳,翁海珊,俞必强,等. 不完全分布柔度全柔性机构拟柔性模型研究[J]. 农业机械学报, 2009, 40(4): 189 ~ 192.
Qiu Lifang, Weng Haishan, Yu Biqiang, et al. Imitate-compliant-body model for fully compliant mechanisms of incomplete distributed compliance [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2009, 40(4): 189 ~ 192. (in Chinese)
 - 6 杜兆才,余跃庆,张绪平. 平面柔性并联机器人动力学建模[J]. 机械工程学报, 2007, 43(9): 96 ~ 101.
Du Zhaocai, Yu Yueqing, Zhang Xuping. Dynamic modeling of planar flexible parallel manipulator [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(9): 96 ~ 101. (in Chinese)
 - 7 Benosman M, Le Vey G. Joint trajectory tracking for planar multi-link flexible manipulator: simulation and experiment for a two-link flexible manipulator [C] // 2002 Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002, 3: 2 461 ~ 2 466.
 - 8 Huang Tian, Mei Jiangping, Li Zhanxian. A method for estimating servomotor parameters of a parallel robot for rapid pick-and-place operations [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 2005, 127(4): 596 ~ 601.
 - 9 刘延杰,孙立宁,刘品宽,等. 一种新型高速精密机器人的弹性动力学研究[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2003, 35(11): 1 294 ~ 1 297.
Liu Yanjie, Sun Lining, Liu Pinkuan, et al. Kineto-elastodynamic analysis of new high speed and high precision robotic mechanism [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2003, 35(11): 1 294 ~ 1 297. (in Chinese)
 - 10 杨启志,马履中,郭宗和,等. 基于影响系数的新型全柔性微动并联机器人运动特性分析[J]. 中国机械工程, 2007, 18(2): 213 ~ 216.
Yang Qizhi, Ma Lüzhong, Guo Zonghe, et al. Kinematical analysis on a novel 3-DOF translational fully compliant parallel micro-robot based on influence coefficients [J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(2): 213 ~ 216. (in Chinese)
 - 11 吴军,李铁民,唐晓强. 平面并联机构的残余振动控制[J]. 机械工程学报, 2006, 42(11): 49 ~ 53.
Wu Jun, Li Tiemin, Tang Xiaoqiang. Residual vibration control of planar parallel mechanism [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42(11): 49 ~ 53. (in Chinese)
 - 12 朱伟,马履中,吴伟光,等. 基于三平移并联机构的三维减振平台建模与仿真[J]. 农业机械学报, 2008, 39(1): 142 ~ 146.
Zhu Wei, Ma Lüzhong, Wu Weiguang, et al. Modeling and simulation analysis on multi-dimensional damping platform base on three-translation parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2008, 39(1): 142 ~ 146. (in Chinese)
 - 13 杜兆才,余跃庆. 柔性机器人的动态应力计算及疲劳特性分析[J]. 中国机械工程, 2007, 18(24): 2 985 ~ 2 988.
Du Zhaocai, Yu Yueqing. Research on dynamic stress and endurance characteristics of flexible robots [J]. China Mechanical Engineering, 2007, 18(24): 2 985 ~ 2 988. (in Chinese)