doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2026.17.038

融合瞬时与连续运动学的并联机器人性能评价与尺度设计

方汉良[1]　陆淼明[1]　汤腾飞[2]　林建辛[1]　葛姝翌[3]　张　俊[3]

(1. 福州大学先进制造学院, 晋江 362251; 2. 浙江理工大学机械工程学院, 杭州 310018;
3. 福州大学机械工程及自动化学院, 福州 350108)

摘要: 并联机器人是大型复杂结构件的优势解决方案,其运动学性能是工作能力的重要表征。然而,评价并联机器人运动学性能的指标类型繁多,且各指标与尺度参数之间的映射关系不尽相同,导致兼顾各类运动学性能的尺度设计仍极具挑战。本文拟构建一个融合瞬时与连续运动学的并联机器人综合性能表征模型,进而将复杂的尺度参数-运动学性能适配设计转化为数学形式下的参数寻优。首先,以期望的各类运动学性能指标阈值为边界,构造考虑占地空间约束的并联机器人综合运动能力指标,并以其为设计目标建立机器人尺度寻优模型。然后,基于上述模型,提出一种兼顾瞬时与连续运动学性能的并联机器人尺度设计策略,并采用改进蒙特卡洛法实现尺度参数的快速寻优。最后,以 2PRU-(2PRU)R 冗余驱动并联机器人和 3P(2UU)恰驱动并联机器人为两组设计案例,示范考虑各类运动学性能的尺度设计流程,并通过综合运动学性能评估,验证了尺度设计结果的正确性与所提策略的可行性。

关键词: 并联机器人; 运动学; 性能指标; 尺度设计; 2PRU-(2PRU)R; 3P(2UU)

中图分类号: TH112　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1000-1298(2026)17-0414-13　　**OSID:**

Performance Evaluation and Dimensional Synthesis of Parallel Robots by Integrating Instantaneous and Continuous Kinematics

Fang Hanliang[1]　Lu Miaoming[1]　Tang Tengfei[2]　Lin Jianxin[1]　Ge Shuyi[3]　Zhang Jun[3]

(1. *School of Advanced Manufacturing, Fuzhou University, Jinjiang* 362251, *China*
2. *School of Mechanical Engineering, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou* 310018, *China*
3. *School of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou* 350108, *China*)

Abstract: Parallel robots offer an advantageous solution for large and complex structural components, and their kinematic performance serves as an important indicator of operational capability. However, the evaluation of parallel robots involves a wide variety of kinematic performance indices, and the mapping relationships between these indices and dimensional parameters differ from one another, making dimensional design that simultaneously accounts for multiple kinematic performances highly challenging. Aiming to comprehensively characterize the kinematic performance of parallel robots by integrating instantaneous and continuous performance measures, this study established a unified performance characterization model, thereby reformulating the complex dimensional parameter - kinematic performance matching problem as a parameter optimization problem. Firstly, with the expected threshold values of various kinematic performance indices taken as the boundary conditions, a comprehensive motion capability index for parallel robots was formulated subject to footprint constraints, and a dimensional optimization model was established by taking this index as the design objective. Then, based on the proposed model, a dimensional synthesis strategy for parallel robots that considered both instantaneous and continuous kinematic performances was developed, and an improved Monte Carlo method was employed to achieve rapid optimization of dimensional parameters. Finally, the 2PRU - (2PRU) R

收稿日期: 2026-01-19　修回日期: 2026-04-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(52375009)、福建省自然科学基金项目(2024J08147、2024J02007、2024J08133)和福建省重大科技项目(2024HZ025021)

作者简介: 方汉良(1994—),男,讲师,博士,主要从事机器人机构学、机器人装备等研究,E-mail: fang_fzu@163.com

通信作者: 张俊(1981—),男,教授,博士,主要从事机器人机构学、机械传动和机械动力学研究,E-mail: zhang_jun@fzu.edu.cn

redundantly actuated parallel robot and the 3P(2UU) exactly actuated parallel robot were taken as two design cases to demonstrate the dimensional design procedure considering multiple kinematic performances, and a comprehensive kinematic performance evaluation was conducted to verify the validity of the dimensional design results and the feasibility of the proposed strategy.

Key words: parallel robot; kinematics; performance index; dimension design; 2PRU -(2PRU) R; 3P(2UU)

0　引言

并联机器人在负重比、刚度质量比、动态稳定性、可重构性等方面，相比于关节型机器人和堆叠式串联机构具有明显优势[1-3]，在航天航空、轨道交通、农业自动化、电子封装等战略性产业有重要的工程应用。例如，典型的 Stewart 并联机器人，已在海浪补偿、航空航天模拟训练和高端装备制造等工程领域实现规模化应用[4-6]。以 Spindle Z3[7]、Exechon[8]、Tricept[9] 等为代表的商用并联机器人，已被证实是大型航天航空铝合金结构件高效加工的优势解决方案。张春燕等[10]提出的可折展移动并联机构，为丘陵山地等农业场景提供了一种新的移动作业解决方案。高速型 Delta 并联机器人，已广泛用于医药、电子等产品的码垛封装，并展示出绝对的速度优势[11-13]。为此，学术界与工程界围绕并联机器人的创新和应用展开了深入研究，并提出了诸多新的构型方案和应用场景[14]。

运动学性能是评价并联机器人使役性能的核心指标之一[15-16]。选定拓扑构型后，尺度参数是影响并联机器人运动学性能的主要因素[17-18]。在早期阶段，并联机器人的尺度设计主要依赖于设计者的经验或类比，通过重复开展并联机器人的尺度参数调整与运动性能校核，进而选定合适的尺度参数。直观地，这一方法存在设计盲目性大、工作量多、效率低下等问题。为解决这一问题，众多学者在并联机器人运动学性能量化研究的基础上，探索了多种尺度设计策略。根据运动学性能类型的不同，常用的尺度设计策略大致可分为两大类：以连续运动学性能为设计目标的尺度设计和以瞬时运动学性能为设计目标的尺度设计。其中，前者以位移工作空间、转角工作空间等连续运动学指标为设计目标，开展并联机器人的尺度设计。Dastjerdi 等[19]在给定工作空间的前提下，优化了一类 Delta 并联机器人的尺度设计，将其可达工作空间与占地空间比提高了近一倍。以可达工作空间为设计目标，Deng 等[20]以满足超声诊断工作需求的工作空间为设计目标，借助遗传算法完成了 6 - RSS Stewart - Gough 并联机器人的尺度参数设计。栾飞等[21]优化了 4PC - 2R 平面并联机构的尺度参数，将可达工作空间面积从 0.153 m^2 提高到 0.199 m^2。后者以灵巧度、运动/力传递特性等瞬时运动学性能为设计目标，开展并联机器人的尺度设计。Jin 等[22]以灵巧度为设计目标，优化了 Exechon 并联机器人的尺度参数，有效提升了此类机器人在其工作全域内的灵巧度性能。利用相似的指标，陈修龙等[23]借助遗传算法优化了 4 -UPS - RPU 冗余并联机器人的尺度参数，使其灵巧度性能得到显著改善。另外，Che 等[24]提出了一种以运动/力传递特性为设计目标的并联机器人尺度综合方法，并据此确定了 Rec4 并联机器人的尺度参数可行域。

值得注意的是，构成并联机器人运动学性能指标的类型繁多，而各指标与尺度之间的映射关系不尽相同。关注单一运动学性能提升的尺度调整，可能带来并联机器人其他运动学性能的下降，导致机器人各运动学性能指标失衡，而难以满足复杂工况对并联机器人提出的严苛空间运动能力需求。尽管上述的尺度设计策略，解决了并联机器人满足单一运动学性能需求的尺度参数可行域，仍难以确定满足各运动学性能需求的尺度参数值。因此，如何突破基于单一运动学指标的尺度设计所带来的局限性，提出兼顾多个运动学性能指标的尺度设计策略，进而实现满足任务特征需求的机器人空间运动能力，仍是并联机器人设计阶段需要解决的难题。

解决上述难题的思路主要有两种：①利用现有尺度设计方法，分别以各运动学性能指标为设计目标，多次开展并联机器人的尺度设计，并通过求解对应尺度参数可行域的交集，以获得满足各运动学性能需求的尺度参数。②在现有运动学性能量化研究的基础上，构建兼顾瞬时与连续运动层面运动学的综合性能表征模型，探明尺度参数对机器人运动能力的影响规律，进而提出融合各项运动学性能的并联机器人尺度设计策略。显然，相比于第 1 种思路，第 2 种思路将各项运动学性能合并到一个设计过程，具有更高效的潜在设计效率，可以更多减少设计者工作量，更大程度提高并联机器人的设计效率与迭代速度。

鉴于此，本文拟采用第 2 种思路，从瞬时与连续层面的运动学性能入手，开展并联机器人综合运动

学性能评价模型与尺度设计方法研究。首先,将灵巧度、运动/力传递特性、工作空间等运动学性能融合到统一数学框架,建立并联机器人综合运动性能的表征模型。在此基础上,提出尺度设计方法和具体流程,以克服传统尺度设计中易出现的运动学性能指标失衡问题。其次,以 2PRU -(2PRU)R 冗余驱动并联机器人和 3P(2UU)恰驱动并联机器人为例,展示所提尺度设计策略的应用流程。最后,基于尺度设计结果,分析两类并联机器人的工作空间、灵巧度及运动/力传递特性等运动学性能,验证所提尺度设计策略的可行性。

1 并联机器人统一数学模型

1.1 运动学定义

并联机器人的机构运动简图如图 1 所示,并联机器人的基本骨架为多闭环机构,主要由静平台、动平台和 n 条运动支链组成。静平台和动平台通过运动支链连接,每条运动支链分布有 $k_i(i=1\sim n)$ 个运动副。$B_i(i=1\sim n)$ 表示连接在静平台的运动副几何中心,其构成多边形 $B_1B_2\cdots B_n$。$A_i(i=1\sim n)$ 表示连接在动平台的运动副几何中心,其构成多边形 $A_1A_2\cdots A_n$。O 和 O_0 分别表示多边形 $B_1B_2\cdots B_n$ 和 $A_1A_2\cdots A_n$ 的几何中心。在点 O 处建立全局坐标系 $O-xyz$,其 x 轴和 y 轴垂直分布在静平台上,z 轴垂直于静平台,且 x 轴、y 轴和 z 轴服从右手定则。

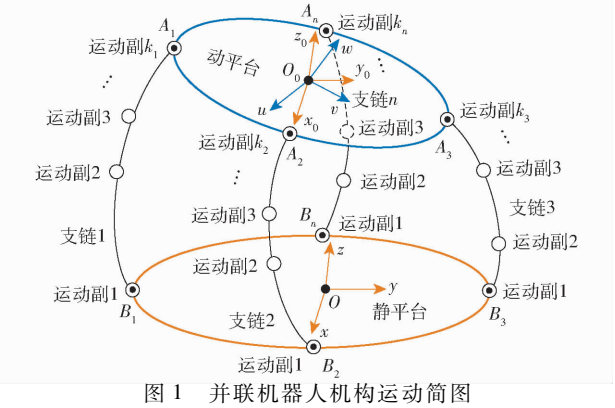


图 1 并联机器人机构运动简图

Fig. 1 Simplified motion diagram of parallel robots

1.2 多目标函数构造

(1)典型运动学性能指标

围绕并联机器人运动学性能的量化研究,运动学性能指标大致可分为连续运动学性能指标和瞬时运动学性能指标两类,如表 1 所示。

(2)统一目标函数构造

以具有良好灵巧度、运动/力传递特性等瞬时运动学性能的可达位姿(即满足各项瞬时运动学性能指标阈值需求),作为并联机器人的一个良好工作位姿,即

表 1 常用并联机器人运动学性能指标

Tab. 1 Commonly used kinematic performance indices for parallel robots

类型	名称	物理含意
连续运动学性能指标	位移工作空间	机器人末端执行器能到达的所有空间区域集合
	转角工作空间	机器人末端执行器能实现的所有姿态集合
	占地空间利用率	机器人可达工作空间与其占地空间之比
	工作空间利用率	机器人良好工作空间与可达工作空间之比
瞬时运动学性能指标	灵巧度	机器人远离奇异性程度
	运动/力传递特性	机器人输入/输出端的有效瞬时功率占比

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_p=[w_1,w_2,\cdots,w_i,\cdots,w_f] \\ d_{PM}\geqslant d_{PM0} \\ \rho_{PM}\geqslant\rho_{PM0} \end{cases} \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{g}_p$ 表示并联机器人的一个良好工作位姿,w_i 表示机器人在全局坐标系 $O-xyz$ 下的独立运动变量,f 表示自由度数目,d_{PM}、ρ_{PM} 表示机器人在当前位姿 $[w_1, w_2,\cdots, w_f]$ 下的瞬时灵巧度和运动/力传递特性指标。d_{PM0}、ρ_{PM0} 分别表示良好灵巧度性能和运动/力传递特性的指标阈值。

定义所有良好工作位姿 $\boldsymbol{g}_p$ 的集合作为并联机器人的良好工作空间 W_{PM}。以 $\Delta\theta$、Δp 分别作为姿态坐标和位置坐标的搜索增量,可将 W_{PM} 等效为大量良好工作单元体的叠加,并以单元体的相对数量来构造无量纲化的并联机器人空间运动能力评估指标,即

$$n_{PM}=\frac{\iint\cdots\int \mathrm{d}w_1\mathrm{d}w_2\cdots\mathrm{d}w_i}{(\Delta\theta)^{f_1}(\Delta p)^{f_2}}\quad(f_1+f_2=f) \tag{2}$$

式中,n_{PM} 表示并联机器人空间运动能力评估指标,其值越大,表明并联机器人空间运动能力越好。f_1、f_2 分别为并联机器人的移动自由度数目和转动自由度数目。

考虑装备占地尺寸对工程环境的影响,定义足以包络所有良好工作位姿下并联机器人的长方体为机器人占地空间 W_p。类似地,分别以相同的 Δp 为增量,可将 W_{PM} 等效为大量的空间单元体,以单元体的数量评估其占地空间大小 n_p,即

$$n_P=\frac{\iiint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(\Delta p)^3} \tag{3}$$

以良好工作空间 W_{PM} 与其占地空间 W_p 的比值,构造并联机器人的综合运动能力指标,即

$$n_W = \frac{n_{PM}}{n_P} \tag{4}$$

从物理含意上看，n_W表征了并联机器人的空间利用率，其值越大，则表明在相似的占地体积下，并联机器人将具有更优异的空间运动能力。

以任务需求的位移行程、转角行程，以及机器人的空间布置限制为约束条件，以最大的综合运动能力指标，即最大的 n_W为优化目标，来构造并联机器人的尺度设计目标函数。基于上述定义，可将并联机器人的尺度设计问题转化为数学形式下的非线性规划函数，即

$$\begin{cases} \max f(s_1, s_2, \cdots, s_t) = n_W & (1 \leqslant t \leqslant n_1) \\ w_{P0,1} \leqslant w_{P,1}, \cdots, w_{P0,i} \leqslant w_{P,i} & (1 \leqslant i \leqslant f_1) \\ w_{R0,1} \leqslant w_{R,1}, \cdots, w_{R0,j} \leqslant w_{R,j} & (1 \leqslant j \leqslant f_2) \\ w_{px0} \geqslant w_{px} \\ w_{py0} \geqslant w_{py} \\ w_{pz0} \geqslant w_{pz} \end{cases} \tag{5}$$

式中，$f(s_1, s_2, \cdots, s_t)$表示并联机器人的尺度设计函数，s_t表示并联机器人的设计变量，n_1 为设计变量的总数目。$w_{P0,i}$、$w_{P,i}$分别表示任务需求的第 i 个位移行程和并联机器人良好工作空间内的第 i 个可达位移行程。$w_{R0,j}$、$w_{R,j}$分别表示任务需求的第 j 个转角行程和良好工作空间内的第 j 个可达转角行程。w_{px0}、w_{py0}和 w_{pz0}表示机器人的空间布置限制，即在 x 轴、y 轴、z 轴方向的最大占用尺寸。w_{px}、w_{py}和 w_{pz}表示机器人占地空间，即在 x 轴、y 轴、z 轴方向的占用尺寸。

根据作者前期提出的分层搜索算法[25]，构建并联机器人良好工作空间 W_{PM}、占地空间 W_P及综合运动能力指标 n_W的求解算法，如图 2 所示。

```
s_1, s_2, …, s_n   % 导入并联机器人 n 个尺度参数
w_1 = [w_10, w_1max], …, w_f = [w_f0, w_fmax], Δw_1, …, Δw_f   % 给定 f 个运动变量搜索区间及间隔
d_PM0, ρ_PM0;   % 给定瞬时运动学性能指标阈值
w_1 = w_10, w_2 = w_20, …, w_f = w_f0, i = 0
for w_1 ⩽ w_1max
  w_1 = w_1 + Δw_1
  for w_2 ⩽ w_2max
    w_2 = w_2 + Δw_2
    ……
    for w_f ⩽ w_fmax
      w_f = w_f + Δw_f
      (w_1, w_2, …, w_f) → (j_1, j_2, …, j_k);   % 代入位置逆解得到 k 个关节位置
      (w_1, w_2, …, w_f) & (r_1, r_2, …, r_n) → J_pa, $_A,O, $_A,I   % 计算齐次雅可比矩阵和旋量
      J_pa → d_PM   % 计算灵巧度数学模型
      ($_A,O, $_A,I) → ρ_PM   % 计算运动/力传递特性指标数学模型
        if j_1 ∈ [j_10, j_1max] &…& j_k ∈ [j_k0, j_kmax]   % 所有关节位置都在关节行程内
          if d_PM ⩾ d_PM0 & ρ_PM ⩾ ρ_PM0
            T[i, :] = (w_1, w_2, …, w_f)
          i = i + 1
          end
        end
      end
    ……
  end
end
T → W_PM, W_P   % 由良好工作位姿点得到良好工作空间 W_PM 和占地空间 W_P
W_PM, W_P → n_W   % 计算综合运动能力指标 n_W
```

图 2　评价指标求解算法

Fig. 2　Evaluation metric solution algorithm

2　尺度设计策略

在上述目标函数的基础上，构建并联机器人尺度参数设计流程。图 3 为所提并联机器人尺度参数设计策略的流程图。

所提尺度参数设计策略包括以下 5 个步骤：

（1）运动学模型构建

在位置解析建模与运动/约束/驱动旋量系分析的基础上，建立并联机器人的灵巧度性能指标、运动/力传递特性指标等求解模型。

（2）设计变量整定

尺度参数定义：以并联机器人的基本尺度参数为主要设计变量，具体包括关节中心点 B_i($i = 1 \sim n$)到静平台几何中心 O 的距离 $r_{b,i}$、关节中心点 A_i($i = 1 \sim n$)到动平台几何中心O_0的距离$r_{a,i}$、连接各关节的连杆长度(r_1、r_2、…、r_l)、主动关节行程($r_{P,1}$、$r_{P,2}$、…、$r_{P,v}$)等。

无量纲化处理：一般地，动平台作为输出构件，其大小受制于末端执行器的接口。故以满足末端执行器安装的最小 $r_{a,i}$($i = 1 \sim n$)为参考，即 $r_{a,\min}$，为提高计算效率，对各设计变量进行无量纲化及降阶处理，有

$$\begin{cases} e_{a,i} = \dfrac{r_{a,i}}{r_{a,\min}} & (i = 1 \sim n) \\ e_{b,i} = \dfrac{r_{b,i}}{r_{a,\min}} & (i = 1 \sim n) \\ e_{P,x} = \dfrac{r_{P,x}}{r_{a,\min}} & (x = 1 \sim v) \\ e_t = \dfrac{r_t}{r_{a,\min}} & (t = 1 \sim l) \end{cases} \tag{6}$$

式中　r_t——连杆长度

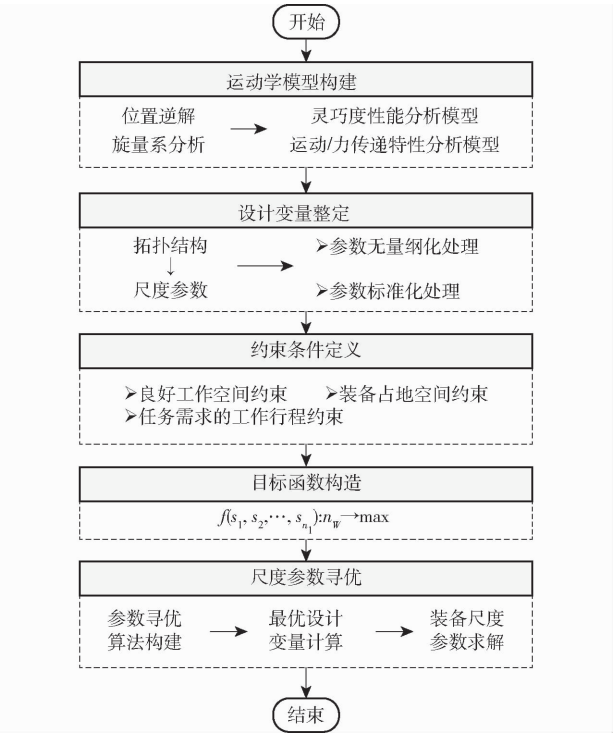


图 3 尺度设计流程图

Fig. 3 Dimension design flowchart

l——连杆数量

v——主动关节数量

标准化处理:为将无限的设计空间约束变为有限的参数区间,可利用多源参数优化方法[26],对上述变量进行标准化处理,则有

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{e_{a,1}}{\tau_D}, \cdots, \tau_n = \dfrac{e_{a,n}}{\tau_D}, \\ \tau_{n+1} = \dfrac{e_{b,1}}{\tau_D}, \cdots, \tau_{2n} = \dfrac{e_{b,n}}{\tau_D}, \\ \tau_{2n+1} = \dfrac{e_{P,1}}{\tau_D}, \cdots, \tau_{2n+v} = \dfrac{e_{P,v}}{\tau_D}, \\ \tau_{2n+v+1} = \dfrac{e_1}{\tau_D}, \cdots, \tau_{2n+v+l} = \dfrac{e_l}{\tau_D} \\ (0 < \tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{2n+v+l} < d) \\ \tau_D = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} e_{a,i} + \sum\limits_{i=1}^{n} e_{b,i} + \sum\limits_{i=1}^{v} e_{P,i} + \sum\limits_{i=1}^{l} e_i}{2n + v + l} \\ \sum\limits_{i=1}^{2n+v+l} \tau_i = d \end{cases} \tag{7}$$

式中,τ_D表示标准化因子;τ_1, τ_2, $\cdots$, τ_{2n+v+l}为标准化处理后的设计变量;d 表示自定义的设计变量上边界,一般 $d=1$ 或 $d=2n+v+l$(设计变量个数)。

(3) 约束条件定义

根据任务对并联机器人提出运动能力需求,确定机器人的最小运动行程范围和良好工作位姿条件。同时,根据任务场景容许的机器人布置空间边界,约束机器人的占地空间。

(4) 目标函数构造

以综合运动能力指标为设计目标,以式(7)所示的参数为设计变量,以上述给定的机器人运动能力与占地空间为约束条件,利用式(5)构造并联机器人尺度参数设计的目标函数。

(5) 尺度参数寻优

基于上述构造的目标函数,采用一种改进的蒙特卡洛寻优算法,求解并联机器人的最优尺度参数。首先,通过采用传统的蒙特卡洛法,获得一个中间设计参数,完成设计参数的粗定位;然后,以中间设计参数为均值,构造一个正态分布函数,对中间设计参数附近进行局部拓展与密化处理,获得一个最优设计参数,完成最优设计参数精定位,进而获得最优尺度参数。该算法通过全局区域快速定位与局部区域最优求解,极大减少了传统蒙特卡洛全局最优求解的样本数据量与计算量,可提高最优尺度参数的计算效率和精度。

为便于理解与实施,图 4 给出改进蒙特卡洛寻优算法在并联机器人尺度参数求解上的应用。

3 应用示例

以冗余驱动并联机器人和恰驱动并联机器人为两组设计案例,示范基于综合运动学性能评价模型的并联机器人尺度设计流程。

3.1 2PRU-(2PRU)R 并联机器人

3.1.1 机器人描述

图 5 为 2PRU-(2PRU)R 并联机器人的机构简图,其拓扑构型为 2PRU-(2PRU)R,主要由双动平台模块、静平台以及 4 条相同构型的运动支链组成。双动平台模块包括上平台、下平台以及连接上、下平台的转动副,其上平台通过支链 1 和支链 3 连接,下平台通过支链 2 和支链 4 连接,上、下平台转动轴线相交于点 O_1。为实现机器人性能的对称性,此处将 4 条支链按中心对称分布布局。根据前期运动学分析结果,2PRU-(2PRU)R 并联机器人具有两转动一平动的运动能力。

如图 5 所示,B_i($i=1\sim4$)表示第 i 个移动副轴线上的一个参考点。O 为正方形 $B_1B_2B_3B_4$的几何中心。A_1与 A_3表示连接在上平台的虎克铰几何中心,A_2与 A_4表示连接在下平台的虎克铰几何中心,A_1A_3和 A_2A_4相交于点 O_1。在点 O 建立全局坐标系 $O-xyz$,其 x 轴由点 O 指向点 B_1,y 轴由点 O 指向点 B_2,z 轴服从右手螺旋法则。在点 O_1建立运动坐标系 $O_1-u_1v_1w_1$,其 u_1轴由点 O_1指向点 A_1,w_1轴同时垂直于 A_1A_3和 A_2A_4,v_1轴服从右手螺旋法则。此外,

$s_1=[s_{10},\ s_{1\max}]$，$s_2=[s_{20},\ s_{2\max}]$，…，$s_{n_1}=[s_{n_10},\ s_{n_1\max}]$　% 导入处理后的设计变量及范围

$w_{P0,i}(i=1\sim f_1)$，$w_{R0,j}(j=1\sim f_2)$，w_{px0}，w_{py0}，w_{pz0}　% 给定任务需求移动行程大小、转角行程大小及占地空间约束

N，$x=1$，$y=1$，$S=\mathrm{zero}[N,\ n_1+1]$

for $x\leqslant N$

　rand→$(s_1,\cdots,s_{n_1})$ % 范围内随机生成一组设计参数

　$(s_1,\ s_2,\cdots,s_{n_1})\rightarrow(r_1,\ r_2,\cdots r_n)$　% 计算对应尺度参数

　$(r_1,r_2,\cdots,r_n)\rightarrow(W_{PM},W_P,n_W)$，

　　$W_{PM}=[w_{P,1},\cdots,w_{P,f1},w_{R,1},\cdots,w_{R,f2}]$，

　　$W_P=[w_{px},\ w_{py},w_{pz}]$　% 计算 3 个指标

　if $(w_{P,1}\geqslant w_{P0,1}$ & … & $w_{P,f1}\geqslant w_{P0,f1}$ & $w_{R,1}\geqslant w_{R0,1}$ & … & $w_{R,f2}\geqslant w_{R0,f2}$ & $w_x\leqslant w_{x0}$ & $w_y\leqslant w_{y0}$ & $w_z\leqslant w_{z0})$　% 行程判断及占地空间边界判断

　　$S[y,\ :]=[n_W,(s_1,\cdots,s_{n_1})]$　% 保存 n_W 及设计参数

　　$y=y+1$

　end

　$x=x+1$

end

$S(\max(n_W))\rightarrow M=(s_1,\ s_2,\cdots,\ s_{n_1})$　% n_W 最大值对应的设计参数为中间设计参数 M

$F=f(\mu=M=(s_1,\ s_2,\cdots,\ s_{n_1}),\sigma)$　% 给定标准差 σ，中间设计参数为均值，建立正态分布函数 F

$F\rightarrow \boldsymbol{J}$　% 在中间设计参数附近生成 m 组设计参数，其满足正态分布规律，按行保存在矩阵 $\boldsymbol{J}$ 中

$x=1$，$y=1$，$S=\mathrm{zero}[m,\ n_1+1]$

for $x\leqslant m$

　$(s_1,\ s_2,\cdots,\ s_{n_1})=\boldsymbol{J}[x,\ :]$ % 取矩阵 $\boldsymbol{J}$ 中第 x 行设计参数

　$(s_1,\ s_2,\cdots,s_{n_1})\rightarrow(r_1,r_2,\cdots r_n)$　% 计算对应尺度参数

　$(r_1,\ r_2,\cdots,\ r_n)\rightarrow(W_{PM},\ W_P,\ n_W)$，$W_{PM}=[w_{P,1},\cdots,\ w_{P,f1},\ w_{R,1},\cdots,\ w_{R,f2}]$　% 计算 3 个指标大小

　if $(w_{P,1}\geqslant w_{P0,1}$ & … & $w_{P,f1}\geqslant w_{P0,f1}$ & $w_{R,1}\geqslant w_{R0,1}$ & … & $w_{R,f2}\geqslant w_{R0,f2})$

　　$Q[y,\ :]=[n_W,\ (s_1,\cdots,s_{n_1})]$　% 保存 n_W 及设计参数

　　$y=y+1$

　end

　$x=x+1$

end

$Q(\max(n_W))\rightarrow B=(s_1,\ s_2,\cdots,\ s_{n_1})$　% n_W 最大值对应的设计参数为最优设计参数 B

$B=(s_1,\ s_2,\cdots,\ s_{n_1})\rightarrow(r_1,\ r_2,\cdots,\ r_n)$　% 最优尺度参数

图 4　并联机器人最优参数求解算法

Fig. 4　Optimal parameter determination algorithm for parallel robots

在点 O_1 建立瞬时坐标系 $O_1-x_1y_1z_1$，其 x_1 轴、y_1 轴和 z_1 轴分别平行于全局坐标系的 x 轴、y 轴和 z 轴。

3.1.2　2PRU-(2PRU)R 运动学评价指标

为便于推导，定义以下变量：在全局坐标系 $O-xyz$ 下，$\boldsymbol{b}_i(i=1\sim4)$ 和 $\boldsymbol{r}_{O1}$ 分别表示点 B_i 和点 O_1 的位置矢量；$\boldsymbol{a}_i(i=1\sim4)$ 表示点 O_0 到点 A_i 的矢量。$\boldsymbol{s}_{i,j}(i=1\sim4,\ j=1\sim4)$ 表示第 i 条运动支链第 j 个单自由度关节的单位方向矢量。$\$_{i,j}(i=1\sim4,\ j=1\sim4)$ 表示瞬时坐标系下第 i 条运动支链第 j 个单自由度关节的单位旋量。$\$_{wc,i_1,j}$、$\$_{wa,i_1,j}$ 和 $\$_{tc,i_1,j}$ $(i_1=1,\ 3;\ j=1,\ 2)$ 分别表示支链 1 或支链 3 的约束旋量、驱动旋量、受限运动旋量。$\$_{wc,i_2}$、$\$_{wa,i_2}$、$\$_{tc,i_2}(i_2=2,\ 4)$ 分别表示支链 2 或支链 4 的约束旋量、驱动旋量、受限运动旋量。$\boldsymbol{R}$ 表示运动坐标系 $O_1-u_1v_1w_1$ 相对全局坐标系 $O-xyz$ 的变换矩阵。上述变量的具体推导过程，可参考文献[27]。

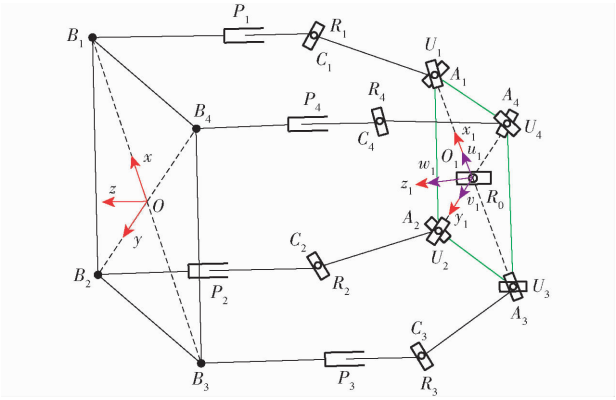


图 5　2PRU-(2PRU)R 并联机器人机构简图

Fig. 5　2PRU-(2PRU)R parallel robot sketch

为消除平、转耦合运动带来的量纲不统一和雅可比矩阵物理含义不清晰的问题，采用齐次雅可比矩阵的代数特征来构造机器人灵巧度性能指标。任意 3 个移动副都可构成该型并联机器人的一组恰驱动系统。在任一组恰驱动系统驱动下，并联机器人的灵巧度性能指标 $d_{\mathrm{NRA},i}$ 可表示为

$$d_{\mathrm{NRA},i}=\frac{1}{\|\boldsymbol{J}_{pa,i}\|\|(\boldsymbol{J}_{pa,i})^{-1}\|}\quad(1\leqslant i\leqslant4)\tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{J}_{pa,i}$ 表示以支链 i 为冗余驱动支链，2PRU-(2PRU)R 并联机器人的齐次雅可比矩阵，可表示为

$$\boldsymbol{J}_{pa,i}=[\boldsymbol{J}_{pa0,i}\boldsymbol{Ad}_g^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}_i)^{-1}\boldsymbol{J}_{a,i}^{\mathrm{T}}]^{-1}\tag{9}$$

式中，$\boldsymbol{J}_{pa0,i}$、$\boldsymbol{J}_{a,i}$、$\boldsymbol{J}_i$ 和 $\boldsymbol{Ad}_g^{\mathrm{T}}$ 分别表示由动平台 3 个运动特征点构成的运动特征矩阵、第 i 个恰驱动系统的驱动雅可比矩阵、全雅可比矩阵和调整矩阵。以支链 1、支链 2 和支链 3 为恰驱动系统作为范例，对应的 $\boldsymbol{J}_{pa0,4}$、$\boldsymbol{J}_{a,4}$、$\boldsymbol{J}_4$ 和 $\boldsymbol{Ad}_g^{\mathrm{T}}$ 可表示为

$$\begin{cases}\boldsymbol{J}_{pa0,4}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_0\\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{e}_0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{J}_{a,4}=\begin{bmatrix}\$_{wa,1}^{\mathrm{T}}/\$_{wa,1}^{\mathrm{T}}\$_{1,1}\\ \$_{wa,2}^{\mathrm{T}}/\$_{wa,2}^{\mathrm{T}}\$_{2,1}\\ \$_{wa,3}^{\mathrm{T}}/\$_{wa,3}^{\mathrm{T}}\$_{3,1}\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{J}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{a,4}\\ \boldsymbol{J}_c\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{Ad}_g^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & \boldsymbol{O}_{3\times3}\\ \boldsymbol{O}_{3\times3} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\end{cases}\tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{e}_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{J}_c=\begin{bmatrix}\$_{wc,1,1}^{\mathrm{T}}/\$_{wc,1,1}^{\mathrm{T}}\$_{tc,1,1}\\ \$_{wc,1,2}^{\mathrm{T}}/\$_{wc,1,2}^{\mathrm{T}}\$_{tc,1,2}\\ \$_{wc,2,1}^{\mathrm{T}}/\$_{wc,2,1}^{\mathrm{T}}\$_{tc,2,1}\\ \$_{wc,2,2}^{\mathrm{T}}/\$_{wc,2,2}^{\mathrm{T}}\$_{tc,2,2}\\ \$_{wc,3}^{\mathrm{T}}/\$_{wc,3}^{\mathrm{T}}\$_{tc,3}\\ \$_{wc,4}^{\mathrm{T}}/\$_{wc,4}^{\mathrm{T}}\$_{tc,4}\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{O}_{3\times3}$——3×3 的零矩阵

考虑不同冗余驱动特征,2PRU-(2PRU)R 并联机器人的灵巧度性能指标 d_{PM}可求解为

$$d_{PM}=\max\{d_{\mathrm{NRA},1},\ d_{\mathrm{NRA},2},\ d_{\mathrm{NRA},3},\ d_{\mathrm{NRA},4}\} \tag{11}$$

2PRU-(2PRU)R 并联机器人具有 4 个主动关节,其输入运动/力传递特性指标 $\rho_{\mathrm{int},PM}$可求解为

$$\rho_{\mathrm{int},PM}=\min\{\rho_{\mathrm{int},1},\rho_{\mathrm{int},2},\rho_{\mathrm{int},3},\rho_{\mathrm{int},4}\} \tag{12}$$

式中,$\rho_{\mathrm{int},i}$表示第 i 个主动运动副的输入运动/力传递特性指标,其可求解为

$$\rho_{\mathrm{int},i}=\frac{|\$_{wa,1}\circ\$_{1,1}|}{|\$_{wa,1}\circ\$_{1,1}|_{\max}}=\boldsymbol{s}_{i,1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{s}_{l,i}\quad(i=1,2,3,4) \tag{13}$$

锁住 2PRU-(2PRU)R 并联机器人任意两个主动关节,动平台具有唯一自由度,则机器人的输出运动/力传递特性指标 $\rho_{\mathrm{out},PM}$可求解为

$$\rho_{\mathrm{out},PM}=\min\{\rho_{\mathrm{out},1,2},\rho_{\mathrm{out},1,3},\cdots,\rho_{\mathrm{out},i_1,i_2}\}\quad(1\leqslant i_1\leqslant4;1\leqslant i_2\leqslant4;i_1\neq i_2) \tag{14}$$

式中,$\rho_{\mathrm{out},i_1,i_2}$表示机器人在支链 i_1和支链 i_2驱动下,且剩余两个主动关节驱动锁定下的输出运动/力传递特性指标。

主动关节驱动下的输出运动/力传递特性指标可表示为

$$\rho_{\mathrm{out},i_1,i_2}=\frac{|\$_{wa,i_1}\circ\$_{O,i_1,i_2}|+|\$_{wa,i_2}\circ\$_{O,i_1,i_2}|}{|\$_{wa,i_1}\circ\$_{O,i_1,i_2}|_{\max}+|\$_{wa,i_2}\circ\$_{O,i_1,i_2}|_{\max}} \tag{15}$$

式中,$\$_{O,i_1,i_2}$为锁定支链 i_1和支链 i_2之外的两个主动关节后,2PRU-(2PRU)R 并联机器人单自由度的单位运动旋量。

为清晰计,此处以锁定支链 1 和支链 3 主动关节为例,示范 $\rho_{\mathrm{out},2,4}$的求解过程。此时,支链 1 和支链 3 将成为 RU 运动支链,对动平台分别增加一个约束旋量 $\$_{wc,1,3}$和 $\$_{wc,3,3}$,即

$$\begin{cases}\$_{wc,1,3}=[\boldsymbol{s}_{l,1};\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{s}_{l,1}]\\ \$_{wc,3,3}=[\boldsymbol{s}_{l,3};\ \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{s}_{l,3}]\end{cases} \tag{16}$$

并联机器人的最大线性无关约束旋量系为

$$\begin{cases}\$_{wc,PM,1}=[\boldsymbol{O}_{3\times1};\boldsymbol{s}_{i_1,3}\times\boldsymbol{s}_{i_1,4}]\\ \$_{wc,PM,2}=[\boldsymbol{s}_{i_1,2};\boldsymbol{O}_{3\times1}]\\ \$_{wc,PM,3}=[\boldsymbol{s}_{i_2,2};\boldsymbol{O}_{3\times1}]\\ \$_{wc,PM,4}=[\boldsymbol{s}_{l,1};\ \boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{s}_{l,1}]\\ \$_{wc,PM,5}=[\boldsymbol{s}_{l,3};\ \boldsymbol{a}_3\times\boldsymbol{s}_{l,3}]\end{cases}\quad(i_1=1,3;\ i_2=2,4) \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{O}_{3\times1}$——零矩阵

求解式(17)的反螺旋,可得锁定支链 1 和支链 3 情况下,2PRU-(2PRU)R 并联机器人的单位运动旋量,即

$$\$_{O,1,3}=[\boldsymbol{s}_{i_1,4};\boldsymbol{O}_{3\times1}]\quad(i_1=1,3) \tag{18}$$

综合考虑输入与输出的运动/力传递特性,并联机器人的运动/力传递特性表示为

$$\rho_{PM}=\min\{\rho_{\mathrm{int},PM},\rho_{\mathrm{out},PM}\}\in[0,1] \tag{19}$$

3.1.3 2PRU-(2PRU)R 机器人尺度设计

(1)尺度参数定义

如图 5 所示,2PRU-(2PRU)R 并联机器人概念设计的基本尺度参数包括动平台半径 r_a(即点 O_1到点 A_i的距离)、静平台半径 r_b(即点 O 到点 B_i的距离)、连杆长度 l(即点 C_i到点 A_i的距离)和移动副行程 r_P。

(2)设计变量处理

以 HSD ES929 型主轴装配空间为约束,设置所需的最小动平台半径 $r_a=200$ mm。同时,为避免装备“头重脚轻”对系统动态稳定性与响应速度的影响,约束动、静平台半径满足 $r_b\geqslant1.1r_a$。利用式(6)对各设计变量进行无量纲化及降阶处理,则有

$$\begin{cases}e_b=\dfrac{r_b}{200}\\ e_P=\dfrac{r_P}{200}\\ e_1=\dfrac{l}{200}\end{cases} \tag{20}$$

根据式(7),对设计变量 e_b、e_1和 e_P进行标准化处理,则有

$$\begin{cases}\tau_1=\dfrac{e_b}{\tau_D}\\ \tau_2=\dfrac{e_1}{\tau_D}\\ \tau_3=\dfrac{e_P}{\tau_D}\\ \tau_D=\dfrac{e_b+e_P+e_1}{3}\end{cases} \tag{21}$$

τ_1、τ_2和 τ_3为标准化处理后的设计变量,其满足

$$\begin{cases}0<\tau_1,\tau_2,\tau_3<3\\ \tau_1+\tau_2+\tau_3=3\end{cases} \tag{22}$$

以式(22)为设计区间约束,可知 τ_1、τ_2和 τ_3在三维空间上构成平面 $D_1D_2D_3$,如图 6 所示。

因此,可将设计变量 τ_1、τ_2和 τ_3进一步降阶为 2 维设计 τ_x和 τ_y。τ_1、τ_2、τ_3与 τ_x、τ_y之间的映射关系可表示为

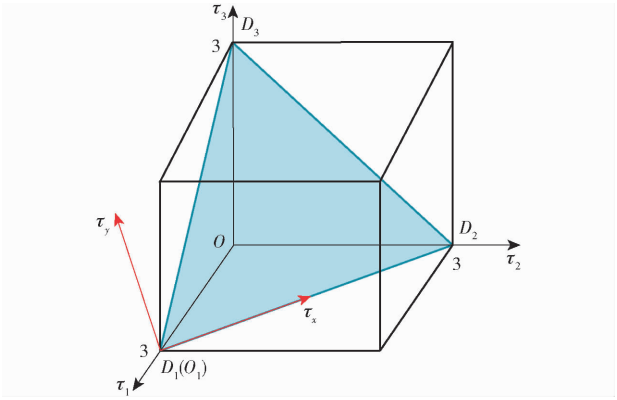


图 6　变量设计空间

Fig. 6　Design space for variables

$$\begin{cases} \tau_x = \sqrt{2}\left(3 - \tau_1 - \dfrac{\tau_3}{2}\right) & (0 < \tau_x < 3\sqrt{2}) \\ \tau_y = \dfrac{\sqrt{6}}{2}\tau_3 & \left(0 < \tau_y < \dfrac{3}{2}\sqrt{6}\right) \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = 3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\tau_x - \dfrac{\sqrt{6}}{6}\tau_y \\ \tau_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\tau_x - \dfrac{\sqrt{6}}{6}\tau_y \\ \tau_3 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\tau_y \end{cases} \tag{24}$$

(3)尺度设计的目标函数构建

对标商用 Z3 型并联加工机器人的空间调姿能力，设定 2PRU－(2PRU)R 并联机器人两个转动自由度的可达转角行程范围不小于[－45°,45°]，移动自由度的位移行程不小于 300 mm，并约束机器人占地尺寸(长×宽×高)小于 500 mm×500 mm×900 mm。参考冗余驱动并联机器人常见的灵巧度与运动/力传递特性阈值[28－29]，定义 $d_{PM0}=0.5$、$\rho_{PM0}=0.5$，则并联机器人尺度设计的目标函数可表示为

$$\begin{cases} \max f(\tau_x,\tau_y) = n_W & \left(0 < \tau_x < 3\sqrt{2}, 0 < \tau_y < \dfrac{3}{2}\sqrt{6}\right) \\ |w_\theta| \geqslant 45 \\ |w_\varphi| \geqslant 45 \\ w_{z,\max} - w_{z,\min} \geqslant 300 \\ w_{px} \leqslant 500 \\ w_{py} \leqslant 500 \\ w_{pz} \leqslant 900 \end{cases} \tag{25}$$

式中　w_θ——并联机器人第 1 个转角行程

w_φ——并联机器人第 2 个转角行程

$w_{z,\min}$、$w_{z,\max}$——机器人沿 z 轴的最小、最大位移行程

(4)尺度参数计算

以 τ_x 和 τ_y 为 2PRU－(2PRU)R 并联机器人尺度设计的设计变量，调用图 4 所示的尺度寻优算法，可得对应不同设计参数的并联机器人综合运动能力评估指标 n_W 分布图，如图 7 所示。

如图 7 所示，在位置($\tau_x=2$，$\tau_y=2.34$)处，综合运动能力指标 n_W 取得最大值，为 28.78。将该处的输入变量 τ_x 和 τ_y 代入式(20)～(23)，取整后可得：$r_b=220$ mm，$r_P=667$ mm，$l=160$ mm。

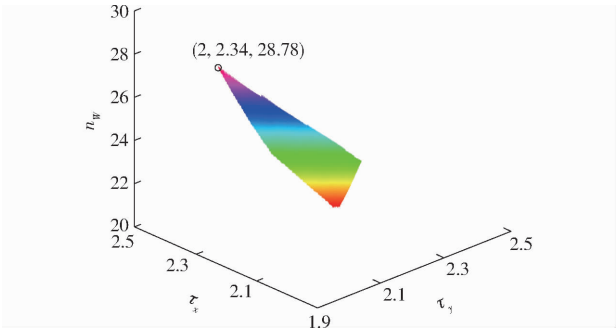


图 7　2PRU－(2PRU)R 并联机器人 n_W 分布

Fig. 7　n_W distribution of 2PRU－(2PRU)R parallel robot

3.2　3P(2UU)恰驱动并联机器人

3.2.1　机器人描述

3P(2UU)并联机器人具有 3 个平动的运动能力，图 8 为其机构运动简图，可见，其主要由静平台、动平台以及 3 条 P(2UU)运动支链组成[30－31]。其中，$B_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 条支链连接于动平台的两个虎克铰几何中心点。$C_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 条运动支链上移动副轴线上的一个参考点。$A_i(i=1,2,3)$ 表示连接在移动副上的两个虎克铰几何中心。o 为等边三角形 $C_1C_2C_3$ 的几何中心点；p 为等边三角形 $B_1B_2B_3$ 的几何中心点。在点 o 处建立全局坐标系 $o-xyz$，其 x 轴由点 o 指向点 C_1，z 轴垂直于静平台向上，y 轴服从右手螺旋法则。在点 p 处建立运动坐标系 $p-x_1y_1z_1$，其 x_1 轴由点 p 指向点 B_1，z_1 轴

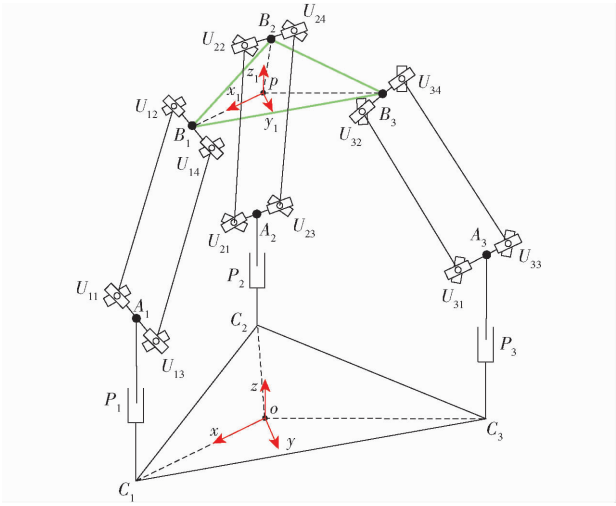


图 8　3P(2UU)并联机器人机构简图

Fig. 8　Simplified kinematic diagram of 3P(2UU) parallel robot

垂直于动平台向上，y_1轴服从右手螺旋法则。

3.2.2 3P(2UU)运动学评价指标

为方便灵巧度和运动/力传递特性数学模型构建，给出以下变量定义：$\boldsymbol{J}_{pa}$为 3P(2UU)并联机器人齐次雅可比矩阵，$\$_{A,O}$为 3P(2UU)并联机器人主动运动副的运动旋量，$\$_{A,I}$表示 3P(2UU)并联机器人相对主动运动副的运动支链驱动旋量。以 3P(2UU)并联机器人任一主动运动副为驱动，锁定剩余主动运动副，则动平台剩下一个自由度，定义其运动旋量为 $\$_{P,O}$。

3P(2UU)并联机器人局部灵巧度指标 $d_{3P(2UU)}$ 可量化为齐次雅可比矩阵条件数的倒数，即

$$d_{3P(2UU)}=\frac{1}{\|\boldsymbol{J}_{pa}\|\|(\boldsymbol{J}_{pa})^{-1}\|}\quad(d_{3P(2UU)}\in[0,1]) \tag{26}$$

3P(2UU)并联机器人输入运动/力传递特性指标 $\rho_{\text{int},3P(2UU)}$ 可表示为

$$\rho_{\text{int},3P(2UU)}=\frac{|\$_{A,O}\circ\$_{A,I}|}{|\$_{A,O}\circ\$_{A,I}|_{\max}}\in[0,1] \tag{27}$$

3P(2UU)并联机器人输出运动/力传递特性指标 $\rho_{\text{out},3P(2UU)}$ 可表示为

$$\rho_{\text{out},3P(2UU)}=\frac{|\$_{P,O,i}\circ\$_{A,I,i}|}{|\$_{P,O,i}\circ\$_{A,I,i}|_{\max}}\in[0,1] \tag{28}$$

综合考虑输入与输出运动/力传递特性，并联机器人的运动/力传递特性指标 $\rho_{3P(2UU)}$ 表示为

$$\rho_{3P(2UU)}=\min\{\rho_{\text{int},3P(2UU)},\rho_{\text{out},3P(2UU)}\}\in[0,1] \tag{29}$$

3.2.3 3P(2UU)机器人尺度设计

(1)尺度参数定义

如图 8 所示，3P(2UU)并联机器人的尺度参数包括动平台半径 $r_{a,2}$(即点 p 到点 B_i的距离)、静平台半径 $r_{b,2}$(即点 o 到点 C_i的距离)、连杆长度 l_2(即点 A_i到点 C_i的距离)和移动副行程 $r_{P,2}$。

(2)设计变量处理

参考文献[30]，设定动平台半径 $r_{a,2}=100$ mm。3P(2UU)并联机器人与前面的 2PRU-(2PRU)R 并联机器人的尺度参数相同，故二者设计变量处理也相同，过程为

$$\begin{cases}e_{b,2}=\dfrac{r_{b,2}}{100}\\ e_{P,2}=\dfrac{r_{P,2}}{100}\\ e_{1,2}=\dfrac{l_2}{100}\end{cases} \tag{30}$$

标准化处理，则有

$$\begin{cases}\tau_{1,2}=\dfrac{e_{b,2}}{\tau_{D,2}}\\ \tau_{2,2}=\dfrac{e_{1,2}}{\tau_{D,2}}\\ \tau_{3,2}=\dfrac{e_{P,2}}{\tau_{D,2}}\\ \tau_{D,2}=\dfrac{e_{b,2}+e_{P,2}+e_{1,2}}{3}\end{cases} \tag{31}$$

式中，$\tau_{D,2}$表示标准化因子，$\tau_{1,2}$、$\tau_{2,2}$和 $\tau_{3,2}$为标准化处理后的设计变量，其满足

$$\begin{cases}0<\tau_{1,2},\ \tau_{2,2},\ \tau_{3,2}<3\\ \tau_{1,2}+\tau_{2,2}+\tau_{3,2}=3\end{cases} \tag{32}$$

$\tau_{1,2}$、$\tau_{2,2}$和 $\tau_{3,2}$进一步降阶为 2 维设计 $\tau_{x,2}$和 $\tau_{y,2}$，可表示为

$$\begin{cases}\tau_{x,2}=\sqrt{2}\left(3-\tau_{1,2}-\dfrac{\tau_{3,2}}{2}\right)\quad(0<\tau_{x,2}<3\sqrt{2})\\ \tau_{y,2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\tau_{3,2}\qquad\left(0<\tau_{y,2}<\dfrac{3}{2}\sqrt{6}\right)\end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases}\tau_{1,2}=3-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tau_{x,2}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\tau_{y,2}\\ \tau_{2,2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\tau_{x,2}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\tau_{y,2}\\ \tau_{3,2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\tau_{y,2}\end{cases} \tag{34}$$

(3)尺度设计的目标函数构建

定义约束占地尺寸小于 500 mm×500 mm×1 200 mm，目标工作空间尺寸为 200 mm×200 mm×200 mm。参考恰驱动并联机器人对良好灵巧度性能和运动/力传递特性阈值的定义[22,32]，设定 3P(2UU)恰驱动并联机器人性能阈值分别为 $d_{PM0}=0.1$、$\rho_{PM0}=0.3$。基于上述参数，3P(2UU)并联机器人尺度设计的目标函数可表示为

$$\begin{cases}\max f(\tau_{x,2},\tau_{y,2})=n_W\\ \qquad\left(0<\tau_{x,2}<3\sqrt{2},0<\tau_{y,2}<\dfrac{3}{2}\sqrt{6}\right)\\ v_{x,\max}-v_{x,\min}\geqslant 200\\ v_{y,\max}-v_{y,\min}\geqslant 200\\ v_{z,\max}-v_{z,\min}\geqslant 200\\ v_{px}\leqslant 500\\ v_{py}\leqslant 500\\ v_{pz}\leqslant 1\,200\end{cases} \tag{35}$$

式中，$v_{x,\min}$、$v_{y,\min}$、$v_{z,\min}$和 $v_{x,\max}$、$v_{y,\max}$、$v_{z,\max}$表示机器人沿 x 轴、y 轴和 z 轴的最小位移及最大位移，v_{px}、v_{py}和 v_{pz}表示 3P(2UU)并联机器人占用空间沿 x 轴、y 轴和 z 轴的长度。

(4)尺度参数计算

以 $\tau_{x,2}$ 和 $\tau_{y,2}$ 为 3P(2UU)并联机器人尺度设计的设计变量,得到 3P(2UU)并联机器人设计参数与综合运动能力评估指标 n_W 的关系,如图 9 所示。

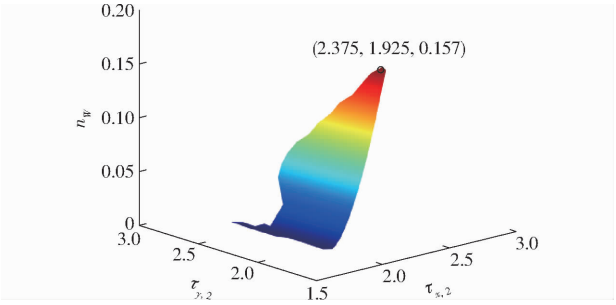


图 9　3P(2UU)并联机器人 n_W 分布

Fig. 9　n_W distribution of 3P(2UU) parallel robot

如图 9 所示,在($\tau_{x,2}$ = 2.375, $\tau_{y,2}$ = 1.925)位置处,综合运动能力指标 n_W 取得最大值,为 0.157。将该处的输入变量 τ_x 和 τ_y 代入式(30) ~ (34),取整后可得:$r_{b,2}$ = 160 mm,$r_{P,2}$ = 472 mm, l_2 = 268 mm。

4　结果讨论

4.1　2PRU -(2PRU)R 机器人运动学性能评估

4.1.1　2PRU -(2PRU)R 可达工作空间

采用欧拉角 ψ 和 θ 以及点 O_1 的 z 轴坐标作为描述 2PRU -(2PRU)R 并联加工机器人工作空间的 3 个独立运动参数,结果如图 10 所示。

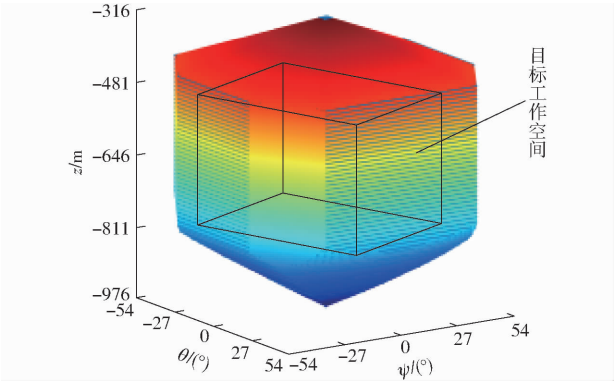


图 10　2PRU -(2PRU)R 可达工作空间与目标工作空间对比

Fig. 10　Comparison of reachable workspace and target workspace of 2PRU -(2PRU)R

由图 10 可知,2PRU -(2PRU)R 并联机器人的可达工作空间关于 ψ = 0°和 θ = 0°工作平面对称分布,这与其 4 条运动支链中心对称布置的结构特征相吻合。其中,ψ 和 θ 的转角行程范围均为[-54°, 54°],沿 z 轴移动行程范围为[-976, -316] mm。结果表明,在 z 轴区间为[-746, -436] mm 上,ψ 角和 θ 角转角范围均为[-54°,54°],涵盖预设需求的转角行程范围[-45°,45°]和移动行程 300 mm,表明该尺度参数下的 2PRU -(2PRU)R 并联机器人满足期望的空间摆角能力与移动行程需求。

4.1.2　2PRU -(2PRU)R 灵巧度性能分析

运用 3.1.2 节所建的灵巧度分析模型,以目标工作空间两个边界为算例,即工作平面 z = -746 mm 和 z = -436 mm,评估该型机器人在预设工作全域内的灵巧度性能,如图 11 所示。结果表明,在预设的转角行程范围[-45°,45°]和移动行程 300 mm 内,2PRU -(2PRU)R 并联机器人灵巧度性能指标的值域为[0.66, 1],均大于预设的灵巧度性能指标阈值 d_{PM0} = 0.5,表明该尺度参数下的 2PRU -(2PRU)R 并联机器人满足期望的灵巧度性能需求。

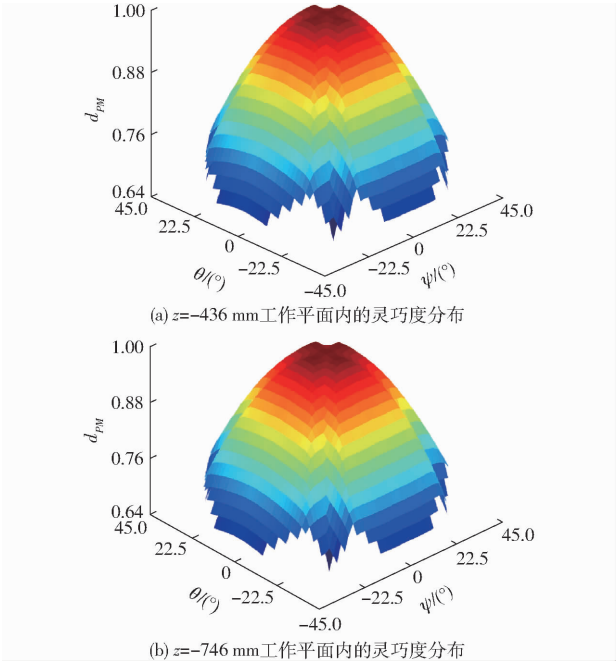


图 11　2PRU -(2PRU)R 灵巧度分布

Fig. 11　Dexterity distribution of 2PRU -(2PRU)R

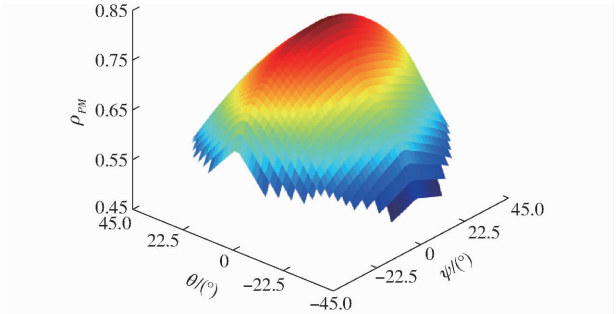
4.1.3　2PRU -(2PRU)R 运动/力传递特性分析

同样地,采用 3.1.2 节建立的运动/力传递特性分析模型,同样以目标工作空间两个边界为算例,即工作平面 z = -746 mm 和 z = -436 mm,评估机器人在其预设工作全域内的运动/力传递特性,如图 12 所示。结果表明,在预设的转角行程范围[-45°,45°]和移动行程 300 mm 内,2PRU -(2PRU)R 并联机器人运动/力传递特性的值域为[0.52, 0.82],均大于预设的运动/力传递特性指标阈值 ρ_{PM0} = 0.5,表明该尺度参数下的 2PRU -(2PRU)R 并联机器人满足期望的运动/力传递特性需求。

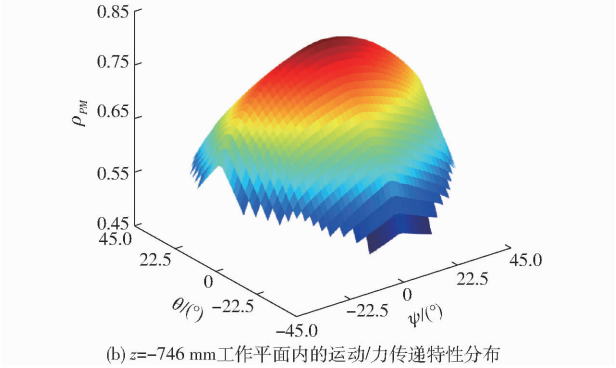
4.2　3P(2UU)机器人运动学性能评估

4.2.1　3P(2UU)可达工作空间

以 x 轴、y 轴、z 轴位移为 3 个独立运动参数,分析得到 3P(2UU)并联机器人的可达工作空间,结果如图 13 所示。



(a) z=−436 mm工作平面内的运动/力传递特性分布



(b) z=−746 mm工作平面内的运动/力传递特性分布

图 12 2PRU −(2PRU)R 运动/力传递特性分布

Fig. 12 Motion/force transmissibility distribution of 2PRU −(2PRU)R

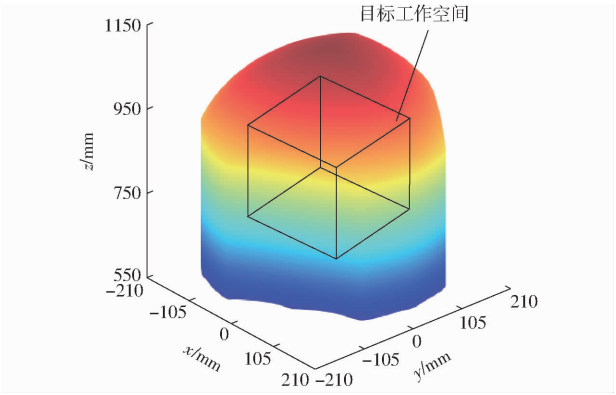


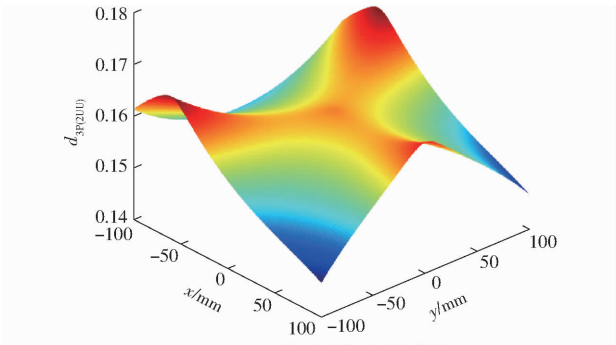
图 13 3P(2UU)可达工作空间与目标工作空间对比

Fig. 13 Comparison of reachable workspace and target workspace of 3P(2UU)

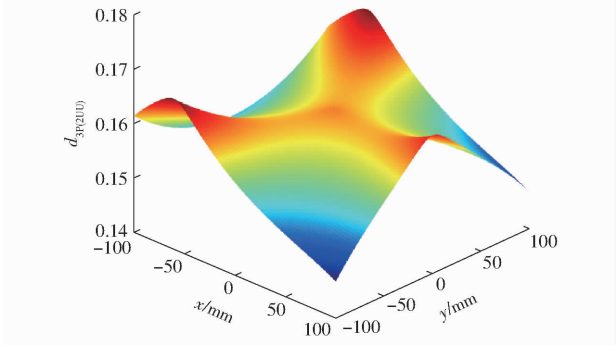
由图 13 可见,3P(2UU)并联机器人的可达工作空间呈对称分布,这与其 3 条运动支链均匀分布的结构特征相吻合。其中,3P(2UU)并联机器人沿 x 轴可达位移范围为[−172,210] mm,沿 y 轴的可达位移范围为[−206,206] mm,沿 z 轴的移动行程范围为[600,1 100] mm,可完全包络 200 mm × 200 mm × 200 mm 的目标工作空间。结果表明,该尺度参数下的 3P(2UU)并联机器人满足期望的可达工作空间。

4.2.2 3P(2UU)灵巧度性能分析

采用 3.2.2 节建立的灵巧度分析模型,以目标工作空间两个边界为算例,即 z = 650 mm 和 z = 850 mm,评估该型机器人在其预设工作全域内的灵巧度性能,如图 14 所示。结果表明,3P(2UU)并联机器人在 z = 650 mm 工作平面灵巧度性能指标的值域为[0.147, 0.168],在 z = 850 mm 工作平面灵巧度性能指标的值域为[0.147, 0.168],均大于预设的灵巧度性能指标阈值 d_{PM0} = 0.1,表明该尺度参数下的 3P(2UU)并联机器人满足期望的灵巧度性能需求。



(a) z=650 mm工作平面内灵巧度分布



(b) z=850 mm工作平面内灵巧度分布

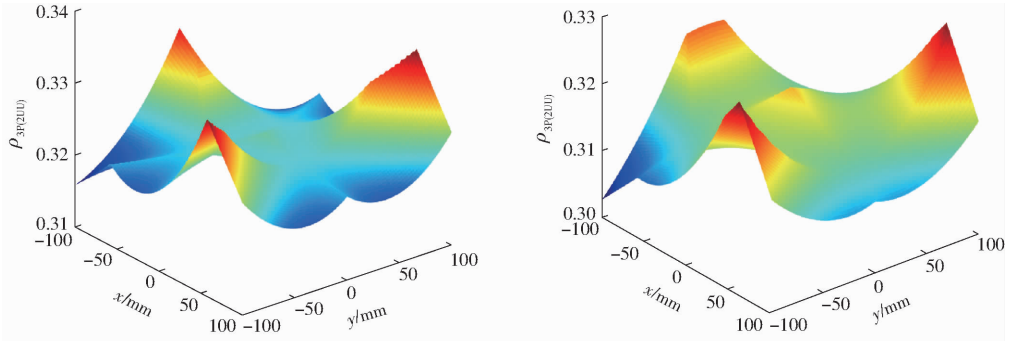
图 14 3P(2UU)灵巧度分布

Fig. 14 Dexterity distribution of 3P(2UU)

4.2.3 3P(2UU)运动/力传递特性分析

同样的,采用 3.2.2 节建立的运动/力传递特性分析模型,以目标工作空间两个边界为算例,即 z = 650 mm 和 z = 850 mm,计算 3P(2UU)并联机器人在 z 轴两个工作边界的运动/力传递特性指标,评估机器人在其预设工作全域内的运动/力传递特性。如图 15 所示。结果表明,3P(2UU)并联机器人在 z = 650 mm 工作平面运动/力传递特性指标的值域为[0.316, 0.335],在 z = 850 mm 工作平面运动/力传递特性指标的值域为[0.302, 0.329],均大于预设的运动/力传递特性指标阈值 ρ_{PM0} = 0.3,表明该尺度参数下的 3P(2UU)并联机器人满足期望的运动/力传递特性需求。

综上所述,2PRU −(2PRU)R 冗余驱动并联机器在式(25)所示的尺度参数下,3P(2UU)恰驱动并联机器人在式(35)所示的尺度参数下,利用所提尺度设计策略所获得的并联机器人,能同时满足各类运动学性能的设计需求,证实了所提的尺度设计策略的可行性与正确性。



(a) z=650 mm工作平面内运动/力传递特性分布　　(b) z=850 mm工作平面内运动/力传递特性分布

图 15　3P(2UU)运动/力传递特性分布

Fig. 15　Motion/force transmissibility distribution of 3P(2UU)

5　结论

（1）构建了融合连续和瞬时运动特性的并联机器人综合运动能力指标，进而提出一种兼顾各类运动学性能的并联机器人尺度设计策略，将此类机器人的尺度设计问题转化为数学形式下的非线性规划问题。

（2）利用分层搜索算法和蒙特卡洛法，提出一种基于改进的蒙特卡洛法的并联机器人尺度参数寻优算法。该算法通过全局区域快速定位与局部区域最优求解，有效地提高了并联机器人尺度参数的求解效率与精度。

（3）将本文提出的尺度设计策略用于 2PRU－(2PRU)R 冗余驱动并联机器人和 3P(2UU)恰驱动并联机器人，确定了一组可兼顾各项运动学性能指标的机器人尺度参数，并通过综合运动学性能评估，证实了所提尺度设计策略的可行性与正确性。

参　考　文　献

[1] Wang Z, Wang X, Li Y, et al. A PID-like neural network control method for a 5PUS－RPUR parallel robot considering force coupling errors[J]. Neurocomputing, 2026, 673: 132794.

[2] 何雨镐,谢福贵,解增辉,等. 一种五轴并联加工单元的参数与刚度优化设计[J]. 机械工程学报,2024,60(13):308－315.
He Yuhao, Xie Fugui, Xie Zenghui, et al. Parameter and stiffness optimization design of a five-axis parallel machining unit [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(13): 308－315. (in Chinese)

[3] Angelini M, Ida' E, Bertin D, et al. An underactuated cable-driven parallel robot for marine automated launch and recovery operations[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2025, 17(1): 010906.

[4] Chen W X, Wen Y, Tong X C, et al. Dynamics modeling and modal space control strategy of ship-borne Stewart platform for wave compensation[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2023, 15(4): 041015.

[5] Karmakar S, Turner C J. A literature review on Stewart－Gough platform calibrations[J]. Journal of Mechanical Design, 2024, 146(8): 083302.

[6] Cai Y F, Zheng S T, Liu W T, et al. Sliding-mode control of ship-mounted Stewart platforms for wave compensation using velocity feedforward[J]. Ocean Engineering, 2021, 236: 109477.

[7] Fajardo-Pruna M, López-Estrada L, Pérez H, et al. Analysis of a single-edge micro cutting process in a hybrid parallel-serial machine tool[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2019, 151: 222－235.

[8] Bandara S, Jin Y, Van M, et al. Geometrical quality prediction of machining process by Exechon X-mini PKM through deformation modelling and error compensation[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2026, 97: 103115.

[9] Ding J Z, Wang C J. Accuracy analysis and error compensation for Tricept machine tool under load[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2021, 35(8): 3591－3600.

[10] 张春燕,平安. 含折展平台的多模式移动并联机构设计与运动特性分析[J]. 农业机械学报,2022,53(3):449－458.
Zhang Chunyan, Ping An. Design and kinematic analysis of new multi-mode hilly orchard mobile parallel mechanism with folding platform[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(3): 449－458. (in Chinese)

[11] Zheng K M. Research on intelligent vibration suppression control of high-speed lightweight Delta robot[J]. Journal of Vibration and Control, 2022, 28(21－22): 3042－3057.

[12] Kansal S, Mukherjee S. Vision-based kinematic analysis of the Delta robot for object catching[J]. Robotica, 2022, 40(6): 2010－2030.

[13] 陈耀晖,蔡武斌,孙博瀚,等. 基于深度学习与 Delta 机器人的病损柑橘上料部位初筛系统设计与试验[J]. 农业机械学报,2025,56(6):535－545.
Chen Yaohui, Cai Wubin, Sun Bohan, et al. Design and experiment of defective citrus sieving system based on deep learning and Delta robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2025, 56(6): 535－545. (in Chinese)

[14] 孟齐志,谢福贵,张赛,等. 高速高加速并联机器人构型与尺度参数设计[J]. 机械工程学报,2022,58(13):36－49.

Meng Qizhi, Xie Fugui, Zhang Sai, et al. Type synthesis and dimensional optimization of a high-speed and high-acceleration parallel robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(13): 36 - 49. (in Chinese)

[15] 王世杰,冯伟,李铁军,等. 空间 2 自由度冗余驱动并联机构运动学性能分析[J]. 机械工程学报,2022,58(23):18 - 27.
Wang Shijie, Feng Wei, Li Tiejun, et al. Kinematic performance analysis of spatial 2-DOF redundantly actuated parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(23): 18 - 27. (in Chinese)

[16] Antonov A V, Laryushkin P A, Fomin A S. Kinematic analysis of a novel 5-DOF Delta-type parallel robot[J]. Mechanics of Solids, 2024, 59(4): 1920 - 1929.

[17] Schappler M. Dimensional synthesis of parallel robots using bilevel optimization for design optimization and resolution of functional redundancy[J]. Robotics, 2025, 14(3): 29.

[18] Chen K X, Wang M, Huo X M, et al. Topology and dimension synchronous optimization design of 5-DoF parallel robots for in-situ machining of large-scale steel components[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 179: 105105.

[19] Dastjerdi A H, Sheikhi M M, Masouleh M T. A complete analytical solution for the dimensional synthesis of 3-DOF delta parallel robot for a prescribed workspace[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 153: 103991.

[20] Deng Z K, Hou X L, Wang S Y. Workspace optimization of a 6-RSS Stewart-Gough robotic platform to assist ultrasound diagnosis[C]//2021 IEEE 1st International Conference on Digital Twins and Parallel Intelligence (DTPI). New York: IEEE, 2021: 230 - 233.

[21] 栾飞,李爱霞,王晓峰,等. 4PC - 2R 并联机构设计及运动分析[J]. 西北工业大学学报,2025,43(3):437 - 446.
Luan Fei, Li Aixia, Wang Xiaofeng, et al. Kinematics analysis and design of 4PC - 2R parallel mechanism[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2025, 43(3): 437 - 446. (in Chinese)

[22] Jin Y, Bi Z M, Liu H T, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of exechon parallel kinematic machine for large volume machining[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 7(4): 041004.

[23] 陈修龙,蒋德玉,陈林林,等. 冗余并联机构运动学性能分析与优化[J]. 农业机械学报,2016,47(6): 340 - 347.
Chen Xiulong, Jiang Deyu, Chen Linlin, et al. Kinematics performance analysis and optimal design of redundant actuation parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016, 47(6): 340 - 347. (in Chinese)

[24] Che L X, Chen G W, Jiang H Y, et al. Dimensional synthesis for a Rec4 parallel mechanism with maximum transmission workspace[J]. Mechanism and Machine Theory, 2020, 153: 104008.

[25] Tang T F, Fang H L, Luo H W, et al. Type synthesis, unified kinematic analysis and prototype validation of a family of Exechon inspired parallel mechanisms for 5-axis hybrid kinematic machine tools[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2021, 72: 102181.

[26] Liu X J, Wang J S. A new methodology for optimal kinematic design of parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(9): 1210 - 1224.

[27] Fang H L, Tang T F, He Z, et al. A novel hybrid machine tool integrating a symmetrical redundantly actuated parallel mechanism: design, kinematics, prototype and experiment[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 176: 105013.

[28] Saafi H, Laribi M A, Zeghloul S. Redundantly actuated 3-RRR spherical parallel manipulator used as a haptic device: improving dexterity and eliminating singularity[J]. Robotica, 2015, 33(5): 1113 - 1130.

[29] Li L, Zhang H, Jin X, et al. Motion/force transmissibility analysis and inverse kinematics optimization of kinematically redundant parallel mechanisms[J]. Robotica, 2025, 43(8): 3058 - 3079.

[30] 梁鸿键,陈南霆,陈明方,等. 基于参数辨识的并联机器人误差模型研究[J]. 农业机械学报,2024,55(7):439 - 448,458.
Liang Hongjian, Chen Nanting, Chen Mingfang, et al. Error analysis model of parallel robot based on parameters identification [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(7): 439 - 448, 458. (in Chinese)

[31] Chen M, Liang H, He C, et al. Research on error analysis and calibration method of 3-PUU parallel robot[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture, 2025, 239(10): 1351 - 1364.

[32] 张伟中,徐灵敏,童俊华,等. 2 - PUR - PSR 并联机构的运动学分析及尺度综合[J]. 机械工程学报,2018,54(7):45 - 53.
Zhang Weizhong, Xu Lingmin, Tong Junhua, et al. Kinematic analysis and dimensional synthesis of 2 - PUR - PSR parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2018, 54(7): 45 - 53. (in Chinese)