

2-RRC/1-RRS 并联机器人运动学与动力学分析

刘善增^{1,2} 张著军¹ 孟德超¹

(1. 山东石油化工学院智能制造与控制工程学院, 东营 257061; 2. 伦敦国王学院, 伦敦 WC2R 2LS)

摘要: 针对农业物料筛分问题, 本文提出了一种 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构模型, 对其运动学和动态特性进行了研究。基于 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构各支链运动特点, 开展了机器人结构特征与运动变量耦合关系分析。进行了 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构运动学分析, 给出了机器人运动学反解解析表达式。基于 2-RRC/1-RRS 并联机器人系统动能和势能分析, 利用经典力学 Lagrange 方程法, 推导了机器人动力学方程。通过算例探讨了 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构运动参量、驱动力和能耗变化规律。研究结果对认知 2-RRC/1-RRS 并联机器人运动学特征、动态特性以及结构优化设计和系统的高精度控制等具有重要意义, 为农业物料筛分装备设计提供了新思路。

关键词: 并联机器人; 运动学; 动力学; Lagrange 方程; 物料筛分

中图分类号: TP24 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2025)12-0811-08

OSID:



Kinematics and Dynamics Analysis of 2-RRC/1-RRS Parallel Manipulator

LIU Shanzeng^{1,2} ZHANG Zhujun¹ MENG Dechao¹

(1. School of Intelligent Manufacturing and Control Engineering, Shandong Institute of Petroleum and Chemical Technology, Dongying 257061, China

2. King's College London, London WC2R 2LS, UK)

Abstract: A novel structure model of 2-RRC/1-RRS parallel manipulator mechanism was proposed for the screening of agricultural materials, and its kinematics and dynamic characteristics were studied. Firstly, based on the motion characteristics of each branch chain in the 2-RRC/1-RRS parallel manipulator mechanism, the manipulator structure characteristics and the coupling relationship between the motion variables were analyzed. Secondly, the kinematics of the 2-RRC/1-RRS parallel mechanism was deduced, and the analytical expression of the inverse kinematics of the robot was given. Then based on the discussion of kinetic energy and potential energy of the 2-RRC/1-RRS parallel manipulator, the dynamic equation of the manipulator was derived by Lagrange equation method of classical mechanics. Finally, the dynamic characteristics of the 2-RRC/1-RRS parallel manipulator mechanism, such as motion parameters, driving torque and energy consumption, were discussed by an example. The results showed that the parameters of moment of inertia in the dynamics equation of the 2-RRC/1-RRS parallel manipulator system were closely related to the structure size of the manipulator, the mass size and mass distribution of each component, and the motion configuration of the manipulator, so as to determine the kinematics and dynamics characteristics of the 2-RRC/1-RRS parallel manipulator. The research content was of great significance to deeply understand the kinematics and dynamic characteristics of 2-RRC/1-RRS parallel manipulator, as well as the structural optimization design and the high-precision control of the manipulator, which can provide an idea for the innovative design of new equipment for agricultural material screening.

Key words: parallel manipulator; kinematics; dynamics; Lagrange equation; material screening

收稿日期: 2024-08-25 修回日期: 2024-10-13

基金项目: 国家自然科学基金项目(51975571)和东营市科学发展基金项目(DJB2023050)

作者简介: 刘善增(1977—), 男, 副教授, 博士, 主要从事机构学与机器人技术研究, E-mail: liushanzeng@163.com

0 引言

并联机器人相对于串联机器人具有诸多优点,引起了国际机构学和机器人技术学者们广泛关注^[1-4]。由于在许多应用场合机器人只需部分自由度(2~5个自由度)就可满足使用要求,所以,20世纪80年代以来,世界各国学者相继开展了少自由度并联机器人探索和应用开发工作^[5-8],提出了Delta机器人、4-UPU并联机器人、5-TPS/PRPT并联机器人等,为机构学和机器人研究注入了新活力。HUNT^[9]提出了能实现2个转动和1个移动的3-RPS并联机构,LEE等^[10]对3-RPS并联机构进行了运动学和动力学分析,并将此机构应用为3自由度机器人操作器主臂。GOSSELIN等^[11]分析了平面3自由度并联机器人运动学最优设计问题。FANG等^[12]研究了3-RPS并联机构微分运动学问题,并采用螺旋理论分析了3-RPS、3-RRS和3-TPT等并联机构瞬时运动特性。CARRETERO等^[13]分析了3-PRS并联机器人运动学问题,并利用非线性优化方法对系统有关参数进行了优化。WANG等^[14]通过添加配重和弹簧研究了3-RRS并联机器人静平衡问题。赵铁石等^[15]对3-RRC并联机器人位置分析、工作空间和运动学等问题进行了研究。文献[16-19]开展了3-RRC和3-RRS并联机器人刚性运动学和动力学研究以及考虑支链中构件柔性变形的机构刚柔耦合动力学建模和动态特性分析问题。李剑锋等^[20]基于雅可比矩阵进行了一种适用于踝关节康复的3-UPS/RRR并联机构运动学、刚度特性和力矩传递性能分析。张俊等^[21]以一类2UPR&2RPS型冗余驱动并联机器人为研究对象,进行了几何误差分析和运动学标定方法研究。LIU等^[22]提出了一种用于评价四自由度高速并联机器人加速能力的性能指标,探究了运动/力的传递能力对机构加速能力的影响。张惠普等^[23]针对4-RR(SS)₂四自由度高速并联机器人,建立了以使机构动力学性能最优的机构尺度综合模型,开展了动力尺度综合方法研究。

农业物料筛分是机械化联合收获和农作物处理加工中的重要环节,筛分环节常常出现的设备物料堵塞是导致筛分效率降低、清选损失增加的主要因素;同时,目前筛分设备还存在振动较大、噪声污染、可靠性低等显著问题。针对一种能应用于振动筛分及医疗康复方面的2-RRC/1-RRS并联机器人,本文进行其运动学和动力学特性探究。开展机器人结构特征和运动学规律分析;基于Lagrange方程法建立系统形式简洁的解析式动力学方程;最后,探讨

2-RRC/1-RRS并联机器人动态特性。

1 结构特征

2-RRC/1-RRS并联机器人机构系统三维模型,如图1a所示,其机构运动简图如图1b所示。此并联机构动平台 $P_1P_2P_3$ 与基座 $B_1B_2B_3$ 之间由3个支链连接,其中支链 $B_1C_1P_1$ 的 B_1 处和 C_1 处皆为转动副, P_1 处为球面副。支链 $B_2C_2P_2$ 与 $B_3C_3P_3$ 结构组成相同,即 B_i 处和 C_i 处皆为转动副, P_i 处为圆柱副($i=2,3$)。建立如图1b所示的系统坐标系 $OXYZ$ 以及与动平台 $P_1P_2P_3$ 相固结的局部坐标系 $Pxyz$ 。

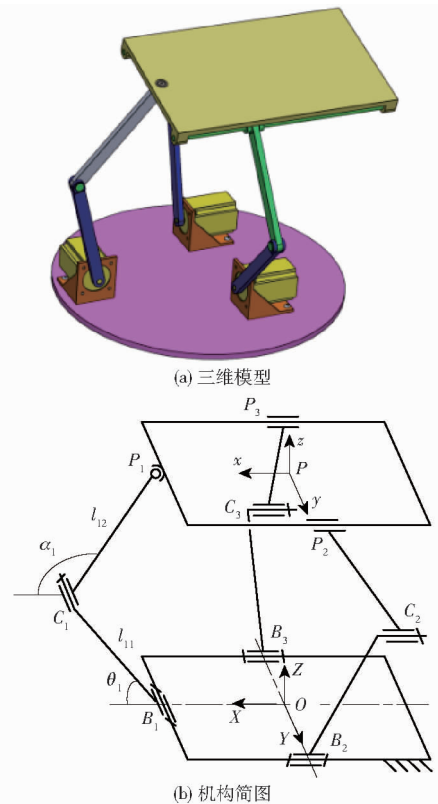


图1 2-RRC/1-RRS并联机器人

Fig. 1 2-RRC/1-RRS parallel manipulator

2-RRC/1-RRS并联机器人结构参数如图1b所示,其中 B_iC_i 长度为 l_{i1} , C_iP_i 长度为 l_{i2} ($i=1,2,3$)以及 $l_1=2b_2$ 和 $l_2=2b_4$ 。在坐标系 $OXYZ$ 中,点 P 坐标表示为 $(x_p, y_p, z_p)^T$,同时给定点 B_i ($i=1,2,3$)坐标矢量为 $\mathbf{B}_1=(b_1, 0, 0)^T$ 、 $\mathbf{B}_2=(0, b_2, 0)^T$ 和 $\mathbf{B}_3=(0, -b_2, 0)^T$ 。在局部坐标系 $Pxyz$ 中,点 P_i ($i=1,2,3$)坐标矢量可表示为 $\mathbf{p}_1=(b_3, 0, 0)^T$ 、 $\mathbf{p}_2=(-x_p, b_4, 0)^T$ 和 $\mathbf{p}_3=(-x_p, -b_4, 0)^T$ 。则在坐标系 $OXYZ$ 中,点 P_i ($i=1,2,3$)位置矢量 \mathbf{P}_i 可表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 \mathbf{T} ——变换矩阵

由于 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构中支链 $B_iC_iP_i$ ($i=1, 2, 3$) 皆分别受到 2 个相互平行的转动副约束。所以,支链上点 P_1 运动轨迹应位于 OXZ 平面内,支链中点 P_2 和点 P_3 运动轨迹应位于 OYZ 平面内。

根据前述分析,由式(1)可得

$$\begin{cases} y_p + n_j b_3 = 0 \\ x_p - n_i x_p + o_i b_4 = 0 \\ x_p - n_i x_p - o_i b_4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中 n_i, n_j ——坐标系 $Pxyz$ 中 x 轴单位主矢相对于坐标系 $OXYZ$ 中 X, Y 轴的方向余旋

o_i ——坐标系 $Pxyz$ 中 x 轴单位主矢相对于坐标系 $OXYZ$ 中 X 轴的方向余旋

取 $Z-Y-X$ 型欧拉角 (α, β, γ) ^[24] 表示动平台 $P_1P_2P_3$ 姿态,根据支链 $B_iC_iP_i$ ($i=1, 2, 3$) 各点 P_i 运动轨迹特点,化简式(2)可得

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad (3)$$

因此,可得到 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构运动特征为:动平台 6 个位姿变量 $x_p, y_p, z_p, \alpha, \beta, \gamma$ 中,存在 $\alpha \equiv 0, \beta \equiv 0$ 和 $\gamma \equiv 0$ 。所以,此并联机构拥有 1 个转动自由度和 2 个移动自由度,共 3 个自由度;并联机构 3 个自由度间无驱动约束关系,即 γ, z_p 和 x_p 之间无驱动耦合,有利于系统高精度控制。

2 机构运动学

设点 P_i ($i=1, 2, 3$) 在坐标系 $OXYZ$ 中坐标为 $(x_i, y_i, z_i)^T$,则由式(1)可得

$$\begin{cases} x_1 = x_p + b_3 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = z_p \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = b_4 \cos \gamma \\ z_2 = z_p + b_4 \sin \gamma \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = -b_4 \cos \gamma \\ z_3 = z_p - b_4 \sin \gamma \end{cases} \quad (6)$$

同时,若给定构件 B_iC_i 和 C_iP_i ($i=1, 2, 3$) 运动转角为 θ_i, α_i ,则点 P_i ($i=1, 2, 3$) 坐标 $(x_i, y_i, z_i)^T$ 也可通过支链 $B_iC_iP_i$ ($i=1, 2, 3$) 运动位姿关系表示为

$$\begin{cases} x_1 = l_{11} \cos \theta_1 + l_{12} \cos \alpha_1 + b_1 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = l_{11} \sin \theta_1 + l_{12} \sin \alpha_1 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = l_{21} \cos \theta_2 + l_{22} \cos \alpha_2 + b_2 \\ z_2 = l_{21} \sin \theta_2 + l_{22} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = l_{31} \cos \theta_3 + l_{32} \cos \alpha_3 - b_2 \\ z_3 = l_{31} \sin \theta_3 + l_{32} \sin \alpha_3 \end{cases} \quad (9)$$

联立式(4)~(6)和式(7)~(9)可得

$$\begin{cases} x_p + b_3 - b_1 = l_{11} \cos \theta_1 + l_{12} \cos \alpha_1 \\ z_p = l_{11} \sin \theta_1 + l_{12} \sin \alpha_1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} b_4 \cos \gamma - b_2 = l_{21} \cos \theta_2 + l_{22} \cos \alpha_2 \\ z_p + b_4 \sin \gamma = l_{21} \sin \theta_2 + l_{22} \sin \alpha_2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} b_2 - b_4 \cos \gamma = l_{31} \cos \theta_3 + l_{32} \cos \alpha_3 \\ z_p - b_4 \sin \gamma = l_{31} \sin \theta_3 + l_{32} \sin \alpha_3 \end{cases} \quad (12)$$

求解式(10)~(12)可得

$$\begin{cases} \theta_1 = 2 \arctan \frac{-z_p \pm \sqrt{(x_p + b_3 - b_1)^2 + z_p^2 - c_1^2}}{x_p + b_3 - b_1 - c_1} \\ \alpha_1 = \arctan \frac{z_p - l_{11} \sin \theta_1}{x_p + b_3 - b_1 - l_{11} \cos \theta_1} \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \theta_2 = 2 \arctan \frac{z_p + b_4 \sin \gamma \pm \sqrt{R_1}}{b_4 \cos \gamma - b_2 - c_2} \\ \alpha_2 = \arctan \frac{z_p + b_4 \sin \gamma - l_{21} \sin \theta_2}{b_4 \cos \gamma - b_2 - l_{21} \cos \theta_2} \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \theta_3 = 2 \arctan \frac{z_p - b_4 \sin \gamma \pm \sqrt{R_2}}{b_2 - b_4 \cos \gamma - c_3} \\ \alpha_3 = \arctan \frac{z_p - b_4 \sin \gamma - l_{31} \sin \theta_3}{b_2 - b_4 \cos \gamma - l_{31} \cos \theta_3} \end{cases} \quad (15)$$

其中 $R_1 = (b_4 \cos \gamma - b_2)^2 + (z_p + b_4 \sin \gamma)^2 - c_2^2$

$$R_2 = (b_2 - b_4 \cos \gamma)^2 + (z_p - b_4 \sin \gamma)^2 - c_3^2$$

$$c_1 = \frac{l_{12}^2 - z_p^2 - l_{11}^2 - (x_p + b_3 - b_1)^2}{2l_{11}}$$

$$c_2 = \frac{l_{22}^2 - l_{21}^2 - (b_4 \cos \gamma - b_2)^2 - (z_p + b_4 \sin \gamma)^2}{2l_{21}}$$

$$c_3 = \frac{l_{32}^2 - l_{31}^2 - (b_2 - b_4 \cos \gamma)^2 - (z_p - b_4 \sin \gamma)^2}{2l_{31}}$$

从式(13)~(15)可以看出,当已知 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构动平台运动位姿变量 γ, z_p 和 x_p 时,此并联机构存在 8 种运动学反解位形。可知,对于相同机器人操作任务或操作端运动轨迹,可以通过机器人机构驱动位形优选或轨迹优化达到改善机器人运动特性的目的。

3 机构动力学

假定 2-RRC/1-RRS 并联机器人机构中构件 B_iC_i 和 C_iP_i ($i=1, 2, 3$) 质量为 m_{i1} 和 m_{i2} ,各构件质

心皆处于其几何中心且质心坐标表示为 $(x_{i1}, y_{i1}, z_{i1})^T$ 和 $(x_{i2}, y_{i2}, z_{i2})^T$ 。在坐标系 $OXYZ$ 中, 构件 $B_i C_i$ 、 $C_i P_i$ 质心坐标以及动平台质心点 P 坐标可表达为(未给出的坐标值恒为0)

$$\begin{cases} x_{11} = \frac{1}{2}l_{11}\cos\theta_1 + b_1 \\ z_{11} = \frac{1}{2}l_{11}\sin\theta_1 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} x_{12} = l_{11}\cos\theta_1 + \frac{1}{2}l_{12}\cos\alpha_1 + b_1 \\ z_{12} = l_{11}\sin\theta_1 + \frac{1}{2}l_{12}\sin\alpha_1 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} y_{21} = \frac{1}{2}l_{21}\cos\theta_2 + b_2 \\ z_{21} = \frac{1}{2}l_{21}\sin\theta_2 \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} y_{22} = l_{21}\cos\theta_2 + \frac{1}{2}l_{22}\cos\alpha_2 + b_2 \\ z_{22} = l_{21}\sin\theta_2 + \frac{1}{2}l_{22}\sin\alpha_2 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} y_{31} = \frac{1}{2}l_{31}\cos\theta_3 - b_2 \\ z_{31} = \frac{1}{2}l_{31}\sin\theta_3 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} y_{32} = l_{31}\cos\theta_3 + \frac{1}{2}l_{32}\cos\alpha_3 - b_2 \\ z_{32} = l_{31}\sin\theta_3 + \frac{1}{2}l_{32}\sin\alpha_3 \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} x_p = l_{11}\cos\theta_1 + l_{12}\cos\alpha_1 + b_1 - b_3 \\ z_p = l_{11}\sin\theta_1 + l_{12}\sin\alpha_1 \end{cases} \quad (22)$$

2-RRC/1-RRS 并联机器人中构件 $B_i C_i$ 和 $C_i P_i$ ($i=1, 2, 3$) 质心速度分别为 $\mathbf{v}_{i1} = (\dot{x}_{i1}, \dot{y}_{i1}, \dot{z}_{i1})^T$ 和 $\mathbf{v}_{i2} = (\dot{x}_{i2}, \dot{y}_{i2}, \dot{z}_{i2})^T$, 以及绕各自质心转动惯量分别为 J_{i1} 和 J_{i2} ; 动平台质心线速度为 $\mathbf{v}_p = (\dot{x}_p, \dot{y}_p, \dot{z}_p)^T$, 角速度为 $\boldsymbol{\omega}_p = (\dot{\gamma}, \dot{\beta}, \dot{\alpha})^T$, 动平台质量为 m_0 , 动平台相对于坐标系 $Pxyz$ 的惯性矩阵为 \mathbf{I}_p , 对其质心主转动惯量分别为 J_x 、 J_y 和 J_z 。取图 1b 中 OXY 面为重力零势能面, 重力加速度为 g , 则系统动能 T 和势能 V 可表示为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 m_{ij} \mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{v}_{ij} + \frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}_p^T \mathbf{v}_p + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (J_{i1} \dot{\theta}_i^2 + J_{i2} \dot{\alpha}_i^2) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_p^T \mathbf{I}_p \boldsymbol{\omega}_p \quad (23)$$

$$V = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 m_{ij} g z_{ij} + m_0 g z_p \quad (24)$$

式(16)~(22)分别对时间 t 求导, 代入式(23)可得

$$T = \frac{1}{2} \hat{J}_{11} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \hat{J}_{22} \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \hat{J}_{33} \dot{\theta}_3^2 + \hat{J}_{12} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \hat{J}_{13} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \hat{J}_{23} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \hat{J}_{11} &= J_{11} + J_{12} A_1^2 + J_{22} B_1^2 + J_{32} C_1^2 + m_{12} l_{11}^2 + \\ &\frac{1}{4} (m_{11} l_{11}^2 + m_{12} l_{12}^2 A_1^2 + m_{22} l_{22}^2 B_1^2 + m_{32} l_{32}^2 C_1^2) + \\ &m_0 l_{12}^2 A_1^2 + J_x F_1^2 + m_{12} l_{11} l_{12} A_1 \cos(\alpha_1 - \theta_1) + \\ &2m_0 l_{11} l_{12} A_1 \cos(\alpha_1 - \theta_1) + m_0 l_{11}^2 \\ \hat{J}_{22} &= J_{21} + J_{12} A_2^2 + J_{22} B_2^2 + J_{32} C_2^2 + m_{22} l_{21}^2 + \\ &\frac{1}{4} (m_{21} l_{21}^2 + m_{12} l_{12}^2 A_2^2 + m_{22} l_{22}^2 B_2^2 + m_{32} l_{32}^2 C_2^2) + \\ &m_0 l_{12}^2 A_2^2 + J_x F_2^2 + m_{22} l_{21} l_{22} B_2 \cos(\alpha_2 - \theta_2) \\ \hat{J}_{33} &= J_{31} + J_{12} A_3^2 + J_{22} B_3^2 + J_{32} C_3^2 + m_{32} l_{31}^2 + \\ &\frac{1}{4} (m_{31} l_{31}^2 + m_{12} l_{12}^2 A_3^2 + m_{22} l_{22}^2 B_3^2 + m_{32} l_{32}^2 C_3^2) + \\ &m_0 l_{12}^2 A_3^2 + J_x F_3^2 + m_{32} l_{31} l_{32} C_3 \cos(\alpha_3 - \theta_3) \\ \hat{J}_{12} &= J_{12} A_1 A_2 + J_{22} B_1 B_2 + J_{32} C_1 C_2 + J_x F_1 F_2 + \\ &\frac{1}{4} (m_{12} l_{12}^2 A_1 A_2 + m_{22} l_{22}^2 B_1 B_2 + m_{32} l_{32}^2 C_1 C_2) + \\ &m_0 l_{12}^2 A_1 A_2 + \frac{1}{2} m_{12} l_{11} l_{12} A_2 \cos(\alpha_1 - \theta_1) + \\ &\frac{1}{2} m_{22} l_{21} l_{22} B_1 \cos(\alpha_2 - \theta_2) + \\ &m_0 l_{11} l_{12} A_2 \cos(\alpha_1 - \theta_1) \\ \hat{J}_{13} &= J_{12} A_1 A_3 + J_{22} B_1 B_3 + J_{32} C_1 C_3 + J_x F_1 F_3 + \\ &\frac{1}{4} (m_{12} l_{12}^2 A_1 A_3 + m_{22} l_{22}^2 B_1 B_3 + m_{32} l_{32}^2 C_1 C_3) + \\ &m_0 l_{12}^2 A_1 A_3 + \frac{1}{2} m_{12} l_{11} l_{12} A_3 \cos(\alpha_1 - \theta_1) + \\ &\frac{1}{2} m_{32} l_{31} l_{32} C_1 \cos(\alpha_3 - \theta_3) + \\ &m_0 l_{11} l_{12} A_3 \cos(\alpha_1 - \theta_1) \\ \hat{J}_{23} &= J_{12} A_2 A_3 + J_{22} B_2 B_3 + J_{32} C_2 C_3 + J_x F_2 F_3 + \\ &\frac{1}{4} (m_{12} l_{12}^2 A_2 A_3 + m_{22} l_{22}^2 B_2 B_3 + m_{32} l_{32}^2 C_2 C_3) + \\ &m_0 l_{12}^2 A_2 A_3 + \frac{1}{2} m_{22} l_{21} l_{22} B_3 \cos(\alpha_2 - \theta_2) + \\ &\frac{1}{2} m_{32} l_{31} l_{32} C_2 \cos(\alpha_3 - \theta_3) \end{aligned}$$

$$A_i = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \theta_i} \quad B_i = \frac{\partial \alpha_2}{\partial \theta_i} \quad C_i = \frac{\partial \alpha_3}{\partial \theta_i} \quad D_i = \frac{\partial x_p}{\partial \theta_i}$$

$$E_i = \frac{\partial z_p}{\partial \theta_i} \quad F_i = \frac{\partial \gamma}{\partial \theta_i} \quad (i=1, 2, 3)$$

式中 \hat{J}_{11} 、 \hat{J}_{22} 、 \hat{J}_{33} 、 \hat{J}_{12} 、 \hat{J}_{13} 、 \hat{J}_{23} ——机器人系统转动惯量

将式(24)、(25)代入 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = \tau_i \quad (i=1, 2, 3)$$

式中 τ ——第 i 个广义坐标的广义力并化简, 可以得到

$$\begin{aligned} & \hat{J}_{11} \ddot{\theta}_1 + \hat{J}_{12} \ddot{\theta}_2 + \hat{J}_{13} \ddot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1^2 + \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\ & \left(\frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_2^2 + \left(\frac{\partial \hat{J}_{13}}{\partial \theta_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{33}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_3^2 + \\ & \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \left(\frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \hat{J}_{13}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial \hat{J}_{23}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \\ & \left(\frac{1}{2} m_{11} + m_{12} + m_0 \right) gl_{11} \cos \theta_1 + \\ & \left(\frac{1}{2} m_{12} + m_0 \right) gl_{12} A_1 \cos \alpha_1 + \frac{1}{2} m_{22} gl_{22} B_1 \cos \alpha_2 + \\ & \frac{1}{2} m_{32} gl_{32} C_1 \cos \alpha_3 = \tau_1 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \hat{J}_{12} \ddot{\theta}_1 + \hat{J}_{22} \ddot{\theta}_2 + \hat{J}_{23} \ddot{\theta}_3 + \left(\frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \theta_2} \right) \dot{\theta}_1^2 + \\ & \left(\frac{\partial \hat{J}_{23}}{\partial \theta_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{33}}{\partial \theta_2} \right) \dot{\theta}_3^2 + \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \\ & \left(\frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \theta_3} - \frac{\partial \hat{J}_{13}}{\partial \theta_2} + \frac{\partial \hat{J}_{23}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2^2 + \\ & \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left(\frac{1}{2} m_{12} + m_0 \right) gl_{12} A_2 \cos \alpha_1 + \\ & \left(\frac{1}{2} m_{21} + m_{22} \right) gl_{21} \cos \theta_2 + \frac{1}{2} m_{22} gl_{22} B_2 \cos \alpha_2 + \\ & \frac{1}{2} m_{32} gl_{32} C_2 \cos \alpha_3 = \tau_2 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \hat{J}_{13} \ddot{\theta}_1 + \hat{J}_{23} \ddot{\theta}_2 + \hat{J}_{33} \ddot{\theta}_3 + \left(\frac{\partial \hat{J}_{13}}{\partial \theta_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{11}}{\partial \theta_3} \right) \dot{\theta}_1^2 + \\ & \left(\frac{\partial \hat{J}_{23}}{\partial \theta_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{22}}{\partial \theta_3} \right) \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{J}_{33}}{\partial \theta_3} \dot{\theta}_3^2 + \\ & \left(\frac{\partial \hat{J}_{13}}{\partial \theta_2} - \frac{\partial \hat{J}_{12}}{\partial \theta_3} + \frac{\partial \hat{J}_{23}}{\partial \theta_1} \right) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{\partial \hat{J}_{33}}{\partial \theta_1} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 + \\ & \frac{\partial \hat{J}_{33}}{\partial \theta_2} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \left(\frac{1}{2} m_{12} + m_0 \right) gl_{12} A_3 \cos \alpha_1 + \\ & \frac{1}{2} m_{22} gl_{22} B_3 \cos \alpha_2 + \left(\frac{1}{2} m_{31} + m_{32} \right) gl_{31} \cos \theta_3 + \\ & \frac{1}{2} m_{32} gl_{32} C_3 \cos \alpha_3 = \tau_3 \end{aligned} \quad (28)$$

同时, 2-RRC/1-RRS 并联机器人系统驱动能耗 E 可以表示为

$$E = \int_{t_0}^{t_f} \left(\sum_{i=1}^3 |\tau_i \dot{\theta}_i| \right) dt \quad (29)$$

式中 t_0 ——机器人运动起始时刻

t_f ——机器人运动终止时刻

4 算例

给定 2-RRC/1-RRS 并联机器人中所有构件材质为合金钢, 材料密度 ρ 为 7 700 kg/m³; 支链中构件长度 $l_{i1} = l_{i2} = 0.20$ m ($i = 1, 2, 3$), 矩形截面尺寸为 0.02 m × 0.01 m; 基座及动平台结构参数 $b_1 =$

0.22 m, $b_2 = b_4 = 0.12$ m, $b_3 = 0.15$ m; 动平台质量参数 $m_0 = 8.5$ kg, $J_x = 4.5 \times 10^{-2}$ kg·m², $J_y = 1.2 \times 10^{-1}$ kg·m², $J_z = 1.7 \times 10^{-1}$ kg·m²; 支链下连杆质量参数为 $m_{11} = m_{21} = m_{31} = 0.35$ kg, $J_{11} = J_{21} = J_{31} = 1.3 \times 10^{-3}$ kg·m²; 支链上连杆质量参数为 $m_{12} = 0.34$ kg, $m_{22} = m_{32} = 0.38$ kg, $J_{12} = 1.2 \times 10^{-3}$ kg·m², $J_{22} = J_{32} = 1.6 \times 10^{-3}$ kg·m²; 时间 $T_1 = 20$ s。

机器人操作端运动规律为

$$\begin{cases} x_p = -0.1s(t) + 0.05 \\ z_p = 0.12s(t) + 0.18 \\ \gamma = \pi(s(t) - 0.5)/9 \end{cases} \quad (30)$$

其中 $s(t) = \frac{t}{T_1} - \frac{1}{2\pi} \sin \frac{2\pi t}{T_1}$ ($0 \leq t \leq T_1$)

式中 $s(t)$ ——摆线运动函数

对于给定的机器人操作端运动规律, 2-RRC/1-RRS 并联机器人动平台运动参量位移变化曲线如图 2 所示。 x_p 运动区间为 $[-50$ mm, 50 mm], z_p 运动区间为 $[180$ mm, 300 mm], γ 运动区间为 $[-0.17$ rad, 0.17 rad]。由于采用摆线运动函数操作运动轨线, 机器人运动起始和终止时刻轨迹曲线都比较平滑, 避免了机器人运行过程中产生刚性冲击或柔性冲击。

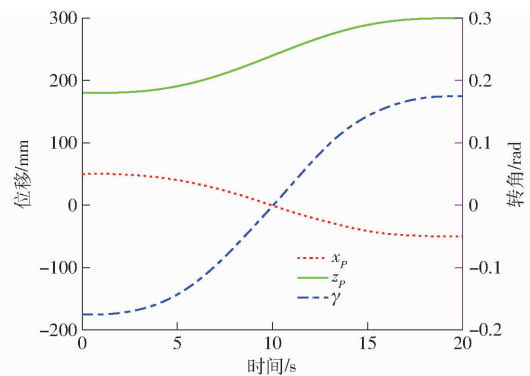


图 2 动平台位移曲线

Fig. 2 Displacement curves of moving platform

驱动构件 $B_i C_i$ ($i = 1, 2, 3$) 运动转角变化曲线, 如图 3 所示, 对应的运动角速度变化曲线, 如图 4 所示。 θ_1 运动变化范围为 $[0.580$ rad, 1.320 rad], 而 θ_2 、 θ_3 运动变化范围分别为 $[0.420$ rad, 0.936 rad] 和 $[0.517$ rad, 0.766 rad]。构件 $B_1 C_1$ 运动角速度 ω_1 最大值为 0.070 9 rad/s, 构件 $B_2 C_2$ 、 $B_3 C_3$ 运动角速度 ω_2 与 ω_3 最大值为 0.051 9、0.024 4 rad/s。

机器人驱动构件 $B_i C_i$ ($i = 1, 2, 3$) 转矩变化曲线, 如图 5 所示, 各个驱动转矩见表 1。驱动转矩 τ_1 最大值为 0.565 9 N·m, 最小值为 0.166 7 N·m, 波动率为 3.395 倍; 驱动转矩 τ_2 最大值为 18.960 5 N·m, 最小值为 11.272 4 N·m, 波动率为 1.677 倍; 驱动转

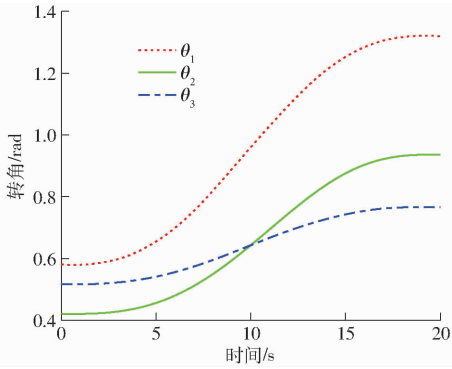
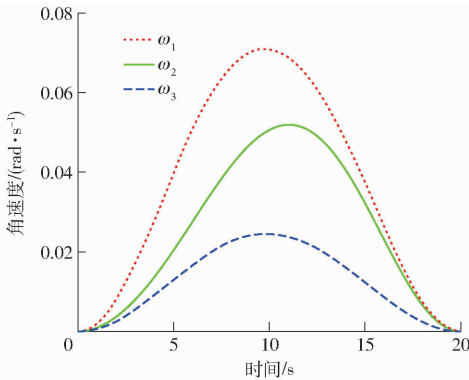
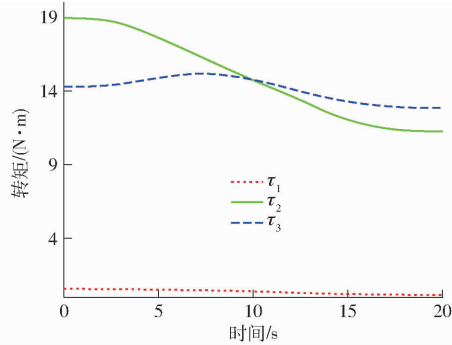
图3 构件 B_iC_i ($i=1,2,3$) 转角变化曲线Fig.3 Angle change curve of B_iC_i ($i=1,2,3$)图4 构件 B_iC_i ($i=1,2,3$) 角速度曲线Fig.4 Angular velocity curves of B_iC_i ($i=1,2,3$)

图5 驱动转矩变化曲线

Fig.5 Change curves of driving torque

矩 τ_3 最大值为 15.174 1 N·m, 最小值为 12.885 0 N·m, 波动率为 1.178 倍。对于给定的机器人运动规律, 驱动构件 B_1C_1 电机能耗为 0.284 3 J, 驱动构件 B_2C_2 电机能耗为 7.475 2 J, 驱动构件 B_3C_3 电机能耗为 3.596 0 J, 系统总能耗为 11.355 5 J。可见, 通过了解 2-RRC/1-RRS 并联机器人驱动特性, 可为机器人系统电机选型和工程应用的优化提供科学依据。

表1 驱动转矩

Tab.1 Driving torque		N·m	
项目	$ \tau_1 $	$ \tau_2 $	$ \tau_3 $
最大值	0.565 9	18.960 5	15.174 1
最小值	0.166 7	11.272 4	12.885 0
平均值	0.375 5	14.901 5	14.129 0

由式(26)~(28)可知, 2-RRC/1-RRS 并联机器人各个驱动构件驱动转矩不仅与变量 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 及其导数有关, 而且与转动惯量 \hat{J}_{11} 、 \hat{J}_{22} 、 \hat{J}_{33} 、 \hat{J}_{12} 、 \hat{J}_{13} 和 \hat{J}_{23} 及波动密切相关。分析及优化前述转动惯量参量变化特性, 对改善机器人系统动态特性以及降低驱动能耗都具有重要意义。对于给定机器人操作端运动规律, 转动惯量 \hat{J}_{11} 、 \hat{J}_{22} 、 \hat{J}_{33} 、 \hat{J}_{12} 、 \hat{J}_{13} 和 \hat{J}_{23} 变化曲线如图6所示。转动惯量如表2所示。 \hat{J}_{22} 变化比较剧烈, 且其最大值达到 0.752 kg·m², 这主要源于 \hat{J}_{22} 受到动平台质量 m_0 影响以及机器人运动位形的作用。 \hat{J}_{12} 和 \hat{J}_{13} 取值及波动都比较小, 表明变量 θ_1 与 θ_2 、 θ_3 及其对应支链之间的耦合作用较弱。显然, 这些转动惯量与机器人结构尺寸、各构件质量及其分布等密切相关, 且随着机构运动轨迹位形改变而变化, 从而决定了机器人运动学和动力学特性。所以, 在机器人设计以及运动规划时, 需充分考虑机器人结构质量分布和运动轨迹问题, 以便有效达到优化机器人动态特性的目的。

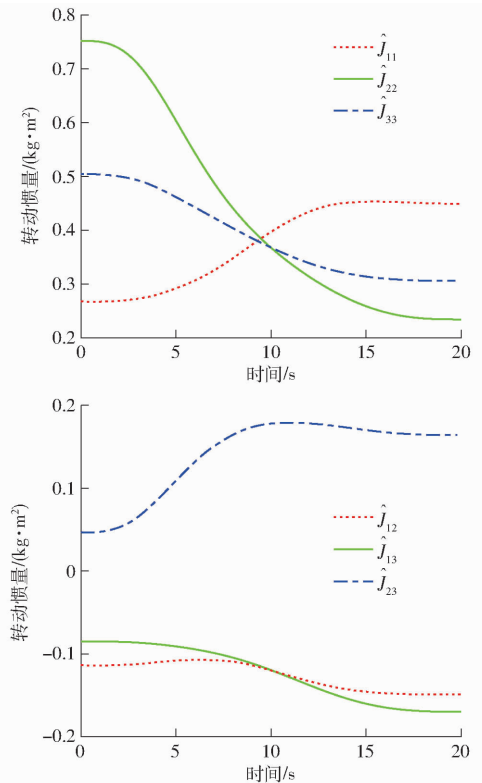


图6 转动惯量变化曲线

Fig.6 Change curves of moment of inertia

表2 转动惯量

Tab.2 Moment of inertia		kg·m ²				
项目	$ \hat{J}_{11} $	$ \hat{J}_{22} $	$ \hat{J}_{33} $	$ \hat{J}_{12} $	$ \hat{J}_{13} $	$ \hat{J}_{23} $
最大值	0.453	0.752	0.504	0.149	0.170	0.179
最小值	0.268	0.235	0.306	0.107	0.085	0.047
平均值	0.375	0.432	0.388	0.126	0.125	0.140

5 结束语

对 2 - RRC/1 - RRS 并联机器人结构特性进行了分析,揭示了机构中各运动参量间的耦合关系;分析了 2 - RRC/1 - RRS 并联机器人机构运动学参量关系,给出了机器人运动学反解解析表达式;利用

Lagrange 方程法推导了 2 - RRC/1 - RRS 并联机器人机构动力学模型,为机器人动力学控制奠定了基础;通过算例讨论了 2 - RRC/1 - RRS 并联机器人运动学和动力学特性,探明了机器人动态特征及其变化规律,为 2 - RRC/1 - RRS 并联机器人产品开发奠定了理论依据。

参 考 文 献

- [1] WEI Jun, QIU Chen, DAI Jiansheng. Configuration switch and path selection between Schönflies motion and non-Schönflies motion based on quotient manifold of novel reconfigurable parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 180(2): 105153.
- [2] LIANG Xu, ZENG Xiang, LI Guotao, et al. Kinematic analysis of three redundant parallel mechanisms for fracture reduction surgery[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 188(10): 105400.
- [3] 李菊, 余俊杰, 沈惠平, 等. 单回路空间两平移并联机构拓扑设计与尺度优化[J]. 农业机械学报, 2024, 55(9): 470 - 480.
LI Ju, SHE Junjie, SHEN Huiping, et al. Topology design, dimension optimization and workspace analysis of spatial single-loop two-translation parallel mechanisms[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(9): 470 - 480. (in Chinese)
- [4] 徐冬梅, 刘湘龙, 于思淼, 等. 面向狭长空间的三自由度并联机器人设计与建模[J]. 农业机械学报, 2024, 55(1): 426 - 435.
XU Dongmei, LIU Xianglong, YU Simiao, et al. Design and modeling of novel three degree-of-freedom parallel robot for narrow space[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(1): 426 - 435. (in Chinese)
- [5] 刘晓飞, 刘洋, 何阳, 等. 2RPU + 2UPR + RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化[J]. 农业机械学报, 2023, 54(3): 440 - 450.
LIU Xiaofei, LIU Yang, HE Yang, et al. Kinematic analysis and dimension optimization of multi-redundantly actuated parallel mechanism 2RPU + 2UPR + RPR[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(1): 440 - 450. (in Chinese)
- [6] SHEN Feiyang, YANG Shuofei, WANG Hanyan, et al. Twist and finite twist analysis of 2UPR - SPR parallel mechanism based upon screw theory[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 184(6): 105276.
- [7] SHI Hanqing, ZHANG Jinzhu, WANG Tao, et al. Mechanism design and kinematic analysis of a bioinspired 5 - DOF parallel driving mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 181(3): 105178.
- [8] KONG Xianwen, JIN Yan. Type synthesis of 3 - DOF multi-mode translational/spherical parallel mechanisms with lockable joints[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 93(11): 163 - 174.
- [9] HUNT K H. Structural kinematic of in-parallel-actuated robot arms[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design, 1983, 105:705 - 712.
- [10] LEE K M, SHAH D K. Dynamic analysis of a three-degrees-of-freedom in-parallel actuated manipulator[J]. IEEE Journal of Robotics and Automation, 1988, 4(3):361 - 367.
- [11] GOSSELIN C M, ANGELES J. The optimum kinematic design of a planar three-degree-of freedom parallel manipulator[J]. ASME Journal of Mechanisms Transmissions and Automation in Design, 1988, 110(1):35 - 41.
- [12] FANG Yuefa, HUANG Zhen. Kinematic of a three- degree-freedom in-parallel actuated manipulator mechanism [J]. Mechanism and Machine Theory, 1997, 32(7): 789 - 796.
- [13] CARRETERO J A, PODHORODESKI R P, NAHON M A, et al. Kinematic analysis and optimization of a new three degree-of-freedom spatial parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(3): 17 - 24.
- [14] WANG Jiegao, GOSSELIN C M. Static balancing of spatial three-degree-of-freedom parallel mechanisms[J]. Mechanism and Machine Theory, 1999, 34(3):437 - 452.
- [15] 赵铁石, 黄真. 一种三维移动并联平台机构的运动学分析[J]. 中国机械工程, 2001, 12(6): 613 - 616.
ZHAO Tieshi, HUANG Zhen. Kinematics of a three-dimension translational parallel platform mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2001, 12(6):613 - 616. (in Chinese)
- [16] 刘善增, 余跃庆, 倡国宁, 等. 3 自由度并联机器人的运动学与动力学分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(8):11 - 17.
LIU Shanzeng, YU Yueqing, SI Guoning, et al. Kinematic and dynamic analysis of a three-degree-of-freedom parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(8):11 - 17. (in Chinese)
- [17] 刘善增, 余跃庆, 刘庆波, 等. 3 - RRC 并联机器人的动力学分析[J]. 机械工程学报, 2009, 45(5): 220 - 224.
LIU Shanzeng, YU Yueqing, LIU Qingbo, et al. Dynamic analysis of 3 - RRC parallel manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2009, 45(5): 220 - 224. (in Chinese)

- [18] 刘善增, 朱真才, 余跃庆, 等. 空间刚柔耦合并联机构系统的频率特性分析[J]. 机械工程学报, 2011, 47(23): 39-48.
LIU Shanzeng, ZHU Zhencai, YU Yueqing, et al. Frequency analysis of a spatial rigid-flexible coupling parallel manipulator [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2011, 47(23): 39-48. (in Chinese)
- [19] LIU Shanzeng, DAI Jiansheng, SHEN Gang, et al. Dynamic analysis of spatial parallel robot with rigid and flexible couplings [J]. Journal of Central South University of Technology, 2017, 24(4): 840-853.
- [20] 李剑锋, 徐成辉, 陶春静, 等. 基于3-UPS/RRR的并联踝关节康复机构及其性能分析[J]. 自动化学报, 2016, 42(12): 1794-1807.
LI Jianfeng, XU Chenghui, TAO Chunjing, et al. A parallel ankle rehabilitation mechanism and its performance analysis based on 3-UPS/RRR [J]. ACTA Automatica Sinica, 2016, 42(12): 1794-1807. (in Chinese)
- [21] 张俊, 蒋舒佳, 池长城. 2UPR&2RPS型冗余驱动并联机器人的运动学标定[J]. 机械工程学报, 2021, 57(15): 62-70.
ZHANG Jun, JIANG Shujia, CHI Changcheng. Kinematic calibration of a 2UPR&2RPS redundantly actuated parallel robot [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(15): 62-70. (in Chinese)
- [22] LIU Xinjun, HAN Gang, XIE Fugui, et al. A novel acceleration capacity index based on motion/force transmissibility for high-speed parallel robots [J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 126(8): 155-170.
- [23] 张惠普, 汪满新. 4-RR(SS)₂高速并联机器人动力尺度综合[J]. 机械工程学报, 2022, 58(1): 29-40.
ZHANG Huipu, WANG Manxin. Dynamic dimension synthesis of 4-RR(SS)₂ high speed parallel robot [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(1): 29-40. (in Chinese)
- [24] 刘善增. 少自由度并联机器人机构动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2015.

(上接第768页)

- [23] 孙优兰, 黄永光, 朱晓春, 等. 清酱香型白酒特征风味化合物分析[J]. 食品科学, 2020, 41(24): 199-208.
SUN Youlan, HUANG Yongguang, ZHU Xiaochun, et al. Analysis of characteristic flavor compounds in light-sauce aroma type Baijiu [J]. Food Science, 2020, 41(24): 199-208. (in Chinese)
- [24] 张河云. 酸类物质在浓香型白酒中的作用研究[D]. 天津: 天津科技大学, 2023.
ZHANG Heyun. Research on the contribution of acids compounds in strong aroma Baijiu [D]. Tianjin: Tianjin University of Science and Technology, 2023. (in Chinese)
- [25] 江建军, 杨官荣. 白酒品酒师教程[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- [26] LOPEZ L J A, CORTES R A, HERNANDEZ S M F, et al. Determination of the energy consumption trend of a wine company as a key element for sustainable innovative development [C] // 2020 IEEE International Conference on Engineering Veracruz (ICEV), 2020: 1-4.
- [27] 杨学山, 李洁春, 杨柳, 等. 酿酒酵母抗氧化活性与发酵香气化合物研究[J]. 农业机械学报, 2023, 54(9): 423-430.
YANG Xueshan, LI Jiechun, YANG Liu, et al. Antioxidant activity and fermentation aroma compounds of *Saccharomyces cerevisiae* in simulated wine [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(9): 423-430. (in Chinese)