doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.12.074

一种含过约束支链的多模式移动并联机构设计与仿真

张春燕[1]　夏宇昂[1]　于欣悦[2]

(1.上海工程技术大学机械与汽车工程学院,上海 201620;2.蔚来汽车(安徽)有限公司,合肥 230061)

摘要:本文设计了一种含过约束支链的多模式移动并联机构,并对其自由度以及运动学进行了分析。根据分析约束支链与平台间支链连接情况,对其进行机构构型设计,得到一种含约束支链的多模式移动并联机构,并对引入的约束支链进行过约束支链判定。采用杆组等效法对机构四边形滚动模式及球形滚动模式进行自由度分析,对机构各模式进行运动学分析,计算求解各点位置坐标。对比机构含和不含过约束支链,根据 ZMP 理论求解质心坐标,对比机构含和不含过约束支链运动时 y_{ZMP} 与角度之间的关系,利用 Matlab 对机构运动时质心情况进行对比。最后,利用 ADAMS 对机构进行运动学仿真,并制作样机对机构运动及各模式实现进行验证。

关键词:移动并联机构;过约束支链;多模式;运动学

中图分类号:TH112　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1298(2025)12-0799-12　　**OSID**:

Design and Kinematic Analysis of Mobile Parallel Mechanism with Over Constrained Branch Chains

ZHANG Chunyan[1]　XIA Yuang[1]　YU Xinyue[2]

(1. *School of Mechanical and Automotive Engineering*, *Shanghai University of Engineering Science*, *Shanghai* 201620, *China*
2. *Weilai Automobile*(*Anhui*) *Co.*, *Ltd.*, *Hefei* 230061, *China*)

Abstract: A multi-mode mobile parallel mechanism with over constrained branch chains was designed, and its degrees of freedom and kinematics were deeply analyzed. When exploring the motion of the parallel mechanism, the influence of the over constrained branch chain on its motion stability was studied, and the motion simulation and physical production were carried out to verify the motion of the mechanism and the realization of each mode. Firstly, according to the analysis of the connection between the constrained branch chain and the platform branch chain, a multi-mode mobile parallel mechanism with constrained branch chain was obtained according to its configuration design. The degree of freedom of the two modes of the mechanism, quadrilateral rolling mode and spherical rolling mode, was analyzed by means of the bar group model. The comparative analysis of the mechanism with or without over constrained branch chains was carried out, the centroid coordinates were solved according to ZMP theory, the relationship between the mechanism with or without over constrained branch chains and the angle was compared and analyzed, and Matlab was used to carry out comparative analysis of the centroid situation of the mechanism with motion. Finally, the kinematic simulation of the mechanism was carried out by ADAMS, and the prototype was made to verify the movement of the mechanism and the realization of each mode.

Key words: mobile parallel mechanism; over constrained branch chain; multi-mode; kinematic

0　引言

过约束机构具有刚度大、结构简单、精度高等优点[1-2],在工程中得到广泛应用。同一构件受到 2 个或 2 个以上相同性质的约束,即说明该构件受到过度约束,称为过约束[3]。机构中存在公共约束或过约束的机构称为过约束机构[4]。最早的过约束机构是 SARRUS 提出的经典 Sarrus 连杆机构[5],

收稿日期:2024-08-28　修回日期:2024-09-28

基金项目:国家自然科学基金项目(52005317)

作者简介:张春燕(1980—),女,教授,博士,主要从事机器人机构学研究,E-mail:cyzhang@sues.edu.cn

之后出现了对空间单闭环过约束机构研究，如 Bennett 4R 连杆机构、Bricard 6R 连杆机构等。

机构中引入过约束特性对机构性能会有一定的影响，许多学者对此做了大量研究。刘晓飞等[6]对 6PUS + UPU 与 6PUS 并联机构进行动力学对比，证明约束分支为无质量杆时可增加提高并联机构动力学性能；徐郑和[7]通过对比 2RPU/UPR/RPR + R + P 与 2RPU/UPR + R + P 机器人，发现含有过约束的机构具有更良好的刚度性能；文献[8 - 10]利用过约束并联机构具有较高刚度的特点，将其应用在天线机构中；胡波等[11]提出了一种过约束 2RPU + UPU 机构，该机构 2 个 RPU 分支提供过约束，提高了机构动力学性能。由此可见，在机构中引入过约束会使机构刚度等性能得到显著提升，但对于是否提高机构运动稳定性有待进一步研究。尽管有些学者通过设计多闭环类机构增加其稳定性，荀致远等[12]设计的空间三正交平行四边形滚动机构，WEI 等[13]设计的球形滚动机构，GAO 等[14]设计的含有规则三角双锥的新型耦合机构，但以上机构为单一运动模式，不能适用多地形，无法根据工况进行模式间切换[15 - 21]。

本文根据约束支链与平台均无连接的情况，以四杆机构及约束支链为本体，进行机构构型设计，并对设计机构的约束支链进行过约束判定，探究过约束支链对多模式移动并联机构稳定性的影响。对机构各运动模式进行运动学、稳定性分析，以证明含过约束支链的多模式移动并联机构更具稳定性，且通过仿真及样机制作对机构运动、各模式实现进行验证。

1 机构分析

1.1 机构设计

一般并联机构由动、定平台及平台间支链构成[22 - 23]，将约束支链引入机构中时，如添加 1 条约束支链与平台直接连接，则会直接对平台产生过约束作用，因此，本文约束支链两端与平台均无连接。图 1 为约束支链与平台间支链连接示意图。

根据图 1 约束支链与平台均无连接的情况，以四杆机构为本体进行机构构型设计，引入约束支链，得到含约束支链的多模式移动并联机构，进行过约束支链判断，若为过约束支链，则得到含过约束支链的多模式移动并联机构。图 2 为本文机构设计流程图。

图 3 为机构设计演化图。以四杆机构为本体进行部分机构初步构型，为设计一种空间机构，以 2 个四杆正交机构为本体，构成图 3a 所示四杆相交机

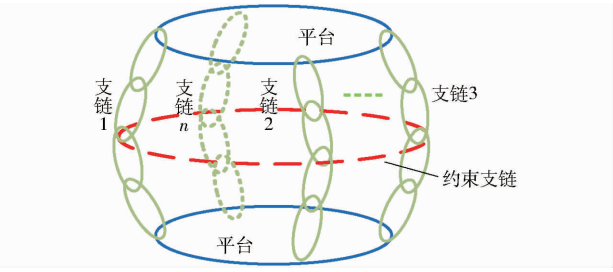


图 1 约束支链与平台间支链连接示意图

Fig. 1 Diagram of connection between constrained branch chain and platform branch chain

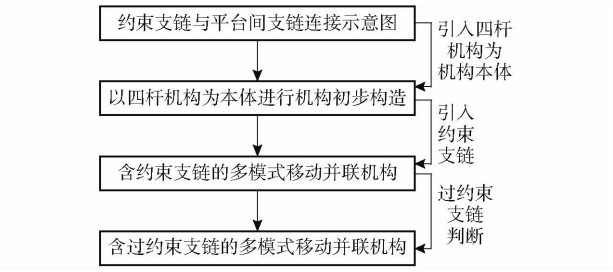


图 2 机构设计流程图

Fig. 2 Mechanism design flowchart

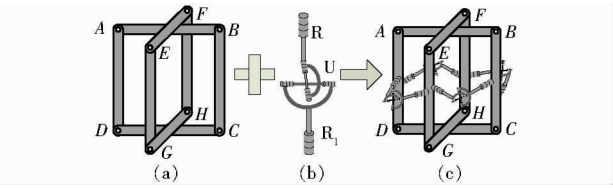


图 3 机构设计演化图

Fig. 3 Mechanism design evolution diagram

构，引入图 3b 所示约束支链 RUR_1（下标 1 表示两转动副轴线相互平行），其连接方式与图 2 一致，构成图 3c 所示衍生机构。该机构由平台、n 条支链及约束支链构成，约束支链与平台均无连接。依此进行机构构型设计。

1.2 移动并联机构过约束判定理论

并联机构本质是一组空间多环机构，由动、定平台及 n 个杆组分支组成。如图 4 所示，当并联机构移动时，与地面接触杆组为静平台，移动杆组称为动平台，移动过程中并联机构的约束情况由杆组参数矩阵[24]来判断。在图 4 定平台建立坐标系，任一杆组分支末端可用杆组参数来表示，即

$$G = (\alpha \quad \beta \quad \gamma; x \quad y \quad z) \tag{1}$$

式中 α、β、γ——X、Y、Z 方向角位移

x、y、z——X、Y、Z 方向位移

当 α、β、γ、x、y、z 中有零值时，表示这个方向存在约束力或约束力偶。所有支链杆组参数组成杆组参数矩阵表示为

$$\boldsymbol{M} = [\boldsymbol{R}_x \quad \boldsymbol{R}_y \quad \boldsymbol{R}_z \quad \boldsymbol{T}_x \quad \boldsymbol{T}_y \quad \boldsymbol{T}_z] \tag{2}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_x = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_n] \quad \boldsymbol{R}_y = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]$$

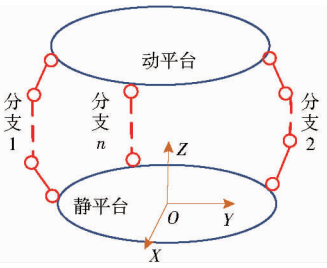


图 4　一般并联机构结构简图

Fig. 4　General structure diagram of parallel mechanism

$$\boldsymbol{R}_z=[\gamma_1\quad\gamma_2\quad\cdots\quad\gamma_n]\quad\boldsymbol{T}_x=[x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n]$$
$$\boldsymbol{T}_y=[y_1\quad y_2\quad\cdots\quad y_n]\quad\boldsymbol{T}_z=[z_1\quad z_2\quad\cdots\quad z_n]$$

式中　$\boldsymbol{R}_x$、$\boldsymbol{R}_y$、$\boldsymbol{R}_z$——所有支链在 X、Y、Z 方向角列向量

$\boldsymbol{T}_x$、$\boldsymbol{T}_y$、$\boldsymbol{T}_z$——所有支链在 X、Y、Z 方向线列向量

基点位移参数 $O_B=\bigcap_{k=1}^{L}G_k^{gz}$。

角列向量或线列向量中，如果存在 2 个及以上零元素，称其为多零角列向量或多零线列向量。若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中存在多零角列向量，即表示零元素对应的方向上存在过约束力偶；若存在多零线列向量，满足共轴、共面平行、空间平行等几何条件，则表示存在过约束。若矩阵中不含有多零列向量，则说明不存在过约束。

在判定机构中是否存在过约束前，首先机构需满足基本条件：①必须是闭合环路，串联链中不存在过约束。②研究的支链约束螺旋存在线性相关关系。③将串联支链与构件/平台重新连接时，会存在过约束。

1.3　含有约束支链多模式移动并联机构

依据上述设计方法和过约束判定理论，设计图 5 所示的含过约束支链的多模式移动并联机构。该机构由 32 个杆件、28 个转动副、12 个 U 副、2 个平台构成，在图 5a 中，2 个杆件通过中心运动副连接构成 1 个构件，用于连接约束支链与平台间的支链，如图 6 所示，该机构中包含 4 个构件。

标记 12 个 U 副分别用 $U_i(i=1,2,\cdots,12)$ 表示，2 个平台为 A、B，4 个构件标记为 C、D、E、F。与平台 A、B 连接转动副表示为 A_m、$B_m(m=1,2,3,4)$，与构件相关的转动副表示为 $I_m(I=C,D,E,F,m=1,2,\cdots,5)$。该机构初始时 $l_{U1U3}=l_{U2U4}=l_{U5U8}=l_{U6U7}=l_{U5U6}=l_{U8U7}=l_{U9U11}=l_{U10U12}=3l$，且相邻两支链互相垂直，故机构初始位置时四边形 $U_1U_9U_{11}U_3$、四边形 $U_2U_{10}U_{12}U_4$、四边形 $U_5U_6U_7U_8$ 均为正方形。

1.4　机构过约束判断

首先对机构整体进行过约束判断，根据机构中过约束存在基本条件进行环路划分[25]，如表 1 所示，可分为环路 $BU_{10}DU_6EU_{11}B$、DU_2AU_3E、BU_9CU_5D、CU_1A、$BU_{12}FU_8C$、FU_4A、EU_7F。

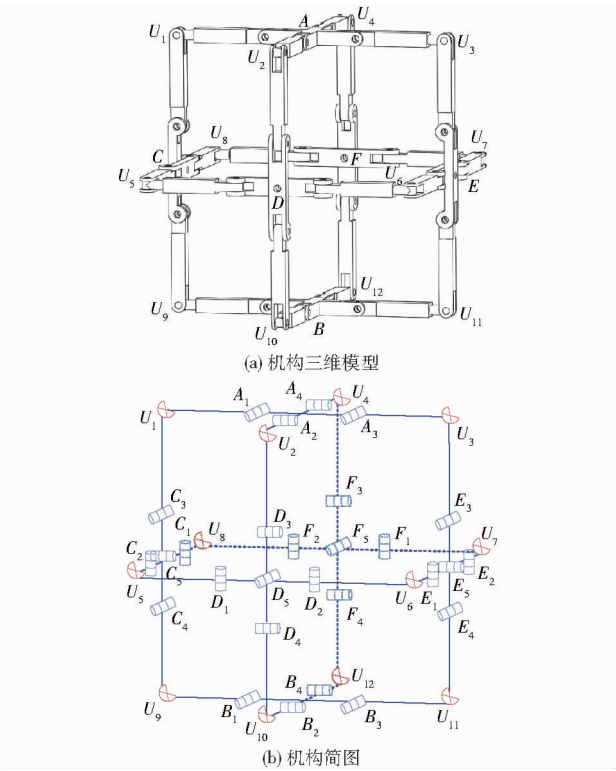


图 5　含约束支链的多模式移动并联机构

Fig. 5　Multi-mode mobile parallel mechanism with constrained branch chain

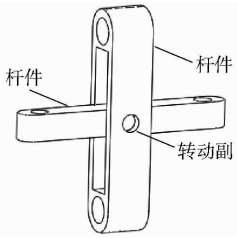


图 6　构件模型图

Fig. 6　Component model diagram

可得机构杆组参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta&0;x&0&z\\ \alpha&\beta&\gamma;x&y&z\\ \alpha&\beta&0;x&0&z\\ \alpha&\beta&0;0&y&z\\ \alpha&\beta&0;x&0&z\\ 0&\beta&\gamma;x&y&z\\ \alpha&\beta&0;0&y&z\\ \alpha&0&0;0&y&z\\ \alpha&0&\gamma;x&y&z\\ \alpha&\beta&0;x&0&z\\ \alpha&\beta&0;x&0&z\\ 0&\beta&0;x&0&z\\ \alpha&0&\gamma;x&y&z\\ 0&0&\gamma;x&0&z\end{pmatrix}\tag{3}$$

表 1 各环路划分及杆组参数矩阵

Tab. 1 Division of each loop and pole group parameter matrix

环路	杆组参数矩阵
环路 $BU_{10}DU_6EU_{11}B$	$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}G_{BD}\cup G_D\\G_{BED}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0;x&0&z\\\alpha&\beta&\gamma;x&y&z\end{bmatrix}$
环路 DU_2AU_3E	$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}G_{DA}\cup G_A\\G_{EA}\\G_D\\G_E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0;x&0&z\\\alpha&\beta&0;0&y&z\end{bmatrix}$
环路 BU_9CU_5D	$\boldsymbol{M}_3=\begin{bmatrix}G_{BCD}\\G_D\\G_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0;x&0&z\\0&\beta&\gamma;x&y&z\end{bmatrix}$
环路 CU_1A	$\boldsymbol{M}_4=\begin{bmatrix}G_{AC}\\G_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0;0&y&z\\\alpha&0&0;0&y&z\end{bmatrix}$
环路 $BU_{12}FU_8C$	$\boldsymbol{M}_5=\begin{bmatrix}G_{BFC}\\G_C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&0&\gamma;x&y&z\\\alpha&\beta&0;x&0&z\end{bmatrix}$
环路 FU_4A	$\boldsymbol{M}_6=\begin{bmatrix}G_{FA}\\G_A\\G_F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0;x&0&z\\0&\beta&0;x&0&z\end{bmatrix}$
环路 EU_7F	$\boldsymbol{M}_7=\begin{bmatrix}G_{EF}\\G_E\\G_F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&0&\gamma;x&y&z\\0&0&\gamma;x&0&z\end{bmatrix}$

杆组参数矩阵中存在多零角列向量,故该机构中存在过约束。

图 7 为约束支链三维图和结构关系图。U 表示运动副,与构件相连转动副命名为 I_m($I=C,D,E,F,m=1,2$),S 表示支链中杆件,约束支链的杆件间互相有约束作用,用“→”表示约束方向,横线表示具有连接关系。

该机构及约束支链具有对称性,以构件 D 为例进行分析,假定构件 C 与构件 D 为机架,构件 D 与支链 $R_CU_5R_D$、$R_{D2}U_6R_{E1}$ 构成闭合环路。运动链 CU_5DU_6E 中,杆件 S_{11}、S_{12}、S_{21}、S_{22} 通过运动副连接构成闭环,属于通过单个运动副闭合的情况,故运动链 $R_CU_5R_D$、$R_{D2}U_6R_{E1}$ 杆组参数矩阵分别为

$$\boldsymbol{M}_1=\begin{bmatrix}G_{CU_5}\cup G_{U_5}\\G_{U_5D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&0&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\end{bmatrix}\tag{4}$$

$$\boldsymbol{M}_2=\begin{bmatrix}G_{D_2U_6}\cup G_{U_6}\\G_{U_6R_{E_1}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&0&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\end{bmatrix}\tag{5}$$

由基点运动参数向量可知构件 D 具有绕 z 轴转动的自由度。运动链 $R_{C2}U_5R_{D1}$ 与运动链 $R_{D2}U_6R_{E1}$ 通过构件 D 形成闭合环路,整个环路杆组参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_1\cup\begin{bmatrix}G_D\\0\end{bmatrix}\\\boldsymbol{M}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\\\alpha&0&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\end{bmatrix}\tag{6}$$

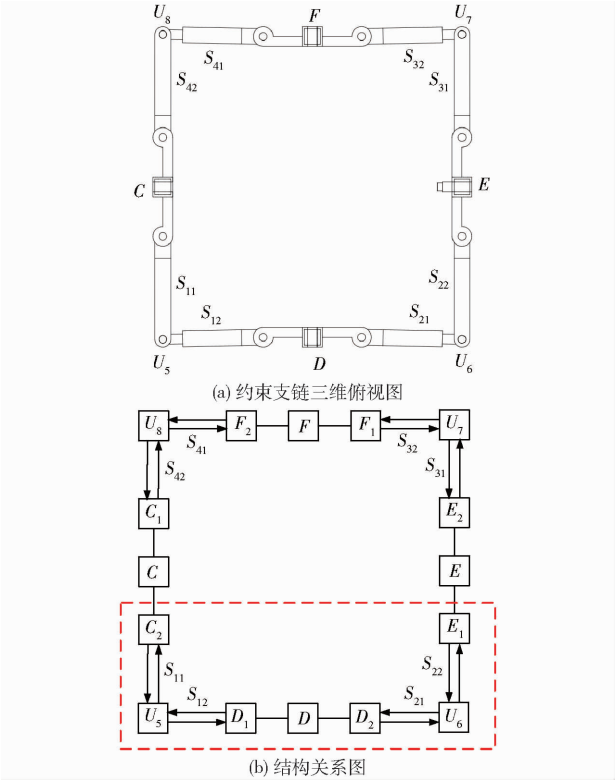


图 7 约束支链

Fig. 7 Constraint branch chain

矩阵中存在多零线列向量,且表明在 x、y、z 方向均存在 4 个平行约束力,存在公共约束。

类似可求出运动链 $R_{C_1}U_8FU_7R_{E_2}$ 杆组参数矩阵,为

$$\boldsymbol{M}_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{R_{C_1}F}\cup\boldsymbol{G}_F\\\boldsymbol{G}_{RF_1U_7R_{E_2}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\\\alpha&0&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\end{bmatrix}\tag{7}$$

其中

$$\boldsymbol{G}_{R_{C_1}F}=\begin{bmatrix}G_{R_{C_1}U_8}\cup G_{U_8}\\G_{U_8R_{F_2}}\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{G}_{RF_1U_7R_{E_2}}=\begin{bmatrix}G_{RF_1U_7}\cup G_{U_7}\\G_{U_7R_{E_2}}\end{bmatrix}$$

约束支链由运动链 CU_5DU_6E 与运动链 $R_{C_1}U_8FU_7R_{E_2}$ 通过构件 E 形成闭合环路,故整个约束支链杆组参数矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_3\cup\boldsymbol{G}_E\\\boldsymbol{M}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\\\alpha&0&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\\\alpha&\beta&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\\\alpha&\beta&\gamma&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0&0\end{bmatrix}\tag{8}$$

矩阵中存在多零线列向量,且表明在 x、y、z 方向均存在 8 个平行的约束力,存在过约束力,故该约

束支链为过约束支链。

2　机构各模式与自由度分析

2.1　含有约束支链的多模式移动并联机构各运动模式分析

含约束支链的移动并联机构中转动副 I_m（$I=A,B,\cdots,F,m=1,2,3,4$）轴线方向分别与 x、y 轴平行，如图 8 所示，当运动副绕轴线发生转动时，运动副间相对位置会发生改变，机构形状发生改变，运动模式也发生改变。

该机构具有四边形滚动模式和球形滚动模式，其运动副轴线间关系如表 2 所示。

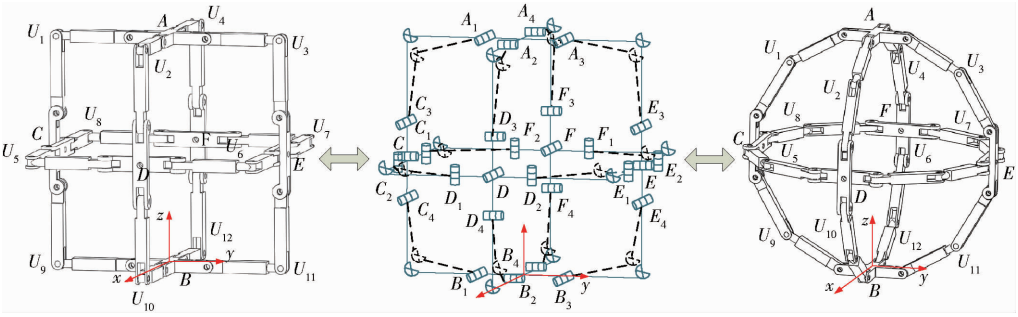
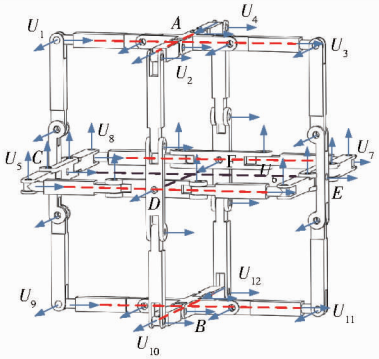
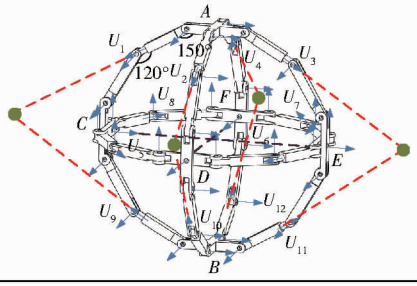


图 8　机构模式转换

Fig. 8　Mechanism model transformation diagram

表 2　各模式轴线关系

Tab. 2　Axis relationship of each model

模式	轴线旋量表示	轴线关系
四边形滚动模式		共线 平行
球形滚动模式		共线 平行 相交

机构中运动副轴线处于共线、平行关系时，机构为四边形模式，机构可沿 AU_1 或 AU_3 方向运动，与平台 A、B 连接的转动副均为锁止状态，初始时构件 C、E 中心处的转动轴线共线，当机构发生运动后，轴线为平行关系，构件 D、F 处的轴线始终为共线关系；机构中运动副轴线处于相交、共线、平行时，机构为球形模式，设机构初始状态下 $AU_i(i=1,2,3,4)$ 与平台 A 间夹角为 150°，$U_iC(i=1,2,3,4)$ 与平台 A 间夹角为 120°，$BU_i(i=9,10,11,12)$ 与平台 B 间夹角为 150°，$U_iC(i=9,10,11,12)$ 与平台 B 间夹角为 120°时，相交轴线的角度关系与夹角角度相同，形状呈球形。

2.2　机构各模式自由度分析

该机构为空间多闭环机构，具有一定的复杂性，在运动过程中会发生支链间的耦合，在自由度分析时，需要利用机构多环及对称的特征进行杆组拆分[26]。首先分析环路中对构件的约束作用，以平台 B 为输入件，构件 C、D、E 分别为输出件进行自由度分析，并建立等效串联运动链。图 9 为以平台 B 为机架，构件 D 为输出件进行拆分后的剩余机构，可划分为 3 个分支 K_1、K_2、K_3。

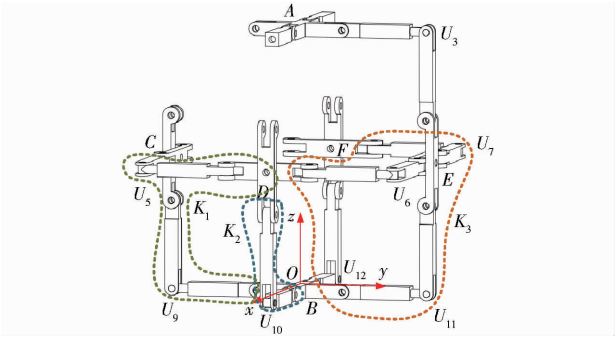


图 9　分支划分

Fig. 9　Branch division

各分支旋量如图 10 所示，图 10a 分支 K_1 为串联运动链 BU_9CU_5D，图 10b 分支 K_2 为串联链 $BU_{10}D$，图 10c 分支 K_3 为含有闭环子链运动链（$BU_{12}FU_7+BU_{11}$）$-EU_6D$，分析各支链对构件 D 的约束情况，建立平台 B 与构件 D 之间的等效串联运动链。以平台 B 中心 O 为原点建立坐标系 $Oxyz$，x 轴沿 BU_{10} 方向，y 轴沿 BU_{11} 方向，根据右手法则得到 z 轴方向。

首先对分支 K_1 进行自由度分析，可知不存在反螺旋，该分支对输出件 D 无约束作用。

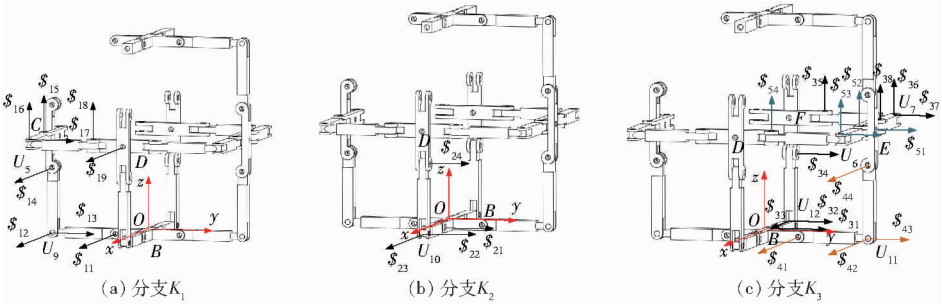


图 10 各分支运动副旋量

Fig. 10 Subspinor diagrams of each branch motion

该分支 K_2 各运动旋量如图 10b 所示,该分支在坐标系 $Oxyz$ 反运动螺旋为

$$\begin{cases} \$^{r}_{21} = (0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{r}_{22} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \end{cases} \tag{9}$$

该分支 K_3 运动旋量如图 10c 所示,该分支含有闭环子链($BU_{12}FU_7 + BU_{11}$),支链 BU_{11} 在坐标系 $Oxyz$ 反运动螺旋为

$$\begin{cases} \$^{r}_{41} = (0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{r}_{42} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \end{cases} \tag{10}$$

对支链 $BU_{12}FU_7$ 在坐标系 $Oxyz$ 进行螺旋分析,该支链对构件 E 无约束。

构件 E 运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{E1} = (0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 0) \\ \$_{E2} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \end{cases} \tag{11}$$

故原分支 K_3 运动螺旋系在坐标系 $Oxyz$ 表示为

$$\begin{cases} \$_{E1} = (0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 0) \\ \$_{E2} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \\ \$_{51} = \left(0 \quad 1 \quad 0;-\dfrac{3}{2}l \quad 0 \quad 0\right) \\ \$_{52} = \left(0 \quad 0 \quad 1;\dfrac{3}{2}l \quad -\dfrac{1}{2}l \quad 0\right) \\ \$_{53} = \left(0 \quad 0 \quad 1;\dfrac{3}{2}l \quad -\dfrac{3}{2}l \quad 0\right) \\ \$_{54} = \left(0 \quad 0 \quad 1;\dfrac{1}{2}l \quad -\dfrac{3}{2}l \quad 0\right) \end{cases} \tag{12}$$

该分支运动反螺旋为

$$\begin{cases} \$^{r}_{51} = (0 \quad 0 \quad 0;1 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{r}_{52} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \end{cases} \tag{13}$$

输出件 D 运动螺旋在坐标系 $Oxyz$ 表示为

$$\begin{cases} \$^{m}_{D1} = (0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{m}_{D2} = (0 \quad 0 \quad 0;1 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{m}_{D2} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \end{cases} \tag{14}$$

由式(14)可知,构件 D 具有绕 y 轴转动和沿 x、z 轴移动自由度。根据等效支链法,分支 K_1、K_2、K_3 运动旋量可由构件 D 处约束情况表示。

由于机构对称性,构件 C、E、F 运动旋量与构件 D 相同,均具有 1 个转动自由度和 2 个移动自由度。剩余机构运动螺旋如图 11 所示,结合各构件运动螺旋,便可得整个机构自由度。

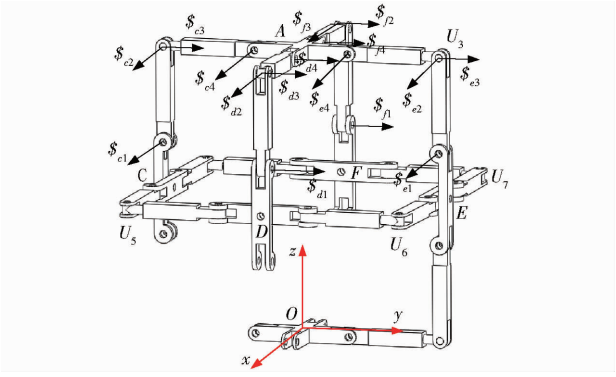


图 11 机构剩余部分旋量

Fig. 11 Spinor diagram of remaining part of mechanism

以构件 D 为例,DU_2A 支链上各运动螺旋在坐标系 $Oxyz$ 表示为

$$\begin{cases} \$^{m}_{D1} = (0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{m}_{D2} = (0 \quad 0 \quad 0;1 \quad 0 \quad 0) \\ \$^{m}_{D2} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \\ \$_{d1} = \left(0 \quad 1 \quad 0;-2l \quad 0 \quad \dfrac{3}{2}l\right) \\ \$_{d2} = (1 \quad 0 \quad 0;0 \quad 3l \quad 0) \\ \$_{d3} = \left(0 \quad 1 \quad 0;-3l \quad 0 \quad \dfrac{3}{2}l\right) \\ \$_{d4} = \left(0 \quad 1 \quad 0;-3l \quad 0 \quad \dfrac{1}{2}l\right) \end{cases} \tag{15}$$

其反运动螺旋求解为

$$\$^{r}_{d} = (0 \quad 0 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1) \tag{16}$$

该支链对平台 A 受到 z 轴方向的约束力偶,约束了平台 A 沿 z 轴方向的移动。由于机构具有对称性,支链 CU_1A、EU_3A、FU_4A 对平台 A 的约束相同。

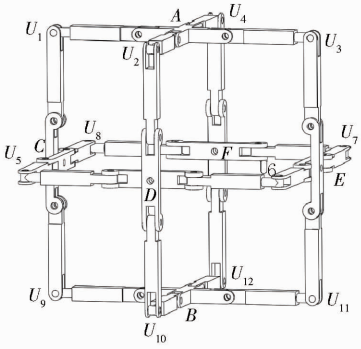
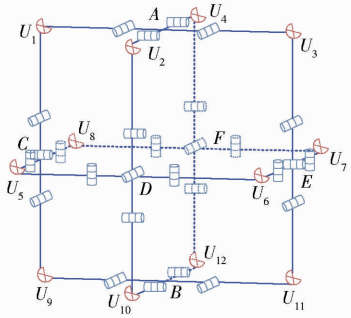
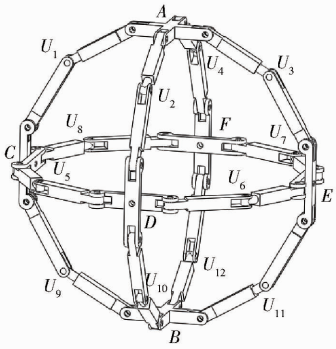
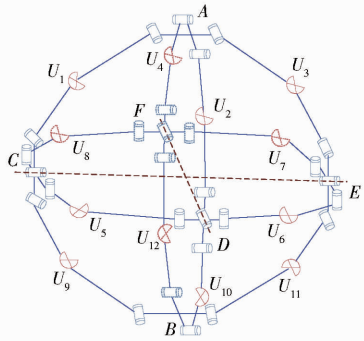
根据修正的 G-K 公式[27-28]可得机构自由度为

$$M = d(n-g-1) + \sum_{i=1}^{k} f_i + v - \xi = 2 \tag{17}$$

机构各模式自由度如表 3 所示。

表 3　各模式自由度

Tab. 3　Degree of freedom by model

模式	模型图	机构简图	自由度
四边形滚动模式			2
球形滚动模式			4

3　运动学分析

3.1　四边形模式

图 12 为机构处于四边形滚动模式运动学模型图，以平台 A 中心 O_2 为原点建立坐标系 $O_2x_2y_2z_2$，x_2 轴沿着 O_2U_2 方向，y_2 轴沿着 O_2U_3 方向，根据右手定则可得 z_2 轴；以过约束支链所在平面中心 O_1 为原点建立坐标系 $O_1x_1y_1z_1$，x_1 轴与 x_2 轴方向相同，y_1 轴与 y_2 轴方向相同，可根据右手定则可得轴，机构空间坐标为 $Oxyz$。假设机构沿 y 轴正方向运动，设运动角度 θ_1 后，其中 $\theta_1 \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$，原点 O_2 变为 O_2'，O_1 变为 O_1'，$O_2'O$ 与 z 轴夹角为 θ_1，过约束支链所在平面有 2 个转动，1 个是绕转动副 D_5 和 F_5 的轴线发生转动，设转动角为 θ_2，该过程中只有该平面上的运动副坐标会发生变化，另 1 个是相对于空间坐标系发生转动，该机构输入角为 $\angle BU_{11}E = \theta_3$，其中 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \theta_1$，其中 $\theta_3 \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$。

平台 A 所在平面各转动副在坐标系 $O_2x_2y_2z_2$ 中坐标表示为 $\boldsymbol{A}_m^{O_2} = (A_{mx}^{O_2} \quad A_{my}^{O_2} \quad A_{mz}^{O_2})$，其中 $m = 1,2,3,4$，U 副坐标表示为 $\boldsymbol{U}_i^{O_2} = (U_{ix}^{O_2} \quad U_{iy}^{O_2} \quad U_{iz}^{O_2})$，其中 $i = 1,2,3,4$；过约束支链所在平面各转动副在坐标系 $O_1x_1y_1z_1$ 下坐标为 $\boldsymbol{I}_m^{O_1} = (I_{mx}^{O_1} \quad I_{my}^{O_1} \quad I_{mz}^{O_1})$ $(I = C, D, E, F, m = 1,2,\cdots,5)$，各 U 副坐标表示为 $\boldsymbol{U}_i^{O_1} = (U_{ix}^{O_1} \quad U_{iy}^{O_1} \quad U_{iz}^{O_1})$，其中 $i = 5,6,7,8$；平台 B 所在平面各转动副在坐标系 $Oxyz$ 中坐标表示为 $\boldsymbol{B}_m^{O} = (B_{mx}^{O} \quad B_{my}^{O} \quad B_{mz}^{O})$，其中 $m = 1,2,3,4$，U 副坐标表示为 $\boldsymbol{U}_i^{O} = (U_{ix}^{O} \quad U_{iy}^{O} \quad U_{iz}^{O})$，其中 $i = 9,10,11,12$。

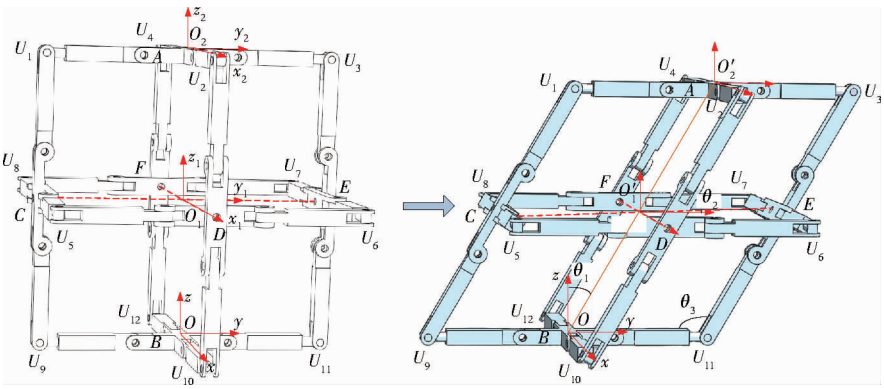


图 12　四边形滚动模式运动模型图

Fig. 12　Quadrilateral rolling mode motion model diagram

机构转动 θ_1，此过程旋转变换矩阵为

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\0&\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{bmatrix}\tag{18}$$

转动 θ_1 后平台 A 所在平面各运动副在空间坐标系 $Oxyz$ 坐标表示为

$$\begin{bmatrix}A_{mx}^{O}\\A_{my}^{O}\\A_{mz}^{O}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}_1\begin{bmatrix}A_{mx}^{O_2}\\A_{my}^{O_2}\\A_{mz}^{O_2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}x_2'\\y_2'\\z_2'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}U_{ix}^{O}\\U_{iy}^{O}\\U_{iz}^{O}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}_1\begin{bmatrix}U_{ix}^{O_2}\\U_{iy}^{O_2}\\U_{iz}^{O_2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}x_2'\\y_2'\\z_2'\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\tag{20}$$

假设约束支链所在平面的运动分步完成，先绕 x_1 轴转动 θ_2，再绕 x 轴转动 θ_1，则其所在平面运动副旋转变换矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2&-(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)\\0&\sin\theta_2\cos\theta_1+\sin\theta_1\cos\theta_2&\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\end{bmatrix}\tag{21}$$

故 U 副 $U_i(i=5\sim8)$ 及构件 C、D、E、F 处转动副在空间坐标系 $Oxyz$ 坐标表示为

$$\begin{cases}I_m^O=\boldsymbol{R}I_m^{O_1}+O_1' & (I=C,E,m=1,2,5)\\I_m^O=\boldsymbol{R}_1I_m^{O_1}+O_1' & (I=C,E,m=3,4)\\I_m^O=\boldsymbol{R}I_m^{O_1}+O_1' & (I=D,F,m=1,2)\\I_m^O=\boldsymbol{R}_1I_m^{O_1}+O_1' & (I=D,F,m=3,4,5)\\U_i^O=\boldsymbol{R}U_i^{O_1}+O_1' & (i=5,6,7,8)\end{cases}\tag{22}$$

3.2 球形模式

图 13 为球形滚动模式运动学模型图，以过约束支链所在平面中心 O 为原点建立坐标系 $Oxyz$，$Oxyz$ 为空间坐标系。根据机构的几何特征可知，A_mB_m、C_mD_m、$E_mF_m(m=1,2,3,4)$ 连线相互垂直，设其交点为 $O_i(i=1,2,\cdots,12)$ 再依次连接 $I_mJ_n(I,J=A,B,\cdots,F,m,n=1,2,3,4)$ 使三角形 $O_iI_mJ_n$ 构成直角三角形，以直角三角形 $O_1A_1C_3$ 为例，O_1 处为直角，$O_1A_1\perp O_1C_3$。O_iI_m 长度设为 $d_p(p=1,2,\cdots,6)$，沿 z 轴正、负方向的 O_iI_m 分别为 d_1、d_2，沿 x 轴正、负方向的 O_iI_m 分别为 d_3、d_4，沿 y 轴正、负方向的 O_iI_m 分别为 d_5、d_6，可得

$$l_{OiIm}^2+l_{OiJn}^2=l_{ImJn}^2\tag{23}$$

设 $U_i(i=1,2,\cdots,12)$ 处杆件间角度为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,12)$，杆长为 l，则

$$l_{ImJn}^2=2l^2(1-\cos\alpha_i)\tag{24}$$

根据式(23)和式(24)可得

$$l_{OiIm}^2+l_{OiJn}^2=2l^2(1-\cos\alpha_i)$$

$$d_p^2+d_q^2=2l^2(1-\cos\alpha_i)\quad(p、q=1,2,\cdots,6)\tag{25}$$

令 $b_i=2l^2(1-\cos\alpha_i)(i=1,2,\cdots,12)$，可得

$$\begin{cases}d_1^2+d_6^2=b_1\\d_4^2+d_6^2=b_8\\d_1^2+d_4^2=b_4\\d_2^2+d_3^2=b_6\\d_2^2+d_5^2=b_{11}\\d_2^2+d_3^2=b_9\end{cases}\tag{26}$$

则 I_m 处位置坐标表示为 $I_m=\pm\left(\frac{l}{2}+d_p\right)$。

$I_mJ_n(m,n=1,2,3,4)$ 中点为 $M_i(i=1,2,\cdots,12)$，可知 U_iM_i 与 I_mJ_n 垂直，过约束支链 $CDEF$ 所在平面坐标为 Oxy，可得

$$\begin{cases}(U_i-M_i)(d_p-d_q)=0\\|U_i-M_i|^2=l^2-\left|\frac{d_p-d_q}{2}\right|^2\end{cases}\tag{27}$$

根据式(27)可得

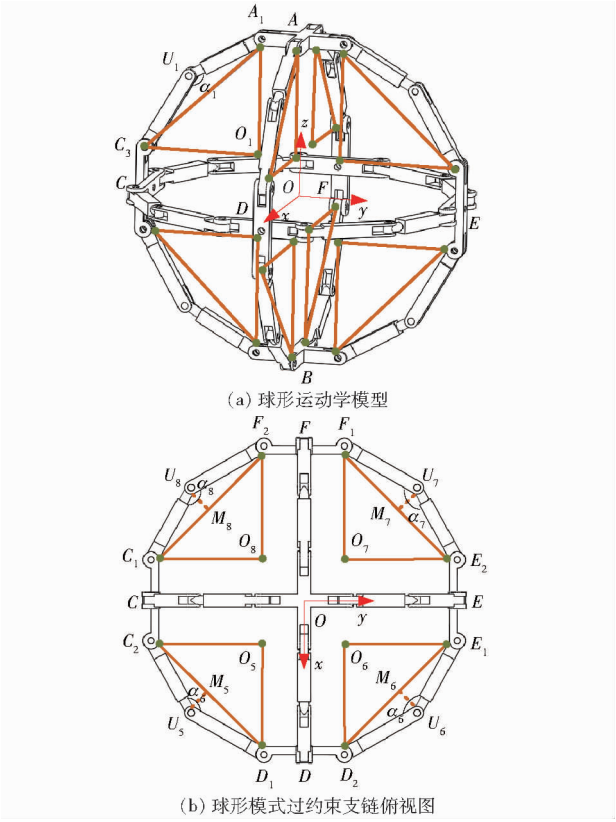


图 13 球形滚动模式运动学模型图

Fig. 13 Kinematic model diagram of spherical rolling mode

$$\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{l}{2}+M_{ix}\pm\sqrt{\dfrac{(l^2-M_{ix}^2-M_{iy}^2)M_{iy}^2}{M_{i,x}^2+M_{i,y}^2}}\\ \dfrac{l}{2}+M_{iy}\mp\dfrac{M_{ix}}{M_{iy}}\sqrt{\dfrac{(l^2-M_{ix}^2-M_{iy}^2)M_{iy}^2}{M_{ix}^2+M_{iy}^2}}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$(i=5,6,7,8)$$

其中

$$\begin{bmatrix}M_5\\M_6\\M_7\\M_8\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}d_3&-d_6&0\\d_3&d_5&0\\-d_5&d_4&0\\-d_4&-d_6&0\end{bmatrix}$$

闭环 $ACBE$ 所在平面坐标为 Oyz，可得

$$\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{l}{2}+M_{ix}\pm\sqrt{\dfrac{(l^2-M_{ix}^2-M_{iy}^2)M_{iy}^2}{M_{i,x}^2+M_{i,y}^2}}\\ 0\\ \dfrac{l}{2}+M_{iz}\mp\dfrac{M_{ix}}{M_{iz}}\sqrt{\dfrac{(l^2-M_{ix}^2-M_{iz}^2)M_{iz}^2}{M_{ix}^2+M_{iz}^2}}\end{bmatrix}$$

$$(i=1,3,9,11)$$

其中

$$\begin{bmatrix}M_1\\M_3\\M_9\\M_{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-d_6&d_1\\0&-d_6&-d_2\\0&d_5&-d_2\\0&d_5&d_1\end{bmatrix}$$

闭环 $ADBF$ 所在平面的平面坐标为 Oxz，可得

$$\boldsymbol{U}_i=\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{l}{2}+M_{iy}\pm\sqrt{\dfrac{(l^2-M_{iy}^2-M_{iz}^2)M_{iz}^2}{M_{iy}^2+M_{iz}^2}}\\ \dfrac{l}{2}+M_{iz}\mp\dfrac{M_{ix}}{M_{iz}}\sqrt{\dfrac{(l^2-M_{ix}^2-M_{iz}^2)M_{iz}^2}{M_{ix}^2+M_{iz}^2}}\end{bmatrix}$$

$$(i=2,4,10,12)$$

其中

$$\begin{bmatrix}M_2\\M_4\\M_{10}\\M_{12}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}d_3&0&d_1\\d_3&0&-d_2\\-d_4&0&-d_2\\-d_4&0&d_1\end{bmatrix}$$

4　移动性能分析

4.1　过约束支链对机构稳定性的影响

由于约束支链与机构中支链存在连接关系，故构成空间多闭环机构[29]，该类机构在运动时，与地面接触面积增大，减小了与地面的冲击力[30]。通过对比分析机构 2 种模式在是否含过约束支链时对机构运动稳定性的影响。

该机构中杆件、构件及平台质量均匀，形状对称，其质量中心位于其几何中心，设长度 l 为 60 cm。在对机构质心分析时，采用 ZMP 原理对机构运动时稳定性进行分析。y 方向 ZMP 表达式为

$$y_{\mathrm{ZMP}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{z}_i+g)y_i-\sum_{i=1}^{n}m_i\ddot{y}_iz_i-\sum_{i=1}^{n}I_{ix}\ddot{\Omega}_{ix}}{\sum_{i=1}^{n}m_i(\ddot{z}_i+g)}\tag{28}$$

式中　m_i——各组件质量，kg

$\ddot{z}_i$、$\ddot{y}_i$——各组件在坐标系中质心加速度，m/s^2

y_i、z_i——各组件在坐标系中质心坐标，m

I_{ix}——各杆件绕 x 轴转动惯量，kg·m^2

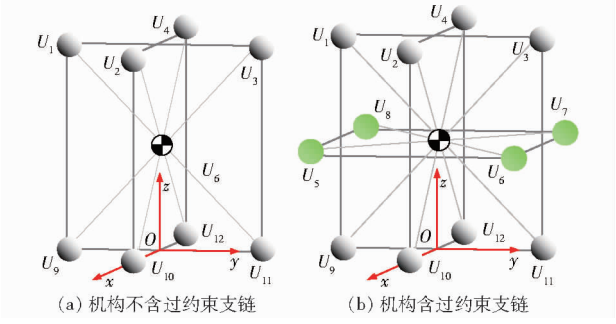
$\ddot{\Omega}_{ix}$——各组件绕 x 轴旋转角加速度，rad/s^2

g——重力加速度，m/s^2

由于机构为匀速运动，角速度恒定，故角加速度为 0。

机构处于四边形滚动模式时：

图 14 为四边形滚动模式时机构含/不含过约束支链示意图，该模式下机构在含/不含过约束支链运动时 y_{ZMP} 与 θ_3 关系对比如图 15 所示。由图 15 可得，角度相同时，含有过约束支链的机构 y_{ZMP} 较小，说明运动时其稳定性更好。



(a) 机构不含过约束支链　(b) 机构含过约束支链

图 14　四边形滚动模式示意图

Fig. 14　Schematic of mechanism in quadrilateral rolling mode

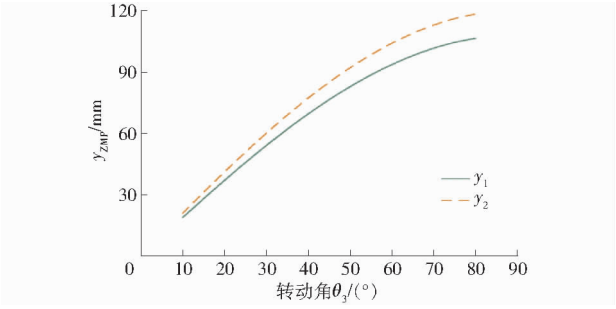
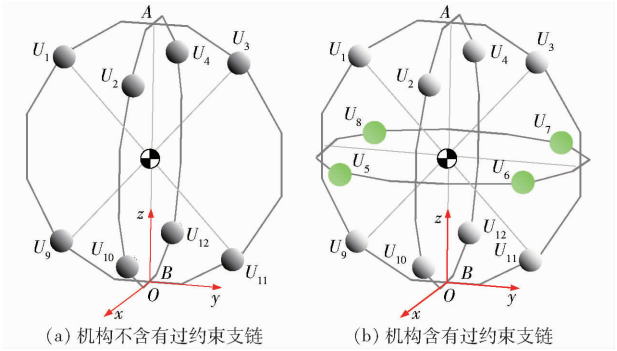


图 15　机构含/不含过约束支链 y_{ZMP} 与 θ_3 关系对比

Fig. 15　Comparison diagram of the relationship between y_{ZMP} and θ_3 of the mechanism with/without over constrained branch chains

图 16 为球形滚动模式时机构含/不含过约束支链示意图，对该模式下机构在含/不含过约束支链运动时 y_{ZMP} 与 α_1 的关系对比如图 17 所示。由图 17 可得，含过约束支链移动并联机构在运动过程中稳

定性更加良好。



(a) 机构不含有过约束支链 (b) 机构含有过约束支链

图 16 球形滚动模式示意图

Fig. 16 Schematic of mechanism in spherical rolling mode

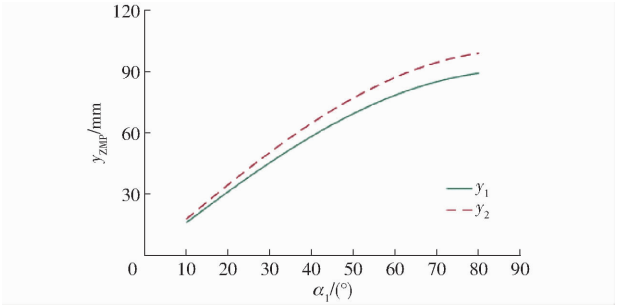


图 17 机构含/不含过约束支链 y_{ZMP} 与 α_1 关系对比

Fig. 17 Comparison diagram of relationship between y_{ZMP} and α_1 of mechanism with/without over constrained branch chains

4.2 仿真

用 Solidworks 创建该含有过约束支链的移动并联机构三维模型,将该模型保存为. XT 格式文件并导入 ADAMS;根据该机构设计信息,设动、定平台及各支链基本参数;根据动、定平台与各支链之间的关系,添加运动副;设定运动副之间的约束,添加驱动函数以带动机构整体模型运动,创建其仿真运动模型。

由于 ADAMS 软件在设定驱动函数时,需将角度转换为弧度,变量转换为 t,由此设定驱动函数为 Step(time,0,0,11.2,45d)。

调整机构仿真运动周期及转动角度进行虚拟仿真,可得机构在一个周期内的运动过程示意图。如图 18、19 所示,通过观察可发现,该模型整体运动过程较为平稳,且机构各部分正常运动,未发生异常,整体与理论预期的运动姿态几乎一致。

对该含过约束支链的移动并联机构两种运动模式进行 ADAMS 运动学仿真验证,如图 18、19 所示。

由图 18 可知,$T=0$ s 为机构初始模态,在电机驱动下杆件发生偏移,质心偏移使机构发生翻转,从而实现机构运动;$T=2.7$ s 时机构发生 1 次翻转,$T=4.6$ s 时为机构翻转 90°后的模态;$T=7.1$ s 时为机构翻转 2 次后的模态;$T=10$ s 时为机构翻转 3 次后的模态;$T=11.2$ s 时为机构翻转 4 次后的模态,此时与地面接触的平面与初始时相同。

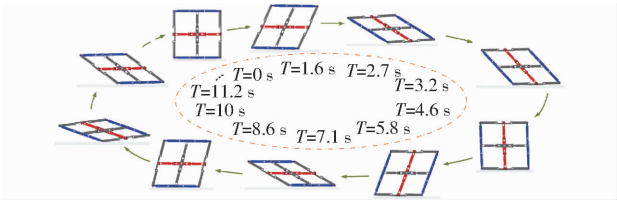


图 18 四边形模式仿真

Fig. 18 Quadrilateral model simulation diagram

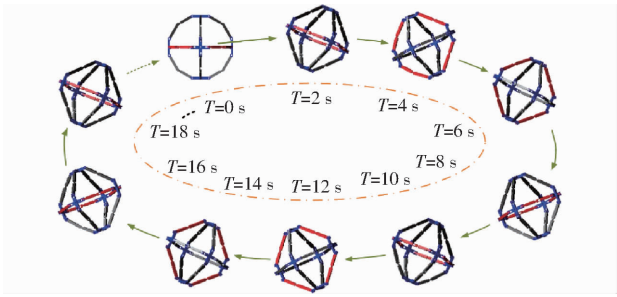


图 19 球形模式仿真

Fig. 19 Spherical model simulation diagram

由图 19 可知,$T=0$ s 时为机构初始模态,此时构件与地面接触,在电机驱动下杆件发生转动使质心产生偏移,从而实现机构的滚动运动。$T=2$ s 时机构沿某个面进行滚动;$T=2\sim18$ s 为机构沿某些面进行连续滚动模态图。由于运动时机构与地面为面接触,故其运动轨迹不是一条直线,可使机构在每个运动转折点进行方向的改变。该接触方式不仅增加与地面接触面积,使机构在运动过程中更具有稳定性,更具有多向滚动优点。

对比仿真结果与理论分析,可发现两者运动学特性表现出高度的一致,证明了该过约束移动并联机构运动学理论模型的正确性,同时也体现了该机构设计的合理性。

4.3 机构模型

对该含过约束支链的多模式运动并联机构进行模型制作,机构模型参数为:杆件长度均为 60 cm,平台质量为 0.8 kg,构件质量为 0.7 kg,其余杆件质量为 0.5 kg。

图 20 为机构处于四边形模式时的实物模型运动图。与图 18 中几个时刻机构模态相对应。机构由初始 $T=0$ s 开始运动,整体发生倾斜偏移,机构实现偏转运动,该机构进行周期运动,完成一个周期后,机构模态与初始位置的机构模态相同。

图 21 为机构处于球形模式的实物模型运动图,与图 19 中几个时刻机构的模态相对应,与四边形模式运动相同,均为周期性运动。

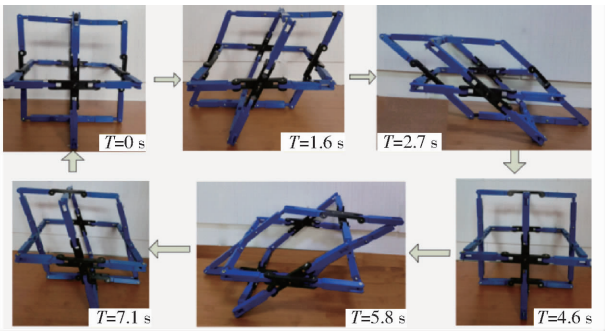


图 20　四边形模式机构实物模型运动

Fig. 20　Quadrilateral mode mechanism physical model movement diagram

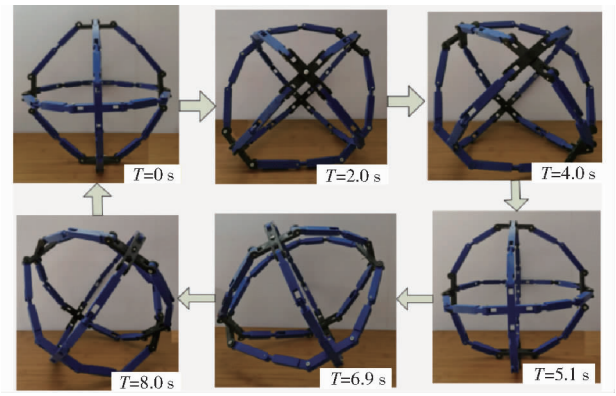


图 21　球形模式机构实物模型运动

Fig. 21　Spherical mode mechanism physical model motion diagram

5　结论

（1）以四杆机构及约束支链为本体构造了一种含约束支链的多模式移动并联机构，分析了过约束支链与平台均无连接的情况，经过过约束支链判定，得到了一种含过约束支链的多模式移动并联机构，将过约束支链与多模式移动并联类机构结合。

（2）由于机构为空间多环路机构，运动时会产生支链间的耦合，采用杆组等效法对其进行自由度分析；并对机构四边形滚动模式及球形滚动模式进行运动学分析。

（3）分析了过约束支链对机构运动时稳定性的影响，对比分析机构含/不含有过约束支链运动时 y_{ZMP} 与角度之间的关系，得到机构含有过约束支链时其稳定性能更良好。

（4）利用 ADAMS 对机构 2 种模式进行运动学仿真，并制作了样机，验证了机构运动的可行性。

参　考　文　献

[1] WANG S, LI H, HAN X, et al. Research on high precision stiffness modeling method of redundant over-constrained parallel mechanism[J]. Sensors, 2023, 23(13):5916.

[2] YANG C, YU W, YE W, et al. Systematic elastostatic stiffness model of over-constrained parallel manipulators without additional constraint equations[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2024, 37(1):1 – 19.

[3] 郝贵军. 少自由度过约束并联机构研究[D]. 西安:西安理工大学, 2019.
HAO Guijun. Research on parallel mechanism with less freedom[D]. Xi'an: Xian University of Technology, 2019. (in Chinese)

[4] 黄真, 刘婧芳, 李艳文. 论机构自由度:寻找了 150 年的自由度通用公式[M]. 北京:科学出版社, 2011.

[5] CHENG P, CAO W A, WANG T, et al. Design and analysis of a new deployable articulated mast mechanism with two-dimensional deploying-folding motion[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2025, 17(2):021005.

[6] 刘晓飞,唐艳华,刘鑫,等. 含约束支链的冗余驱动并联机构动力学性能优化[J]. 农业机械学报, 2021, 52(5):378 – 385,403.
LIU Xiaofei, TANG Yanhua, LIU Xin, et al. Optimization of dynamic performance of redundant drive parallel mechanism with constrained branch chain[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2021, 52(5):378 – 385,403. (in Chinese)

[7] 徐郑和. 过约束五自由度混联机器人受力与刚度性能分析[D]. 秦皇岛:燕山大学,2020.
XU Zhenghe. Analysis of force and stiffness performance of overconstrained 5-DOF hybrid robot[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2020. (in Chinese)

[8] GOSSELIN C M, ÉRIC S P. Development and experimentation of a fast 3-DOF camera-orienting device[J]. The International Journal of Robotics Research, 1997, 16(5):619 – 630.

[9] 韩博,许允斗,姚建涛,等. 过约束剪铰式双层周边桁架可展天线机构设计与分析[J]. 燕山大学学报, 2019, 43(4): 298 – 305.
HAN Bo, XU Yundou, YAO Jiantao, et al. Design and analysis of deployable antenna mechanism of overconstrained scissor-hinged double-layer peripheral truss[J]. Journal of Yanshan University, 2019, 43(4): 298 – 305. (in Chinese)

[10] 刘文兰,许允斗,郭金伟,等. 被动输入过约束四面体可展天线机构动力学分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(5): 181 – 191.
LIU Wenlan, XU Yundou, GUO Jinwei, et al. Dynamic analysis of the constrained tetrahedral deployable antenna mechanism with passive input[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(5):181 – 191. (in Chinese)

[11] 胡波,路懿,许佳音,等. 新型过约束并联机构 2RPU + UPU 动力学模型[J]. 机械工程学报, 2011, 47(11): 36 – 43.
HU Bo, LU Yi, XU Jiayin, et al. A new 2RPU + UPU dynamic model of overconstrained parallel mechanism[J]. Journal of

Mechanical Engineering, 2011, 47(11):36 - 43. (in Chinese)
[12] 荀致远,关永瀚,席利贺,等. 空间三正交平行四边形滚动机构[J]. 机械工程学报, 2015, 51 (17): 15 - 24.
XUN Zhiyuan, GUAN Yonghan, XI Lihe, et al. Space triorthogonal parallelogram rolling mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015, 51(17):15 - 24. (in Chinese)
[13] WEI X, TIAN Y, WEN S. Design and locomotion analysis of a novel modular rolling robot[J]. Mechanism and Machine Theory, 2019, 133(4):23 - 43.
[14] GAO H, LIU J, YU Y. Design and motion analysis of a novel coupled mechanism based on a regular triangular bipyramid[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2016, 13(6): 1729881416678139.
[15] ZHANG C Y, XIE M J, ZHANG D. Kinematics analysis and optimization of a multi-mode mobile parallel mechanism[J]. Tehnički Vjesnik, 2021, 28(1): 276 - 284.
[16] 刘超,巢鑫迪,姚燕安. 多模式空间 6R 地面移动机构[J]. 机械工程学报, 2019,55(23):38 - 47.
LIU Chao, CHAO Xindi, YAO Yan'an. Multimodal space 6R ground mobility mechanism [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019,55(23):38 - 47. (in Chinese)
[17] ZHANG C Y, WAN Y, ZHANG D, et al. A new mathematical method to study the singularity of 3-RSR multimode mobile parallel mechanism[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2019(1):1327167.
[18] LIU X Y, ZHANG C Y, NI C, et al. A reconfigurable multi-mode walking-rolling robot based on motor time-sharing control [J]. Industrial Robot, 2020, 47(2):293 - 311.
[19] 于靖军,刘凯,孔宪文. 多模式机构研究进展[J]. 机械工程学报, 2020,56(19):14 - 27.
YU Jingjun, LIU Kai, KONG Xianwen. Research progress of multi-modal institutions[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020,56(19):14 - 27. (in Chinese)
[20] 张春燕, 谢明娟, 卢晨晖. 4 - URPU 多模式移动并联机构运动学与多目标优化[J]. 机械科学与技术, 2020, 39(8): 1202 - 1210.
ZHANG Chunyan, XIE Mingjuan, LU Chenhui. Kinematics and multi-objective optimization of 4 - URPU multi-mode mobile parallel mechanism[J]. Mechanical Science and Technology, 2020, 39(8):1202 - 1210. (in Chinese)
[21] 张春燕,平安. 含折展平台的多模式移动并联机构设计与运动特性分析[J]. 农业机械学报, 2022,53(3):449 - 458.
ZHANG Chunyan, PING An. Design and kinematic characteristic analysis of multi-mode mobile parallel mechanism with folding platform[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(3):449 - 458. (in Chinese)
[22] 沈惠平,孔祥超,李菊,等. 正解符号化且运动解耦的 2T1R 并联机构拓扑设计与分析[J]. 农业机械学报,2024,55(5): 449 - 458.
SHEN Huiping, KONG Xiangchao, LI Ju, et al. Topological design and analysis of a 2T1R parallel mechanism with symbolic forward solution and motion decoupling[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024,55(5): 449 - 458. (in Chinese)
[23] 伞红军,杨晓园,陈久朋,等. Delta 并联机器人运动学性能分析与结构参数优化[J]. 农业机械学报,2024,55(8):446 - 458.
SAN Hongjun, YANG Xiaoyuan, CHEN Jiupeng, et al. Kinematic performance analysis and structural parameter optimization of Delta parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024,55(8):446 - 458. (in Chinese)
[24] 卢文娟,张立杰,谢平,等. 机构中过约束判定的新方法[J]. 中国机械工程, 2017, 28(20):2402 - 2407,2413.
LU Wenjuan, ZHANG Lijie, XIE Ping, et al. A new method to determine overconstraint in mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2017, 28(20):2402 - 2407,2413. (in Chinese)
[25] 刘香玉. 一类多模式移动机构的设计方法与实现[D]. 上海:上海工程技术大学,2020.
LIU Xiangyu. Design method and implementation of a class of multi-mode mobile mechanism [D]. Shanghai: Shanghai University of Engineering Science,2020. (in Chinese)
[26] 许允斗, 刘文兰, 陈亮亮,等. 构架式可展天线机构自由度分析——拆杆等效法[J]. 航空学报, 2017, 38(9):321 - 332.
XU Yundou, LIU Wenlan, CHEN Liangliang, et al. Analysis of the degree of freedom of structure deployable antenna mechanism—model of removing rod[J]. Acta Aeronautica, 2017, 38(9): 321 - 332. (in Chinese)
[27] 徐冬梅,刘湘龙,于思淼,等. 面向狭长空间的三自由度并联机器人设计与建模[J]. 农业机械学报,2024,55(1):426 - 435.
XU Dongmei, LIU Xianglong, YU Simiao, et al. Design and modeling of a 3-DOF parallel robot for narrow and long spaces [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(1): 426 - 435. (in Chinese)
[28] 沈惠平,傅增,李菊,等. 无寄生运动 3-DOF 2T1R 并联机构拓扑设计与分析[J]. 农业机械学报,2024,55(6):424 - 433.
SHEN Huiping, FU Zeng, LI Ju, et al. Topological design and analysis of a 3-DOF 2T1R parallel mechanism without parasitic motion[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(6): 424 - 433. (in Chinese)
[29] 毛江,朱小飞,陈进,等. 基于最优传递性能的 2T2R 并联机构型综合[J]. 机械传动,2023,47(7):17 - 24.
MAO Jiang, ZHU Xiaofei, CHEN Jin, et al. Type synthesis of 2T2R parallel mechanism based on optimal transmission performance[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2023,47(7):17 - 24. (in Chinese)
[30] XUN Z Y, YAO Y A, LI Y, et al. A novel rhombohedron rolling mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 105: 285 - 303.