doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2026.13.035

考虑旋转效应的转轮圆盘结构模态特性研究

王　薇[1]　敬若玺[1]　曾永顺[1]　夏　翔[2]

(1.华北电力大学水利与水电工程学院,北京 102206;2.国网电力工程研究院有限公司,北京 100069)

摘要:水泵水轮机转轮在频繁启停和变工况运行过程中易发生复杂振动问题,其模态特性直接关系到机组运行安全与稳定性。为探究旋转效应对转轮圆盘结构模态特性的影响,基于声固耦合数值模拟方法,分析了圆盘结构在不同转速及流体环境下的模态特性。结果表明,空气中,旋转效应会使圆盘节径模态由驻波分裂为前行波和后行波模态,节径数越大,模态频率对转速变化越敏感;节圆模态基本不受旋转效应影响;节径-节圆耦合模态发生频率分裂,耦合模态振型不完全被旋转效应覆盖,模态位移出现先减小后增大的变化。但由于旋转效应在低密度空气中等效作用不明显,圆盘频率随转速呈现小幅度变化,频率分裂现象不明显。由于圆盘结构与夹带水体之间的相对转动及旋转效应的作用,水中旋转圆盘的节径模态产生明显的频率分裂现象,其中转频为 8 Hz 时,(2,0)模态后行波频率增加了 8.11 Hz,约占静止圆盘频率的 5.9%;(3,0)模态前行波频率减小了 9.92 Hz,约占静止圆盘频率的 2.9%。与空气中旋转圆盘不同,前行波与后行波频率随转速呈线性变化,其频率差随转速线性增大;频率下降率和附加质量系数也随转速呈线性变化。不同流体环境对旋转圆盘模态特性具有不同影响。海水中前行波与后行波频率分裂差小幅度增大,为 16.33 Hz。含气水中,声速为 1 000 m/s,密度为 980 kg/m^3,圆盘固有频率小幅度增加,前行波与后行波之间的频率分裂差与纯水中相比变化很小,为 16.03 Hz。研究结果可为水泵水轮机转轮等旋转圆盘状结构的振动特性分析与结构优化设计提供理论支撑。

关键词:水泵水轮机;转轮;圆盘;旋转效应;模态特性;数值模拟

中图分类号:TK7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1298(2026)13-0408-11　　**OSID**:

Modal Characteristics of Runner Disk Structures Considering Rotation Effect

Wang Wei[1]　Jing Ruoxi[1]　Zeng Yongshun[1]　Xia Xiang[2]

(1. *School of Water Resources and Hydropower Engineering*, *North China Electric Power University*, *Beijing* 102206, *China*
2. *State Grid Electric Power Engineering Research Institute Co.*, *Ltd.*, *Beijing* 100069, *China*)

Abstract: During frequent start-stop operations and variable working conditions, pump-turbine runners are prone to complex vibration phenomena, and their modal characteristics are directly related to the operational safety and stability of the unit. To investigate the influence of rotation effects on the modal characteristics of disk structures, a fluid-structure interaction numerical approach based on acoustic-structure coupling was employed to analyze the modal behavior of a disk under different rotational speeds and fluid environment. The results showed that, in air, rotation effects caused nodal diameter modes of the disk to split from standing waves into forward and backward traveling wave modes. As the number of nodal diameters increased, the modal frequencies became more sensitive to variations in rotational speed. In contrast, nodal circle modes were scarcely affected by rotation effects. For coupled nodal diameter-nodal circle modes, frequency splitting occurred, and the coupled mode shapes were not completely dominated by rotation effects, resulting in modal displacements that firstly decreased and then increased. However, due to the weak equivalent effect of rotation in low-density air, the disk frequencies exhibited only slight variations with rotational speed, and the frequency splitting phenomenon was not pronounced. Due to the combined influence of relative rotation between the disk structure and the surrounding water as well as rotation effects, the nodal diameter modes of a rotating disk in water exhibited pronounced frequency splitting. Specifically, at a rotational frequency of 8 Hz, the backward traveling wave frequency of the (2,0) mode was increased by 8.11 Hz, accounting for approximately 5.9% of the stationary disk

收稿日期:2026-01-21　修回日期:2026-02-26

基金项目:国家自然科学基金项目(52206048)和中央高校基本科研业务费专项资金项目(2025MS072、2024JC003)

作者简介:王薇(1991—),女,副教授,博士,主要从事水力机械高效及安全稳定运行研究,E-mail:wweihd@ncepu.edu.cn

通信作者:夏翔(1996—),男,工程师,博士,主要从事抽水蓄能机组运行稳定性研究,E-mail:15652990228@163.com

frequency. The forward traveling wave frequency of the (3,0) mode was decreased by 9.92 Hz, accounting for approximately 2.9% of the stationary disk frequency. Unlike the rotating disk in the air, the frequencies of the forward and backward traveling waves varied linearly with rotational speed, and the frequency difference between them was increased linearly as the rotational speed increased. Meanwhile, both the frequency reduction rate and the added mass coefficient also showed linear growth with rotational speed. Different fluid environments exerted distinct influences on the modal characteristics of rotating disks. In seawater, the frequency splitting difference between the forward and backward traveling waves increased slightly to 16.33 Hz. In aerated water, the speed of sound was 1 000 m/s, and the density was 980 kg/m^3, the natural frequencies of the disk was increased slightly, and the frequency splitting difference between the forward and backward waves was similar to that in pure water, at 16.03 Hz. The findings can provide theoretical support for vibration characteristic analysis and structural optimization design of rotating disk-like structures such as pump-turbine runners.

Key words: pump turbine; runner; disk; rotation effect; modal characteristic; numerical simulation

0　引言

抽水蓄能在提升新型电力系统调峰能力和保障电网安全稳定运行方面发挥着关键作用[1-3]。水泵水轮机转轮作为抽水蓄能机组的关键过流部件,在频繁启停和多工况运行的过程中,承受着复杂的水动力载荷和结构应力,其动力学行为十分复杂,振动问题尤为突出[4],直接关系到机组的运行安全与使用寿命。准确掌握水泵水轮机转轮的模态特性,对于避免共振具有工程意义。

水泵水轮机转轮模态特性研究通常从简化的圆盘状结构入手[5-8]。实际运行工况下的转轮始终处于水等高密度流体介质中,流体的附加质量作用会对圆盘的模态特性产生显著影响[9-10]。而且,水泵水轮机转轮通常在旋转状态下工作,高速旋转工况中,转轮除了承受非定常水动力激励外,还受到陀螺力、离心力、剪切力等惯性效应的共同作用,多种因素的耦合会改变转轮的动力特性,使其模态特性(如固有频率和振型等)发生变化[11-13]。研究表明,旋转圆盘会发生频率分裂现象,其节径模态会分为前行波和后行波两种不同的模态[14-16]。Nennemann 等[17]和 Louyot 等[18]均推导了水中旋转圆盘固有频率分裂的解析模型,并利用 Weder 等[19]的试验数据对模型进行验证,验证结果取得了良好的一致性。Presas 等[20-21]也探究了旋转效应导致水中圆盘模态分裂的机理,发现分裂后的前行波和后行波之间的频率差随转速的增加呈线性增加趋势。Zeng 等[22]探究了径向间隙和转速对模态分裂的影响,发现径向间隙的变化对频率分裂几乎没有影响,而转速是影响分裂频率差的主要因素。旋转效应与流体附加质量作用是影响转轮模态特性的关键因素,不仅改变频率分布,耦合作用也有可能导致新的共振形式,从而对旋转机械共振特性的研究提出了新的要求[23]。目前,针对旋转圆盘模态特性的研究主要集中于节径模态和节圆模态的变化规律,除了纯节径和节圆模态,转轮及其简化圆盘模型中还普遍存在同时具有节径与节圆特征的耦合模态[24],其变化规律还有待进一步研究。

本文以旋转圆盘为研究对象,采用基于声固耦合的数值模拟方法,开展旋转效应下圆盘模态特性研究,探讨转速对圆盘干模态和湿模态的影响,分析节径模态、节圆模态和节径-节圆耦合模态频率随转速变化的规律,并进一步分析不同流体环境对旋转圆盘模态特性的影响。

1　研究方法

1.1　结构动力学方程

结构动力学常用的矩阵方程表示为[25]

$$\boldsymbol{M}_S\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{C}_S\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_S\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_S \tag{1}$$

式中　$\boldsymbol{M}_S$——结构质量矩阵

$\boldsymbol{C}_S$——结构阻尼矩阵

$\boldsymbol{K}_S$——结构刚度矩阵

$\boldsymbol{u}$——结构节点位移向量

$\boldsymbol{F}_S$——结构所受的外部荷载向量

1.2　转子动力学方程

对于本文研究的旋转圆盘,需要在静止坐标系进行建模计算。静止坐标系仅适用于绕旋转轴对称,包含旋转部件和静止部件的结构[26],式(1)可表示为

$$\boldsymbol{M}_S\ddot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{G}_S + \boldsymbol{C}_S)\dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_S\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_S \tag{2}$$

式中　$\boldsymbol{G}_S$——陀螺矩阵

由于结构旋转产生的陀螺矩阵 $\boldsymbol{G}_S$ 可由动能表达式[27]推导出,即

$$E_{\text{mass}}^{K_i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{u}_y\\ \dot{u}_z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{u}_y\\ \dot{u}_z\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_y\\ \dot{\theta}_z\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}I_d & 0\\ 0 & I_d\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_y\\ \dot{\theta}_z\end{pmatrix} - 2\pi\Omega_x I_p\dot{\theta}_y\dot{\theta}_z \tag{3}$$

式中 $E_{\text{mass}}^{K_i}$——动能 m——质量

$\dot{u}_y$、$\dot{u}_z$——y、z 方向上的速度分量

I_p——极惯性矩

I_d——径惯性矩

Ω_x——绕 X 轴的旋转速度

$\dot{\theta}_y$、$\dot{\theta}_z$——绕 Y 轴、Z 轴的角位移

前两项构成单元质量矩阵,最后一项构成陀螺矩阵。

1.3 基于声波方程的流固耦合法

根据声固耦合模拟理论,压力分布由声波方程确定,假设流体为可压缩、无旋、无体积力且无平均流动,公式为

$$\nabla^2 P = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{4}$$

式中 ∇^2——拉普拉斯算子

P——流体压力

c——流体中的声速

t——时间

将式(4)表示成矩阵形式,则

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}P) = 0 \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{L}$——拉普拉斯向量

界面处的要求是结构的法向位移必须等于流体的法向位移。因此,由动量方程可得[15]

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{P} = -\rho_f \boldsymbol{n}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \left(\frac{\beta}{c^2}\right)\frac{\partial P}{\partial t} \tag{6}$$

式中 U——结构位移

ρ_f——流体平均密度

$\boldsymbol{n}$——界面法向量

β——无量纲边界吸收系数

将式(5)、(6)以矩阵形式表示,即

$$\boldsymbol{M}_F\ddot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{C}_F\dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{K}_F\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}_{SF} \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{M}_F$——流体质量矩阵

$\boldsymbol{C}_F$——流体阻尼矩阵

$\boldsymbol{K}_F$——流体刚度矩阵

$\boldsymbol{F}_{SF}$——声学流体荷载

$\boldsymbol{p}$——节点压力向量

将式(2)、(7)整合即可得到完整的声固耦合离散方程,下角标 F 和 S 分别表征流体和结构[28],即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_S & 0\\ \bar{\rho}_0\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_F\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\boldsymbol{u}}\\ \ddot{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_S+\boldsymbol{G}_S & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}_F\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{u}}\\ \dot{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_S & -\boldsymbol{R}\\ 0 & \boldsymbol{K}_F\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{f}_S\\ \boldsymbol{f}_F\end{pmatrix} \tag{8}$$

式中 $\bar{\rho}_0$——平均流体密度

$\boldsymbol{R}$——流固耦合矩阵

$\boldsymbol{f}_S$、$\boldsymbol{f}_F$——流体激励向量、结构外力向量

1.4 考虑陀螺效应的声固耦合分析

声学流体中计算结构的固有频率时,通常忽略陀螺效应和阻尼作用,并假定系统无外载荷,即阻尼矩阵 $\boldsymbol{C}_S$ 和 $\boldsymbol{C}_F$ 以及载荷矢量 $\boldsymbol{f}_S$ 和 $\boldsymbol{f}_F$ 均取为 0,则式(8)可简化为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_S & 0\\ \bar{\rho}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{p}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_S & -\boldsymbol{R}\\ 0 & \boldsymbol{K}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{p}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{9}$$

假设 $\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,$\boldsymbol{p} = \bar{\boldsymbol{p}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$,则

$$-\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_S & 0\\ \bar{\rho}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{M}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}\\ \bar{\boldsymbol{p}}\end{Bmatrix}\omega^2 + \begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_S & -\boldsymbol{R}\\ 0 & \boldsymbol{K}_F\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{\boldsymbol{u}}\\ \bar{\boldsymbol{p}}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} \tag{10}$$

式中 ω——固有角频率

整理得到

$$\{[-\boldsymbol{M}_S - \bar{\rho}\boldsymbol{R}(-\boldsymbol{M}_F\omega^2 + \boldsymbol{K}_F)^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]\omega^2 + \boldsymbol{K}_S\}\bar{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{11}$$

式中的 $\bar{\rho}\boldsymbol{R}(-\boldsymbol{M}_F\omega^2 + \boldsymbol{K}_F)^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 为流体附加质量矩阵 $\boldsymbol{M}_A$,其大小与流体密度、声速以及模态形状密切相关,并取决于流体质量矩阵 $\boldsymbol{M}_F$ 和流体刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_F$。当声速趋于无穷大时,流体质量矩阵 $\boldsymbol{M}_F$ 趋于 0,则式(11)变为

$$[(-\boldsymbol{M}_S - \bar{\rho}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_F^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\omega^2 + \boldsymbol{K}_S]\bar{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{12}$$

而流体附加质量矩阵变为 $\bar{\rho}\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_F^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$。

则可得到结构在空气中和水中固有频率的计算公式

$$f_{\text{air}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{K}_S}{\boldsymbol{M}_S}} \tag{13}$$

$$f_{\text{water}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\boldsymbol{K}_S}{\boldsymbol{M}_S + \boldsymbol{M}_A}} \tag{14}$$

针对水下旋转结构,陀螺效应不能忽略,式(11)变为

$$\{[-\boldsymbol{M}_S - \bar{\rho}\boldsymbol{R}(-\boldsymbol{M}_F\omega^2 + \boldsymbol{K}_F)^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}]\omega^2 + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{G}_S + \boldsymbol{K}_S\}\bar{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{15}$$

可以发现,陀螺矩阵并不会直接影响流体附加质量矩阵 $\boldsymbol{M}_A$,而是以复数形式存在,从而影响结构的固有频率。此时结构在空气中和水中的固有频率表示为[29]

$$f'_{\text{air}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{G}_S \pm \sqrt{-\boldsymbol{G}_S^2 + 4\boldsymbol{M}_S\boldsymbol{K}_S}}{\boldsymbol{M}_S} \tag{16}$$

$$f'_{\text{water}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\mathrm{i}\boldsymbol{G}_S \pm \sqrt{-\boldsymbol{G}_S^2 + 4(\boldsymbol{M}_S + \boldsymbol{M}_A)\boldsymbol{K}_S}}{\boldsymbol{M}_S + \boldsymbol{M}_A} \tag{17}$$

为了量化流体附加质量和陀螺效应对结构固有频率的影响,定义了附加质量系数 λ 和频率下降率 η

$$\lambda = \left(\frac{f'_{\text{air}}}{f'_{\text{water}}}\right)^2 - 1 \tag{18}$$

$$\eta = \frac{f'_{\text{air}} - f'_{\text{water}}}{f'_{\text{air}}} \times 100\% \tag{19}$$

2　研究对象

2.1　物理模型

本文的研究对象为圆盘结构，如图 1 所示，包括圆盘、旋转轴和周围流体，圆盘材料为结构钢，密度为 7 850 kg/m^3，杨氏模量为 200 GPa，泊松比为 0.3，水的密度为 1 000 kg/m^3。圆盘厚度为 8 mm，半径为 200 mm，与流体域径向距离为 5 mm，上侧轴向距离为 10 mm，下侧轴向距离为 97 mm。旋转轴与圆盘交界处设置固定约束，圆盘、旋转轴与流体接触的交界面设置为流固耦合交界面。

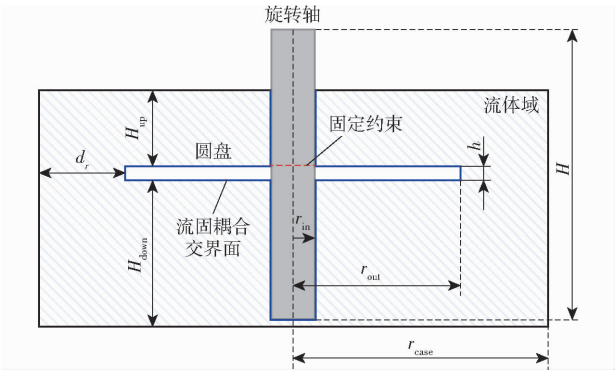


图 1　圆盘模型及约束条件设置

Fig. 1　Disk model and boundary condition settings

2.2　数值模型的验证

开展模型网格划分，如图 2 所示，其中固体域采用 Solid186 单元进行离散，流体域采用 Fluid220 单元进行离散。分别对空气和水中的模型按照一定比例各划分 4 套不同尺寸的网格，计算无旋转条件下圆盘干、湿模态的固有频率，如图 3（图中 2ND ~ 4ND 表示节径数分别为 2 ~ 4 的模态）所示。可以看出，随着网格节点数增加，各节径模态的固有频率趋于稳定。综合考虑计算求解的精度和效率，分别选用空气中节点总数为 34 539 和水中 134 924 的网格进行圆盘模态特性数值模拟计算。

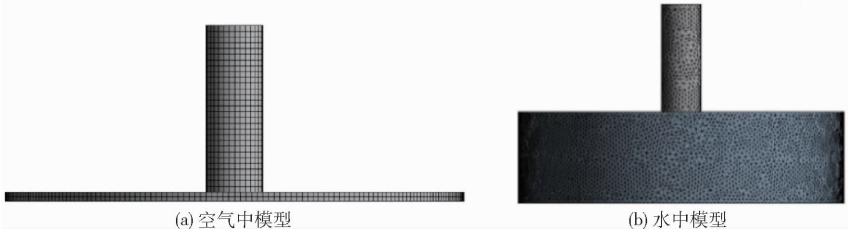


图 2　圆盘模型网格划分

Fig. 2　Meshing of disk model

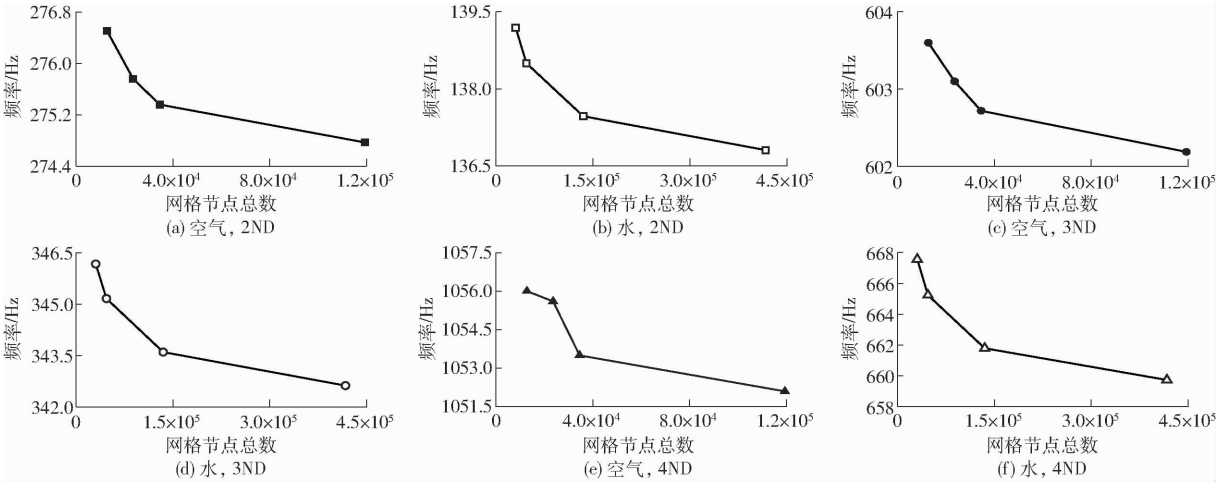


图 3　圆盘固有频率随网格节点总数变化曲线

Fig. 3　Natural frequency of disk varied with number of mesh nodes

表 1 为数值模拟结果与试验测量数据[14-16]的比较，结果显示，声固耦合法[30]可以较好地预测出空气和水中圆盘的固有频率，与其他学者[31]的计算结果一致，数值模拟方法计算结果呈现小幅度偏高，最大误差为 8.20%。

3　结果与讨论

3.1　不同转速下圆盘干模态分析

本文基于 Ansys Workbench 平台中模态分析模块，添加科氏力，建立旋转参考系下旋转圆盘计算

表 1 数值模拟与试验测量频率结果对比

Tab. 1 Comparison of frequency results between numerical simulation and experimental measurement

参数	2ND		3ND		4ND	
	空气	水中	空气	水中	空气	水中
试验值/Hz	258.00	127.05	589.00	321.16	1 032.50	642.23
模拟值/Hz	275.36	137.47	602.80	343.60	1 053.50	661.80
误差/%	6.73	8.20	2.34	6.99	2.03	3.05

模型,转频变化范围为 0 ~ 8 Hz。该软件最终计算的模态参数会在静止坐标系下呈现,根据试验结果研究,静止坐标系下圆盘的固有频率换算到旋转坐标系下时,遵循公式

$$f_{r,n+} = f_{s,n+} - n\Omega \tag{20}$$

$$f_{r,n-} = f_{s,n-} + n\Omega \tag{21}$$

式中 f_r——旋转坐标系下圆盘频率

f_s——静止坐标系下圆盘频率

n——圆盘节径数 Ω——转频

“ + ”表示前行波;“ - ”表示后行波。

文中涉及一系列不同模态的分析,首先对圆盘模态的命名进行说明:圆盘模态振型可以用节径数 n 和节圆数 m 描述,其中节径从中心轴沿圆盘半径方向,节圆沿圆盘圆周方向。图 4 所示为圆盘的(1,0)模态、(0,1)模态和(1,1)模态。

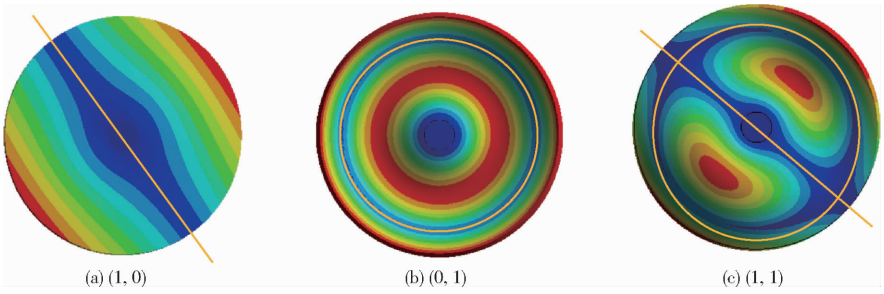


图 4 节径模态、节圆模态和节径-节圆耦合模态示意图

Fig. 4 Schematics of nodal diameters mode, nodal circles mode, and coupled nodal circle and diameter mode

如图 5(图中 T 表示周期)所示,选取圆盘 2ND 外径模态振型曲线,曲线上设置监测点。通过监测点的运动和模态曲线的变化,讨论旋转效应对圆盘节径模态的影响。结果显示,转频为零,即未考虑旋转效应时,圆盘呈现基本的 2ND 模态变化,圆盘上监测点不存在圆周运动,主要表现为圆盘 2ND 模态振型引起的沿 Y 轴方向上下运动,从 0 到 $T/8$,模态位移沿 Y 轴正方向逐渐减小,$T/4$ 时刻模态位移为

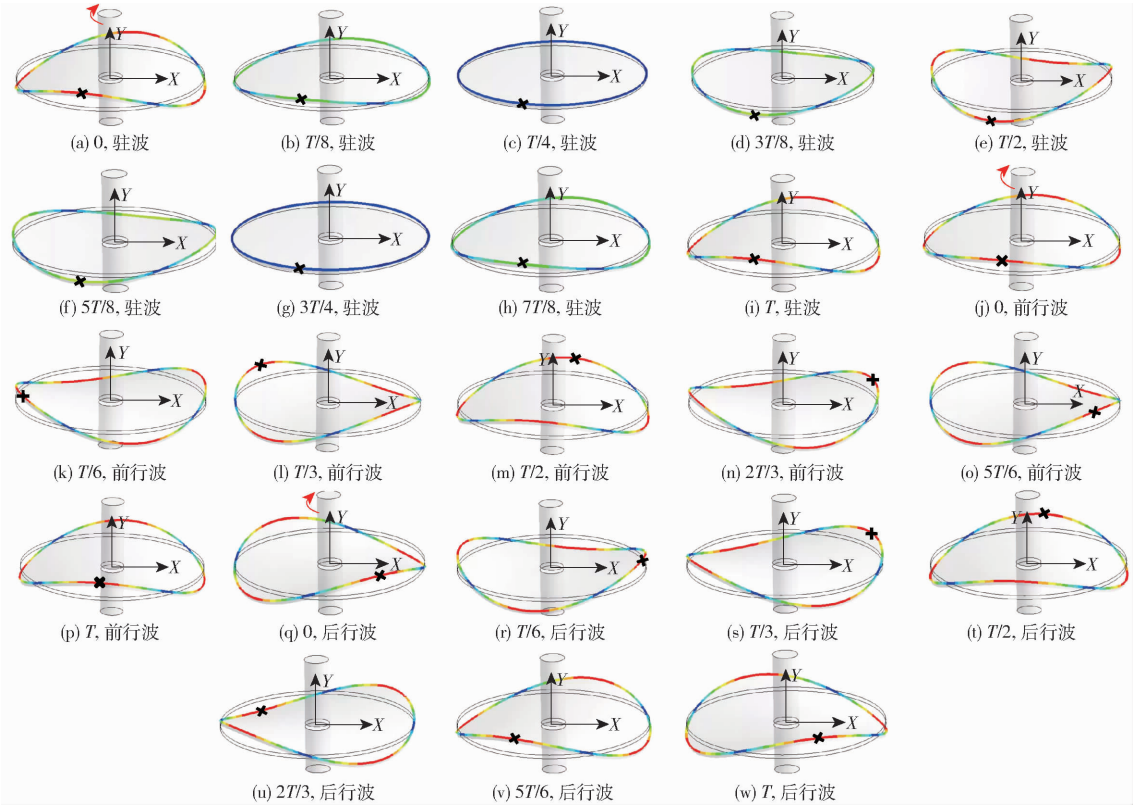


图 5 旋转效应作用下圆盘(2,0)模态的振型变化

Fig. 5 Mode shape variation of disk (2,0) mode under rotation effect

零，然后反向增加至位移最大后再减小，3T/4 时刻模态位移为零后，再沿 Y 轴正方向增加，T 时刻与初始时刻一致，达到 Y 轴正方向最大模态位移。此时前行波和后行波一样，表现为圆盘的固有模态，称为驻波。

圆盘转频为 4 Hz 时，旋转效应会沿着圆盘周向传播，形成两种旋转方向和频率不同的模态振型。通过观察监测点的位置可以发现：一种方式为监测点以 Y 轴为旋转轴的顺时针周向运动，振型波变化方向与圆盘旋转方向相同，即前行波。另外一种方式为监测点以 Y 轴为旋转轴的逆时针周向运动，振型波变化方向与圆盘旋转方向相反，即后行波。前行波模态和后行波模态在不同时刻均表现为圆盘 2ND 模态，没有出现圆盘 2ND 本身的模态变形，这可能是因为旋转效应对节径模态作用效果显著，固有模态被前行波或后行波覆盖。

为了更好地描述旋转效应对圆盘固有频率的影响，文中定义频率系数 f^*，其中 f_{ri} 为旋转圆盘频率，f_i 为静止圆盘频率，i 为不同介质条件，比如空气、水等，即

$$f^* = f_{ri}/f_i \tag{22}$$

图 6（图中 f_{ave} 表示前行波频率与后行波频率均值）为不同转速下空气中圆盘节径模态的频率变化。结果显示，随转速的增加，圆盘频率呈现增加趋势，频率均值越大，会形成两种不同频率分布，与图 5 模态振型对应，分别对应前行波模态和后行波模态，其中后行波模态的频率增大幅度大于前行波，而且随着节径数增加，频率随转速的变化越敏感，当转频从 0 Hz 增加到 8 Hz，(2,0)后行波模态频率增加了 0.53 Hz，(3,0)后行波模态频率增加了 0.73 Hz，(4,0)后行波模态频率增加了 0.9 Hz。模态节径数增加时，前行波模态频率随转速变化的敏感度减小，尤其转频在 0 ~6 Hz 变化时，(4,0)前行波模态基本保持不变。低转速空气条件下，陀螺力、离心力和剪切力等效作用不明显，所以转速变化时圆盘频率均呈现小幅度增加，频率分裂现象不明显。

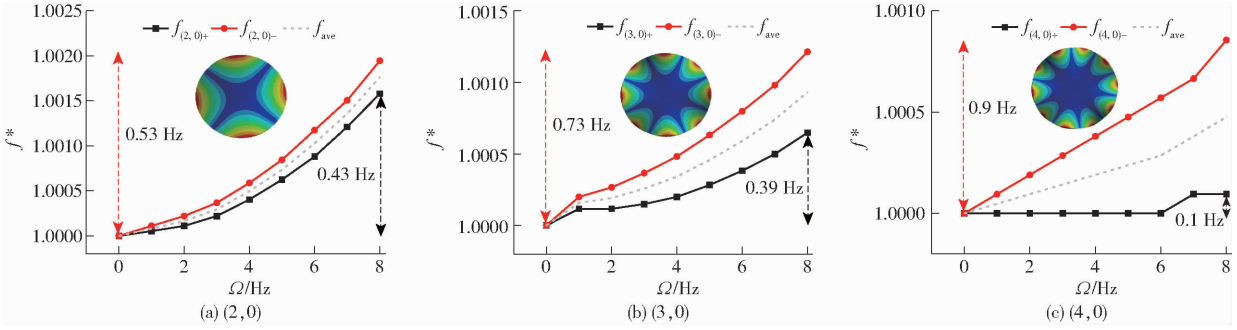


图 6　空气中旋转圆盘节径模态频率随转速变化示意图

Fig. 6　Diagram of frequency variation with rotational speed for nodal diameter mode of rotating disk in air

图 7 为不同转速下圆盘节圆模态的模态变化。结果观察到，随着转速的变化，圆盘(0,1)模态和(0,2)模态的固有频率保持不变，而且圆盘节圆模态不受旋转效应的影响，模态为固有模态振型，频率没有发生分裂现象。

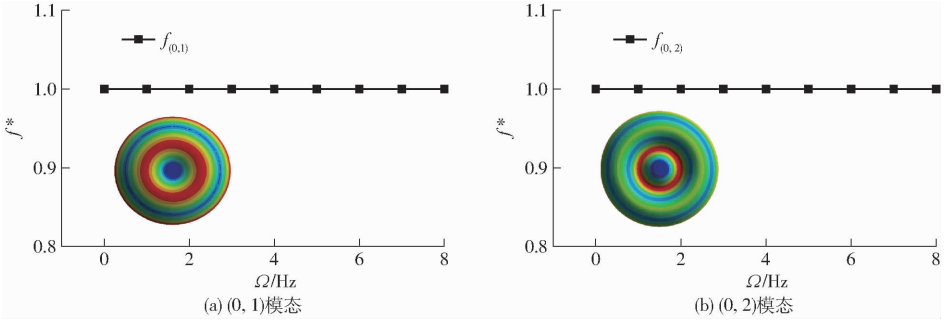


图 7　空气中旋转圆盘节圆模态频率随转速变化示意图

Fig. 7　Diagrams of frequency variation with rotational speed for nodal circle mode of rotating disk in air

图 8 展示了不同转速下节径和节圆耦合模态的频率变化趋势。结果显示，节径与节圆耦合模态(2,1)、(3,1)和(4,1)随转速的变化同样出现了频率分裂现象，但前行波和后行波频率的变化趋势不同。前行波模态频率随转速增加呈减小趋势，而且节径数增加，频率随转速变化越明显，频率减小幅度越大，(4,1)模态频率减小了 1.0 Hz。后行波模态频率随转速呈增加趋势，随着节径数的增加，频率增大幅度更大，(4,1)模态频率增加了 1.7 Hz。

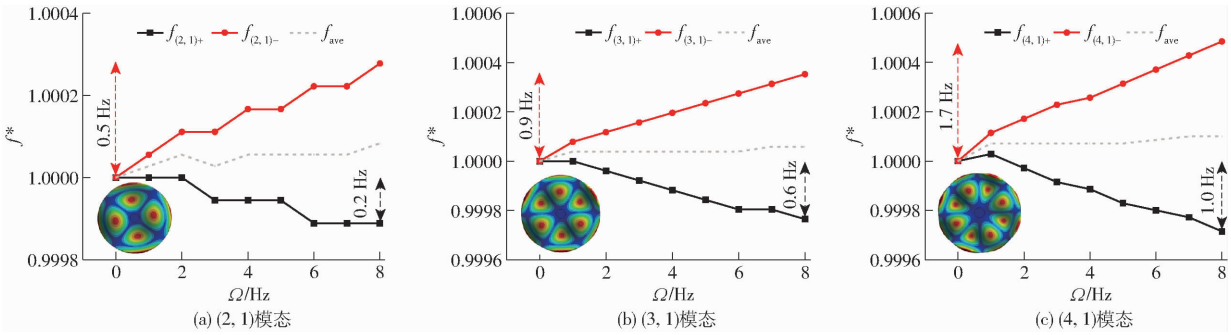


图 8 空气中旋转圆盘耦合模态频率随转速变化示意图

Fig. 8 Diagrams of frequency variation with rotational speed for coupled mode of rotating disk in air

表 2 比较了不同转速下节径模态、节圆模态、耦合节径与节圆模态的变化。不同点主要包括:耦合节径与节圆模态下前行波频率随转速减小,前行波和后行波模态频率变化幅度不同。结合上述节径模态和节圆模态的分析,耦合模态不同的原因可能是节圆模态的振型波会使得节径模态的受力重新分配,增加或减弱前行波与后行波的能量传递,形成不同的变化规律及变化幅值。

表 2 空气条件下不同类型圆盘模态随转速变化对比

Tab. 2 Comparison of variation in different modes of disk with rotational speed in air

振型	频率分裂	前行波	后行波
节径模态	有	有 (随转速增加,最大变化幅值 0.43 Hz)	有 (随转速增加,最大变化幅值 0.9 Hz)
节圆模态	无	无	无
耦合节圆与节径模态	有	有 (随转速减小,最大变化幅值 1.0 Hz)	有 (随转速增加,最大变化幅值 1.7 Hz)

图 9 为 $T/2$ 周期内(2,1)模态的振型变化,可以发现,节径(2,0)模态随转速呈现正反转的旋转模态,旋转效应占主导地位,固有的振型变化被完全覆盖。节圆(0,1)模态不受旋转效应的影响,不同转速下均保持固有模态振型变化。对于耦合模态,节径与节圆模态同时出现时,节圆会保持固有振型,使得旋转效应的能量重新分配,对节径模态的等效作用改变,节径模态固有模态不完全被旋转效应覆盖,模态位移出现先减小后增大,从而导致前行波和后行波特性的变化。

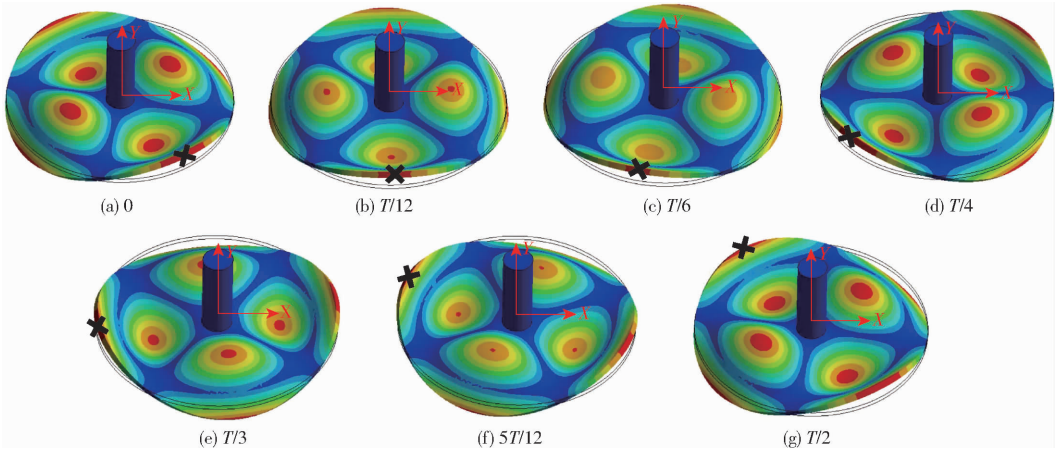


图 9 空气中旋转圆盘 $T/2$ 周期内(2,1)耦合模态振型变化示意图

Fig. 9 Diagrams of mode shape variation of rotating disk (2,1) coupled mode within $T/2$ period in air

3.2 不同转速下湿模态特性分析

该部分考虑水体与圆盘的相对运动,同样基于 Ansys Workbench 平台建立旋转参考系,转频变化范围为 0 ~ 8 Hz,进行不同转速下圆盘结构湿模态特性分析。

图 10 所示为水中旋转效应作用下,由于旋转圆盘与周围夹带水体之间的相对运动及周围水动力学参数的变化,会使得圆盘的节径模态产生明显的频率分裂现象,其中前行波模态的频率随着转速上升呈现下降趋势,后行波模态的频率随着转速的上

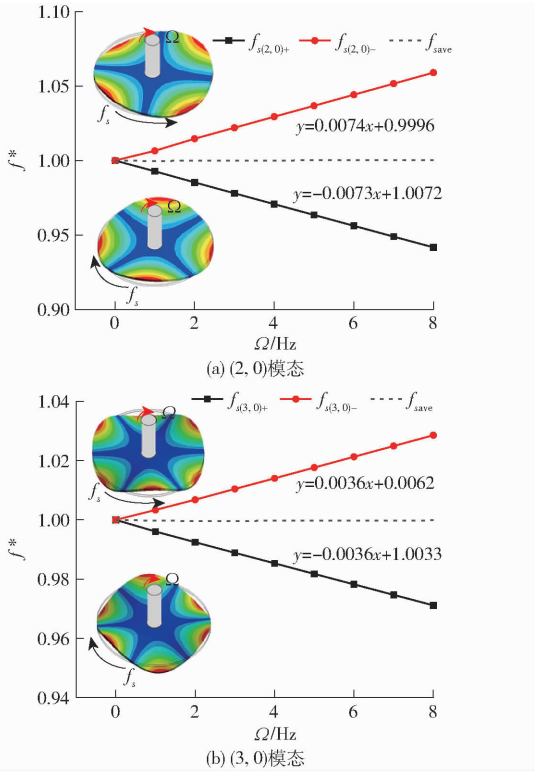


图 10　水中旋转圆盘节径模态固有频率随转速变化示意图

Fig. 10　Diagrams of natural frequency variation with rotational speed for nodal diameter mode of rotating disk in water

升而升高。而且分裂模态频率均随转速呈线性变化，前行波和后行波的频率随转速变化率差异很小。前行波和后行波模态振型与空气中旋转圆盘节径模态的振型规律一致，旋转效应占主导位置，固有的模态振型被覆盖。

表 3 圆盘节径模态频率值的变化与图 10 所示结果一致，可以更直观地看出不同转速下的频率，低转速情况下，频率变化较小，随着转速的增加，频率变化越显著。其中转频为 8 Hz 时，(2,0)模态固有频率最大变化了 8.11 Hz，约占静止圆盘固有频率的 5.9%。(3,0)模态固有频率最大变化了 9.92 Hz，约占静止圆盘固有频率的 2.9%。

图 11 为水中旋转圆盘节径模态频率下降率 η 和附加质量系数变化，结果显示，频率下降率 η 和附加质量系数 λ 同样随转速线性变化，但是与频率变化规律相反，前行波模态的 η 和 λ 随转速线性增加，后行波的 η 和 λ 随转速线性减小。(3,0)模态的 η 和 λ 变化均小于(2,0)模态。

图 12 为前行波与后行波的频率差，结果显示，随着转速上升，前行波和后行波的频率差基本呈现线性增加趋势，与试验测试结果基本吻合，最大频率差值 1.8 Hz。该曲线反映出转速越大，水中结构发

表 3　水中旋转圆盘节径模态的固有频率

Tab. 3　Natural frequency of nodal diameter mode of rotating disk in water　Hz

振型	转频									频率变化
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	最大值
(2,0) +	137.49	136.49	135.47	134.46	133.46	132.46	131.46	130.46	129.47	8.02
(2,0) −	137.49	138.38	139.50	140.51	141.53	142.54	143.56	144.58	145.60	8.11
(3,0) +	343.75	342.40	341.16	339.93	338.71	337.48	336.27	335.05	333.83	9.92
(3,0) −	343.75	344.90	346.09	347.34	348.57	349.82	351.07	352.32	353.57	9.82

注：“+”表示前行波；“−”表示后行波。

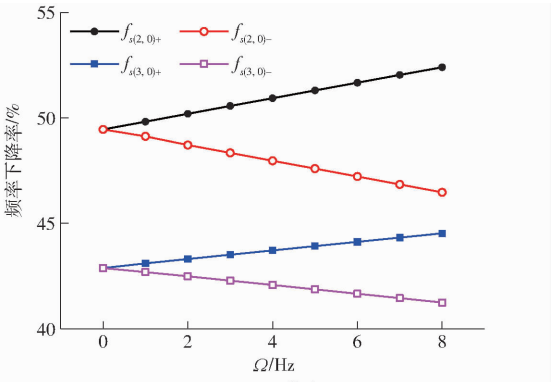
生频率分裂值越大，即前行波与后行波之间频率差异越大。

不同运行环境对旋转圆盘频率分裂特性的影响不同。文中选取了海水和含气水体，其中海水声速为 1 531 m/s，密度为 1 026 kg/m^3。含气水体，如图 13 所示为水蒸气和水的混合物物理属性变化，α_c =0 为静水中，α_c =1 为空气中，空隙率 α_c 的变化范围为 0 ~ 1.0，对应密度变化范围为 1 000 ~ 0 kg/m^3，声速的变化范围为 1 450 ~ 0 m/s[32]。文中考虑旋转圆盘周围水体包含少量空泡，孔隙率变化很小，声速为 1 000 m/s，密度为 980 kg/m^3。

图 14 分别为海水和含气水体环境中旋转圆盘频率随转速的变化。结果显示，不同运行环境下，旋转圆盘均发生了频率分裂现象，与纯水中结果一致，前行波频率随转速上升而减小，后行波频率随转速上升而增加。与纯水中频率变化不同的是，海水中圆盘(2,0)频率减小 2 Hz，随转速上升，前行波和后行波频率的变化率也发生了变化，前行波与后行波频率分裂差值小幅度增大，为 16.33 Hz。含气水体中，圆盘(2,0)固有频率小幅度增加，与纯水中相差 0.97 Hz。转频为 8 Hz 时，前行波和后行波模态的频率分裂值为 16.03 Hz，与纯水中频率分裂值相比变化很小。

4　结论

(1)空气条件下，旋转效应作用下，节径模态会沿着圆盘周向传播，形成前行波和后行波，其中后行波模态的频率增大幅度大于前行波，节径数越多，频率受转速影响越明显。节圆模态不受旋转效应的影响。节径−节圆耦合模态同样出现频率分裂现象，



(a) (2, 0)模态

(b) (3, 0)模态

图 11 水中旋转圆盘节径模态频率下降率和附加质量系数变化曲线

Fig. 11 Frequency reduction rate and added mass of nodal diameter mode of rotating disk in water

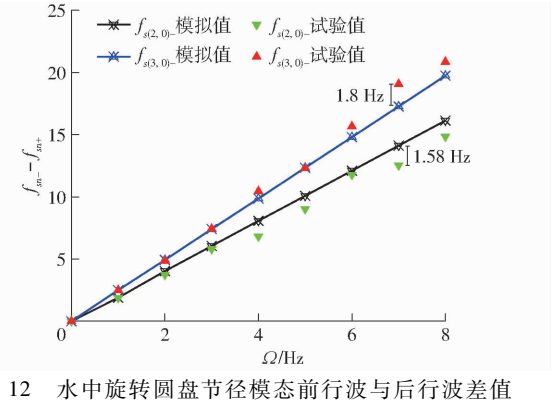


图 12 水中旋转圆盘节径模态前行波与后行波差值随转速变化曲线

Fig. 12 Variation of forward wave and backward wave difference with rotational speed for nodal diameter mode of rotating disk in water

与单纯节径模态和节圆模态不同,耦合模态振型不完全被旋转效应覆盖,模态位移出现先减小后增大,而且随转速变化频率变化幅度增大。由于低转速空气中,旋转效应产生的等效作用不明显,圆盘频率随转速变化呈现小幅度变化,频率分裂现象不明显。

(2)纯水条件下,由于盘状结构与夹带水体之间的相对转动及旋转效应的作用,节径模态产生明显的频率分裂现象,随转速增加,前行波频率呈线性降低,

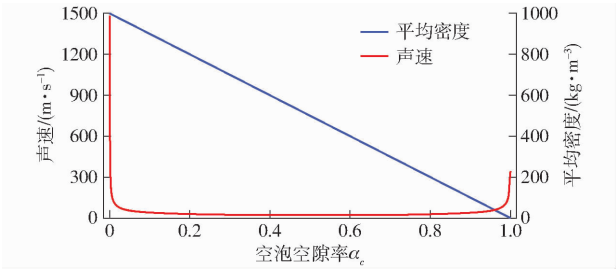


图 13 水蒸气和水的混合物中声速和平均密度与空泡空隙率的函数关系[32]

Fig. 13 Functional relationship between sound velocity (red line), average density (blue line) and cavity void fraction in steam-water mixture[32]

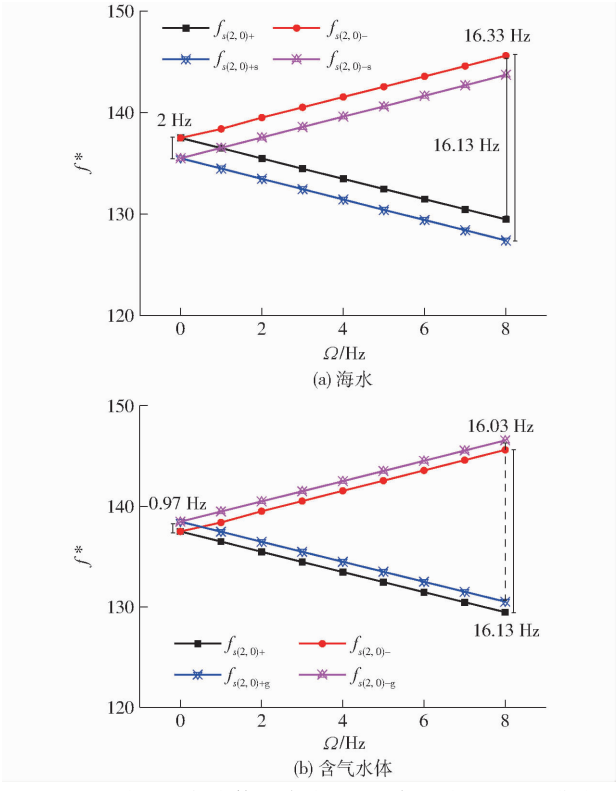


图 14 海水和含气水体中旋转圆盘频率随转速的变化曲线

Fig. 14 Frequency variations with rotational speed for rotating disk in seawater and aerated water environment

后行波频率呈线性升高,二者频率差也呈现线性增加趋势。转频为 8 Hz 时,(2,0)模态后行波频率增加了 8.11 Hz,约占静止圆盘频率的 5.9%。(3,0)模态前行波频率减小了 9.92 Hz,约占静止圆盘频率的 2.9%。频率下降率 η 和附加质量系数 λ 随转速也呈现线性变化趋势,但与频率的变化规律相反。

(3)海水和含气水体条件下,旋转效应对圆盘结构的频率分裂程度发生变化。与纯水中相比,海水中圆盘节径模态的频率分裂程度小幅度增强,转频为 8 Hz 时,前行波与后行波频率分裂值为 16.33 Hz。含气水中,声速和密度减小,圆盘固有频率小幅度增加,前行波与后行波之间的频率分裂差值与纯水中相比变化不大,频率分裂值为 16.03 Hz。

参 考 文 献

[1] Ganesapillai M, Lou E, Song Y, et al. Pumped storage hydropower: technological implementation, environmental consideration, and potential growth[J]. E3S Web of Conferences, 2023, 385: 01001.

[2] Karambelkar S, Cantor A, Bui T K, et al. Pumped storage hydropower in the United States: emerging importance, environmental and social impacts, and critical considerations[J]. WIREs Water, 2025, 12(2): e1700.

[3] 周建平, 杜效鹄, 周兴波. 面向新型电力系统的水电发展战略研究[J]. 水力发电学报, 2022, 41(7):106 – 115.
Zhou Jianping, Du Xiaohu, Zhou Xingbo. Research on hydropower development strategy oriented to the new power system[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2022, 41(7): 106 – 115. (in Chinese)

[4] 王薇, 夏铭, 王正伟. 蓄能机组水轮机工况开停机过程现场测试分析[J]. 农业机械学报, 2024, 55(11): 352 – 362.
Wang Wei, Xia Ming, Wang Zhengwei. Field test analysis of start-stop process of turbine operating condition of pumped storage power unit[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(11): 352 – 362. (in Chinese)

[5] 陈炜, 夏翔, 杨光东, 等. 流体声速对水泵水轮机转轮振动模态的影响[J]. 水力发电学报, 2025, 44(11): 13 – 23.
Chen Wei, Xia Xiang, Yang Guangdong, et al. Influence of fluid sound speed on vibration modal characteristics of a pump-turbine runner[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2025, 44(11): 13 – 23. (in Chinese)

[6] Østby P T K, Sivertsen K, Billdal J T, et al. Experimental investigation on the effect of near walls on the eigenfrequency of a low specific speed Francis runner[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2019, 118: 757 – 766.

[7] Askari E, Jeong K H, Amabili M. Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(12): 3064 – 3085.

[8] 姚志峰, 刘宝熙, 曾永顺, 等. 水中旋转圆盘振动阻尼测量与模拟[J]. 北京理工大学学报, 2024, 44(4): 377 – 385.
Yao Zhifeng, Liu Baoxi, Zeng Yongshun, et al. Measurement and simulation of vibration damping of a rotating disk in water [J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2024, 44(4): 377 – 385. (in Chinese)

[9] 杨小龙, 王超, 陈志明, 等. 附加质量对水泵水轮机转轮模态特性的影响[J]. 水力发电学报, 2021, 40(9): 78 – 85.
Yang Xiaolong, Wang Chao, Chen Zhiming, et al. Effect of added mass on modal characteristics of a pump-turbine runner[J]. Journal of Hydroelectric Engineering, 2021, 40(9): 78 – 85. (in Chinese)

[10] Presas A, Valentin D, Egusquiza E, et al. Dynamic response of a rotating disk submerged and confined: influence of the axial gap[J]. Journal of Fluids and Structures, 2016, 62: 332 – 349.

[11] Guo J, Zhou D, Chen H, et al. Flow-induced vibration analysis in a pump-turbine runner under transient operating conditions [J]. Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics, 2023, 17(1): 1 – 18.

[12] Hu D, Wang W, Wang S, et al. Study on the influence of gap water body on the modal characteristics of pump turbine runner [C]// Proceedings of the 3rd International Conference on Artificial Intelligence and Advanced Manufacture (AIAM). New York: IEEE, 2021: 43 – 46.

[13] Jin F, Luo Y, Wang H, et al. Dynamic response of a pump-turbine runner during turbine mode starting up[J]. Journal of Energy Storage, 2023, 74: 109209.

[14] Presas A, Valentin D, Valero C, et al. Experimental measurements of the natural frequencies and mode shapes of rotating disk-blades-disk assemblies from the stationary frame[J]. Applied Sciences, 2019, 9(18): 3802.

[15] Valentin D, Presas A, Egusquiza E, et al. On the capability of structural-acoustical fluid-structure interaction simulations to predict natural frequencies of rotating disklike structures submerged in a heavy fluid[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2016, 138(3): 034502.

[16] Kubota Y, Ohashi H. A study on the natural frequencies of hydraulic pumps[C]// Proceedings of the General Assembly of the Japan Society of Mechanical Engineers. Tokyo: Japan Society of Mechanical Engineers, 1991:13 – 15.

[17] Nennemann B, Monette C, Braun O, et al. Eigenfrequencies of rotating discs in dense fluid: imposed modal motion approach [J]. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2022, 1079(1): 012028.

[18] Louyot M, Nennemann B, Monette C, et al. Modal analysis of a spinning disk in a dense fluid as a model for high head hydraulic turbines[J]. Journal of Fluids and Structures, 2020, 94: 102965.

[19] Weder M, Horisberger B, Monette C, et al. Experimental modal analysis of disk-like rotor-stator system coupled by viscous liquid[J]. Journal of Fluids and Structures, 2019, 88: 198 – 215.

[20] Presas A, Valentin D, Egusquiza E, et al. Influence of the rotation on the natural frequencies of a submerged-confined disk in water[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 337: 161 – 180.

[21] Presas A, Valentín D, Egusquiza E, et al. Experimental analysis of the dynamic behavior of a rotating disk submerged in water [J]. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 2014, 22(3): 032019.

[22] Zeng Y, Qi X, Bai M, et al. How the radial gap affects the runner's hydrodynamic damping characteristic of a pump-turbine: a physical experiment on a rotating disc[J]. Journal of Hydrodynamics, 2023, 35(4): 736 – 745.

[23] Presas A, Valentin D, Egusquiza E, et al. On the detection of natural frequencies and mode shapes of submerged rotating disk-like structures from the casing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2015, 60: 547 – 570.

[24] Zhang J, Zeng Y, Zhou P, et al. Experimental study on modal characteristics of an underwater rotating disc in coupled nodal circle and diameter modes[J]. Journal of Fluids and Structures, 2026, 140: 104443.

[25] Chandrupatla T R, Belengundu A D. Introduction to finite elements in engineering[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1990.

[26] Santhosh Kumar M. Rotor dynamic analysis using ANSYS[J]. IUTAM Symposium on Emerging Trends in Rotor Dynamics, 2009, 1011: 153 – 162.

[27] Michel G, Nicolas K. A new approach to finite element modelling of flexible rotors[J]. Engineering Computations, 1984, 1(1): 52 – 64.

[28] Rodriguez C G, Flores P, Pierart F G, et al. Capability of structural-acoustical FSI numerical model to predict natural frequencies of submerged structures with nearby rigid surfaces[J]. Computers & Fluids, 2012, 64: 117 – 126.

[29] Cao J, Luo Y, Liu X, et al. Numerical theory and method on the modal behavior of a pump-turbine rotor system considering gyro-effect and added mass effect[J]. Journal of Energy Storage, 2024, 85: 111064.

[30] 王薇, 敬若玺, 曾柯烨, 等. 基于声固耦合法的水翼结构模态特性研究[J]. 农业机械学报, 2026, 57(3): 261 – 269, 305.
Wang Wei, Jing Ruoxi, Zeng Keye, et al. Modal characteristics of hydrofoil structure based on acoustic fluid-structure interaction method[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2026, 57(3): 261 – 269, 305. (in Chinese)

[31] 夏翔. 考虑旋转效应的水泵水轮机转轮模态特性研究[D]. 北京: 中国农业大学, 2023.
Xia Xiang. Investigation of the mode characteristics of pump-turbine runners considering rotation effect[D]. Beijing: China Agricultural University, 2023. (in Chinese)

[32] Brennen C E. Cavitation and bubble dynamics[M]. New York: Oxford University Press, 1995.