doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.12.010

电动拖拉机变刚度振动馈能装置频率匹配方法与试验

王　威　李梓强　韩嘉璐　赵　洁
（西北农林科技大学机械与电子工程学院，陕西杨凌 712100）

摘要：针对轮式电动拖拉机的高效振动能量回收问题，在课题组现有振动馈能装置的基础上，引入变刚度弹簧，提出一种装置共振频率与路面激励频率的匹配方法，提升了俘能性能。分析电动拖拉机行驶的路面激励频带，研究并建立变刚度振动馈能装置的动力学模型；融合隐式重启 Arnoldi 法、自适应交叉近似算法及有限元方法研究装置的模态演化规律，在此基础上确定变刚度弹簧的劲度系数，提出变刚度振动馈能装置的频率匹配方法；通过谐波定频与扫频试验对比，研究定、变刚度振动馈能装置的俘能性能。结果表明：引入变刚度弹簧能够使馈能装置的共振频带拓宽，最大瞬时输出电压提高至 52.2 V，平均输出功率和发电量分别提升 34.4% 和 42.8%，同时满足电池组的减振要求。

关键词：电动拖拉机；变刚度；频率匹配；振动俘能
中图分类号：S219.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2025)12-0121-10　　**OSID**：

Frequency Matching Method and Experiment of Variable Stiffness Vibration Energy Feedback Device for Electric Tractor

WANG Wei　LI Ziqiang　HAN Jialu　ZHAO Jie
(*College of Mechanical and Electronic Engineering*, *Northwest A&F University*, *Yangling*, *Shaanxi* 712100, *China*)

Abstract: In allusion to the efficient vibration energy recovery problem of a wheeled electric tractor, a variable stiffness spring was innovatively integrates into the research team's existing vibration energy feedback device and a method was proposed to match the device's resonance frequency with the road surface excitation frequency, thereby improving energy capture performance. Firstly, the range of road excitation frequency was analyzed based on the road grade and vehicle speed of the electric tractor. Subsequently, a nonlinear 10-degree-of-freedom dynamic model of the variable stiffness vibration energy feedback device was formulated. With the QR decomposition, implicit restart Arnoldi method (IRAM) and adaptive cross approximation algorithm (ACA), the modal frequencies of the device were solved, and the modal evolution law was analyzed by combining these methods with the finite element method. On this basis, the stiffness coefficient of variable stiffness spring was determined, and the frequency matching method for the variable stiffness vibration energy feedback device was proposed. Finally, fixed-frequency and swept-frequency bench tests were conducted to compare the energy capture performance of the fixed and variable stiffness vibration energy feedback devices. The results demonstrated that the variable stiffness spring structure significantly broadened the resonance band of the device, increased the maximum instantaneous output voltage to 52.2 V, and boosted the average output power and electricity generation by 34.4% and 42.8%, respectively, at the same time, it met the vibration reduction requirement for the battery pack. The above research can provide theoretical and technical support for the power supply of electric tractors and it was of great significance to promote the development of its energy-saving technology.

Key words: electric tractor; variable stiffness; frequency matching; vibration energy capture

收稿日期：2025-04-10　修回日期：2025-05-04
基金项目：国家重点研发计划项目(2016YFD0700800)
作者简介：王威(1979—)，男，副教授，博士，主要从事车辆动力学与控制、新能源农业装备设计研究，E-mail：wangwei79912@sina.com

0 引言

新质生产力助推现代农业“向新向绿”发展[1-2]，电动拖拉机作为一种农用动力机械，具有清洁环保、节能高效、控制灵活的优点，然而受高比功率和高比能量电池技术发展的制约，其普遍存在动力不足、续航里程短的应用困难[3-4]。振动馈能装置可以将电动拖拉机行驶环境中的振动能量转换为电能并存储在电池或超级电容中，是补给电动拖拉机电能和延长续驶里程的重要途径[5-7]。

电动拖拉机行驶环境的激励频率具有一定的带宽，定刚度振动馈能装置只有激励频率在系统共振频率附近时，才具有较高俘能效率[8-9]，在实际应用中有一定的局限性。目前，国内外学者对设计与实际应用环境相匹配的高性能振动馈能装置开展了大量研究[10-12]。从现有研究[13-17]来看，非线性变频、双稳态和多稳态振动馈能装置均在一定带宽激励下具有较好的俘能性能，然而主动式非线性变频馈能装置需要外界能量输入，往往导致较高的能量损耗；被动式斜弹簧组合结构一般较为繁琐且在刚度等效时容易产生误差，双涡旋平面弹簧结构具有良好的被动连续变刚度特性，可提升系统在低频宽带激励下的俘能性能，为本研究提供了重要参考，但其存在加工工艺与制造难度较高的不足；双稳态和多稳态馈能装置在势阱跃迁过程中容易产生振动波动和冲击，同时系统参数的设计和控制较为复杂。

鉴于变刚度弹簧（变节距弹簧）具有刚度被动连续变化、结构简单和易加工的特点[18]，能够实现装置模态频率可变、俘能频带拓宽和性能增强的作用，本文将变刚度弹簧应用于课题组现有的压电-机械电磁复合式振动馈能装置[7]，分析装置模态频率的演化规律，提出模态频率与路面激励频率的匹配方法，并结合台架试验验证其俘能性能的提升和电池组的减振要求，以期为电动拖拉机振动能量的高效俘获提供方法。

1 装置结构与动力学建模

基于课题组现有的压电-机械电磁复合式振动馈能装置，引入变刚度弹簧结构，构建电动拖拉机变刚度振动馈能装置，如图 1 所示。装置上方放置动力电池组，下方固定于车架。该装置包含机械电磁和压电 2 部分，利用变刚度弹簧实现模态频率与路面激励频率的匹配，进一步提升装置的俘能性能。在装置振动过程中，变刚度弹簧 1 的刚度连续变化，引起装置整体模态频率连续变化；机械电磁部分通过 2 个单向离合器带动锥齿轮、增速机、发电机单向转动，从而进行发电；压电部分通过杠杆机构使压电材料发生变形，利用正压电效应进行发电。

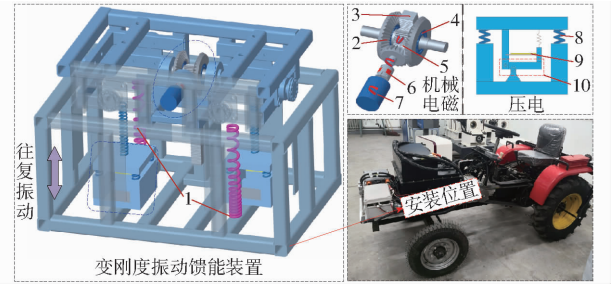


图 1 变刚度振动馈能装置结构图

Fig. 1 Structure diagram of variable stiffness vibration energy feedback device

1. 变刚度弹簧 2. 锥齿轮 3. 齿条 4. 单向滚珠离合器 5. 齿轮 6. 增速器 7. 发电机 8. 弹簧 9. 压电材料 10. 杠杆机构

拖拉机属于非道路车辆，运输和作业时的行驶路面等级通常为 C、D 级，且 D 级路面占比较多[19-20]。因此，本文在 D 级路面条件下以电动拖拉机作业行驶速度 3 ~ 5 km/h[21] 为例分析装置的激励特性。文献[22]谐波叠加法给出了 D 级路面的随机道路模型，该模型可以表示为

$$q(t)=\frac{1}{u}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2G_q(n_0)\left(\frac{n_i}{n_0}\right)^{-w}\Delta n_i}\sin(2\pi f_i t+\theta_{ri})=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2G_q(f_i)\frac{\Delta f_i}{u}}\sin(2\pi f_i t+\theta_{ri}) \tag{1}$$

式中 n_0——参考空间频率，m^{-1}

u——电动拖拉机的速度，m/s

n_i——空间频率，m^{-1}

$G_q(n_0)$——道路粗糙度的等级系数，m^3

f_i——每个小间隔的平均频率，Hz

θ_{ri}——[0,2π]的随机数，rad

$G_q(f_i)$——功率谱密度函数，m^3

Δn_i——空间频率离散步长，m^{-1}

Δf_i——时间频率离散步长，Hz

t——时间，s

w——频谱指数，通常取 2

根据 ISO 8608 中的道路分类[23]，D 类道路的 $G_q(n_0)$ 为 1.024×10^{-3} m^3，参考空间频率 n_0 的范围为 $0.011\ m^{-1}<n_0<2.83\ m^{-1}$，电动拖拉机的路面激励频率与车速和路面空间频率有关，三者之间的关系[24]为

$$f=nu \tag{2}$$

式中 f——路面时间频率，Hz

n——路面空间频率，m^{-1}

由电动拖拉机的行驶速度和参考空间频率的范围计算出电动拖拉机的路面激励频率范围为 (0.009 17 Hz,3.930 56 Hz)。考虑拖拉机的轮胎刚度较大，忽略其弹性形变影响；同时由于后置挂车或

农机具对装置垂直振动的影响较小，予以忽略。分析装置内部结构的运动关系和受力，建立变刚度振动馈能装置的 10 自由度高维非线性动力学模型如图 2 所示。图 2 中，k_{m1}为变刚度弹簧的刚度，N/m；m_b、m_p分别为上框架与电池组、压电上盖板的质量，kg；z_b、z_p、z_2、z_4分别为上框架、压电上盖板和第 1、2 锥齿轮沿 Z 轴的振动位移；y_6、y_g分别为第 3 锥齿轮、直齿圆柱齿轮和单向离合器之间沿 Y 轴的振动位移；x_1、x_3、x_5分别为第 1 和第 3 锥齿轮、齿轮和齿条、第 2 和第 3 锥齿轮的啮合位移；k_{m2}、k_p、c_p分别为压电部分弹簧的刚度、等效刚度、阻尼；k_7、k_8分别为单向离合器的刚度，N/m；k_i、e_i、c_i、b_i分别为各锥齿轮啮合副的啮合刚度、综合传动误差、啮合阻尼、齿轮间隙（$i=1,3,5$）；k_j、c_j分别为各锥齿轮轴承的支撑刚度、支撑阻尼（$j=2,4,6$）；R_p为负载电阻，Ω。

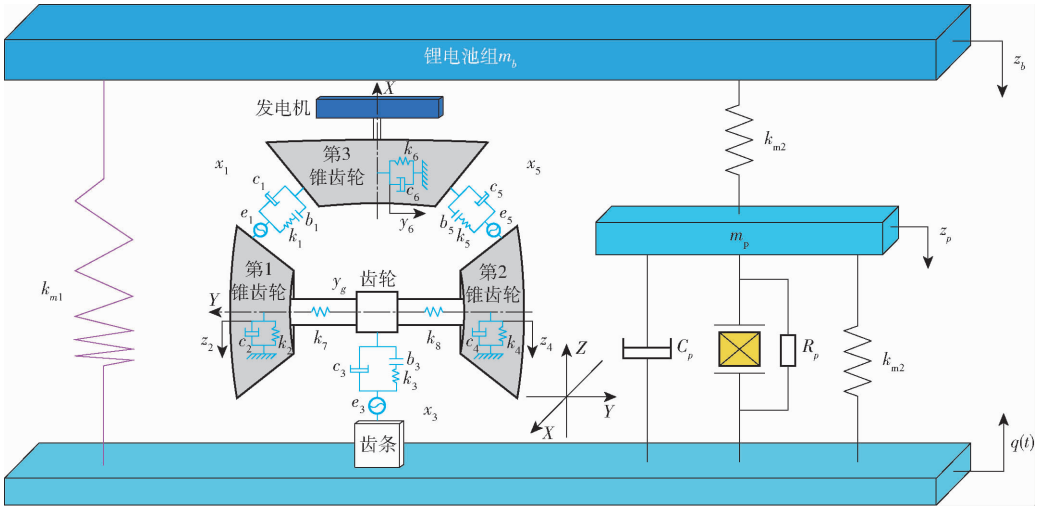


图 2　变刚度振动馈能装置的动力学模型

Fig. 2　Dynamic model of variable stiffness vibration energy feedback device

变刚度弹簧的非线性渐硬弹簧模型可表示为[25]

$$k_{m1}=k_{h1}+k_{h3}x^2 \tag{3}$$

式中　k_{h1}、k_{h3}——弹簧的劲度系数

x——弹簧压缩量，m

各锥齿轮啮合副的综合传动误差呈现周期性变化，可表示为[26]

$$e_i(t)=e_{mi}\sin(\omega_i t+\varphi_e) \tag{4}$$

式中　ω_i——角频率，rad/s

e_{mi}——齿轮啮合副传动误差的谐波幅值，m

φ_e——齿轮啮合副传动误差的初始相位，rad

相对位移 x_1、x_3、x_5和 y_g可分别表示为

$$\begin{cases} x_1=r_2\theta_2\cos\alpha-r_3\theta_3\cos\alpha+z_2\cos\alpha-y_6\cos\alpha-e_1(t) \\ x_3=z_b\cos\alpha-r_1\theta_1-e_3(t)-q(t) \\ x_5=r_3\theta_3\cos\alpha-r_4\theta_4\cos\alpha+y_6\cos\alpha-z_4\cos\alpha-e_5(t) \\ y_g=r_g(\theta_2-\theta_4) \end{cases} \tag{5}$$

式中　α——每个锥齿轮法向压力角，取 20°

θ_1——齿轮旋转角度，(°)

θ_2、θ_3、θ_4——第 1、2、3 锥齿轮旋转角度，(°)

r_1、r_2、r_3、r_4——齿轮和 3 个锥齿轮啮合半径，m

r_g——齿轮轴半径，m

齿轮副啮合阻尼 c_1、c_3和 c_5可表示为[27]

$$c_i=2\xi\sqrt{\frac{k_i m_{zd} m_{cd}}{m_{zd}+m_{cd}}}\quad(i=1,3,5) \tag{6}$$

式中　ξ——齿轮啮合副的啮合阻尼比

m_{zd}——齿轮啮合副主动齿轮的质量，kg

m_{cd}——齿轮啮合副从动齿轮的质量，kg

综上，电动拖拉机变刚度振动馈能装置的动力学微分方程为

$$\begin{cases} m_b\ddot{z}_b+k_{m1}(z_b-q(t))+k_{m2}(z_b-z_p)+k_3f_3+c_3\dot{x}_3=0 \\ m_p\ddot{z}_p-k_{m2}(z_b-z_p)+k_p(z_p-q(t))+ \\ \quad c_p(\dot{z}_p-\dot{q}(t))+g_pV_p=0 \\ C_p\dot{V}_p-g_p\dot{z}_p+V_p/R_p=0 \\ J_1\ddot{\theta}_1-r_1(k_3f_3+c_3\dot{x}_3)+k_7(\theta_1-\theta_2)=0 \\ J_2\ddot{\theta}_2-k_7(\theta_1-\theta_2)+r_2(k_1f_1+c_1\dot{x}_1)\cos\alpha=0 \\ m_2\ddot{z}_2+k_2z_2+c_2\dot{z}_2+(k_1f_1+c_1\dot{x}_1)\sin\beta=0 \\ m_4\ddot{z}_4+k_4z_4+c_4\dot{z}_4-(k_5f_5+c_5\dot{x}_5)\sin\beta=0 \\ m_6\ddot{y}_6+k_6y_6+c_6\dot{y}_6-(k_1f_1+c_1\dot{x}_1-k_5f_5-c_5\dot{x}_5)\sin\beta=0 \\ J_3\ddot{\theta}_3-r_3(k_1f_1+c_1\dot{x}_1-k_5f_5-c_5\dot{x}_5)\cos\alpha=0 \\ J_4\ddot{\theta}_4-r_4(k_5f_5+c_5\dot{x}_5)\cos\alpha=0 \end{cases} \tag{7}$$

式中　g_p——压电耦合系数

J_1、J_2、J_3、J_4——齿轮和 3 个锥齿轮的惯性矩

V_p——压电部分的输出电压,V

f_1——齿轮和齿条的齿轮间隙非线性函数

f_3——第 1、3 锥齿轮的齿轮间隙非线性函数

f_5——第 2、3 锥齿轮的齿轮间隙非线性函数

β——锥齿轮基准锥角,(°)

C_p——压电材料的等效电容

将式(5)代入式(7),得到消除刚体位移后变刚度振动馈能系统的动力学微分方程为

$$\begin{cases}
m_b\ddot{z}_b + k_{m1}(z_b - q(t)) + k_{m2}(z_b - z_p) + k_3 f_3 + c_3\dot{x}_3 = 0\\
m_p\ddot{z}_p - k_{m2}(z_b - z_p) + k_p(z_p - q(t)) + c_p(\dot{z}_p - \dot{q}(t)) + g_p V_p = 0\\
C_p\dot{V}_p - g_p\dot{z}_p + V_p/R_p = 0\\
\dot{x}_3 + \dfrac{r_1^2}{J_1}(k_3 f_3 + c_3\dot{x}_3) - \dfrac{r_1 k_7 y_g}{J_1 r_g} + \ddot{e}_3(t) + \ddot{q}(t) - \ddot{z}_b\cos\alpha = 0\\
m_2\ddot{z}_2 + k_2 z_2 + c_2\dot{z}_2 + (k_1 f_1 + c_1\dot{x}_1)\sin\beta = 0\\
m_4\ddot{z}_4 + k_4 z_4 + c_4\dot{z}_4 - (k_5 f_5 + c_5\dot{x}_5)\sin\beta = 0\\
m_6\ddot{y}_6 + k_6 y_6 + c_6\dot{y}_6 - (k_1 f_1 + c_1\dot{x}_1)\sin\beta + (k_5 f_5 + c_5\dot{x}_5)\sin\beta = 0\\
\ddot{x}_1 + \left(\dfrac{r_2^2\cos^2\alpha}{J_2} + \dfrac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}\right)(k_1 f_1 + c_1\dot{x}_1) - \dfrac{r_2 k_7 y_g\cos\alpha}{J_2 r_g} + \ddot{y}_6\cos\alpha - \ddot{z}_2\cos\alpha - \dfrac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}(k_5 f_5 + c_5\dot{x}_5) + \ddot{e}_1(t) = 0\\
\dot{x}_5 - \dfrac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}(k_1 f_1 + c_1\dot{x}_1) + \left(\dfrac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3} + \dfrac{r_4^2\cos^2\alpha}{J_4}\right)(k_5 f_5 + c_5\dot{x}_5) + \ddot{z}_4\cos\alpha - \ddot{y}_6\cos\alpha + \ddot{e}_5(t) = 0\\
\ddot{y}_g + \left(\dfrac{1}{J_1} + \dfrac{1}{J_2}\right)k_8 y_g - \dfrac{r_1 r_g}{J_1}(k_3 f_3 + c_3\dot{x}_3) - \dfrac{r_2 r_g\cos\alpha}{J_2}(k_1 f_1 + c_1\dot{x}_1) = 0
\end{cases} \tag{8}$$

其矩阵形式可以表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{X} = \overline{\boldsymbol{F}} \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{X} = [z_b, z_p, V_p, x_3, z_2, z_4, y_6, x_1, x_5, y_g]^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}
m_b & & & & & & & & & \\
 & m_p & & & & & & & & \\
 & -\dfrac{g_p h}{C_p} & 1 & & & & & & & \\
-\cos\alpha & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & m_2 & & & & & \\
 & & & & & m_4 & & & & \\
 & & & & & & m_6 & & & \\
 & & & & -\cos\alpha & & \cos\alpha & 1 & & \\
 & & & & & \cos\alpha & -\cos\alpha & & 1 & \\
 & & & & & & & & & 1
\end{bmatrix}$$

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \begin{bmatrix}
\dfrac{k_{m1}\bar{q}_t + k_3\bar{f}_3}{\omega_{Di}^2}\\
\dfrac{k_p\bar{q}_t - g\bar{V}_p}{\omega_{Di}^2}\\
\dfrac{g_p\ddot{z}_{ps}}{C_p m_p g}\\
\ddot{z}_{bs}\cos\alpha - \dfrac{r_1^2 k_3\bar{f}_3}{J_1\omega_{Di}^2} - \ddot{e}_3 - \ddot{q}_t\\
-\dfrac{k_1\bar{f}_1\sin\beta}{m_2\omega_{Di}^2}\\
\dfrac{k_1\bar{f}_1\sin\beta - k_5\bar{f}_5\sin\beta}{m_4\omega_{Di}^2}\\
\dfrac{k_5\bar{f}_5\sin\beta}{m_6\omega_{Di}^2}\\
\dfrac{r_2^2 k_5\bar{f}_5\cos^2\alpha}{J_2\omega_{Di}^2} - \left(\dfrac{r_1^2\cos^2\alpha}{J_1} + \dfrac{r_2^2\cos^2\alpha}{J_2}\right)\dfrac{\bar{k}_1\bar{f}_1}{\omega_{Di}^2} + \ddot{z}_{2s}\cos\alpha - \ddot{y}_{gs}\cos\alpha - \ddot{e}_1\\
\dfrac{r_2^2 k_1\bar{f}_1\cos^2\alpha}{J_2\omega_{Di}^2} - \left(\dfrac{r_2^2\cos^2\alpha}{J_2} + \dfrac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}\right)\dfrac{k_5\bar{f}_5}{\omega_{Di}^2} + \ddot{y}_{gs}\cos\alpha - \ddot{z}_{4s}\cos\alpha - \ddot{e}_5\\
\dfrac{r_1 r_g k_1\bar{f}_1\cos\alpha}{J_1\omega_{Di}^2} + \dfrac{r_4 r_g k_3\bar{f}_3}{J_4\omega_{Di}^2}
\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix}
\dfrac{k_{m1}+k_{m2}}{m_b\omega_{Di}^2} & -\dfrac{k_{m2}}{m_b\omega_{Di}^2} & & & & & & & & \\
-\dfrac{k_{m2}}{m_p\omega_{Di}^2} & \dfrac{k_{m2}+k_p}{m_p\omega_{Di}^2} & \dfrac{Q_c}{m_p\omega_{Di}^2} & & & & & & & \\
 & & & & & & & & -\dfrac{r_1 k_7}{J_1 r_g\omega_{Di}^2} & \\
 & & & \dfrac{k_2}{m_2\omega_{Di}^2} & & & & & & \\
 & & & & \dfrac{k_4}{m_4\omega_{Di}^2} & & & & & \\
 & & & & & \dfrac{k_6}{m_6\omega_{Di}^2} & & & & \\
 & & & & & & & & -\dfrac{r_2 k_7\cos\alpha}{J_2 r_g\omega_{Di}^2} & \\
 & & & & & & & & \left(\dfrac{1}{J_1}+\dfrac{1}{J_2}\right)\dfrac{k_7}{\omega_{Di}^2}
\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}
 & & \frac{c_3}{m_3\omega_{Di}} & & & & & & & \\
\frac{c_p}{m_p\omega_{Di}} & & & & & & & & & \\
 & \frac{1}{R_pC_p\omega_{Di}} & & & & & & & & \\
 & & \frac{r_1^2c_3}{J_1\omega_{Di}} & & & & & & & \\
 & & & \frac{c_2}{m_2\omega_{Di}} & & & \frac{c_1\sin\beta}{m_1\omega_{Di}} & & & \\
 & & & & \frac{c_6}{m_6\omega_{Di}} & & -\frac{c_1\sin\beta}{m_3\omega_{Di}} & & \frac{c_5\sin\beta}{m_6\omega_{Di}} & \\
 & & & & & \frac{c_4}{m_4\omega_{Di}} & & & -\frac{c_5\sin\beta}{m_4\omega_{Di}} & \\
 & & & & & & \frac{c_1}{\omega_{Di}}\left(\frac{r_2^2\cos^2\alpha}{J_2}+\frac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}\right) & & \frac{c_5r_3^2\cos^2\alpha}{J_3\omega_{Di}} & \\
 & & & & & & -\frac{c_1}{\omega_{Di}}\frac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}\frac{c_5}{\omega_{Di}} & & \frac{r_3^2\cos^2\alpha}{J_3}+\frac{r_4^2\cos^2\alpha}{J_4} & \\
 & & \frac{r_1r_gc_3}{J_1\omega_{Di}} & & & & -\frac{r_2r_gc_1\cos\alpha}{J_2} & & &
\end{bmatrix}$$

式中　$\boldsymbol{X}$——位移矩阵

$\boldsymbol{M}$——质量矩阵

$\boldsymbol{K}$——刚度矩阵

$\boldsymbol{C}$——阻尼矩阵

$\overline{\boldsymbol{F}}$——载荷列阵

2　变刚度振动馈能装置模态研究

针对变刚度振动馈能装置的可变模态频率与路面激励频率的匹配问题，需分析模态频率随弹簧刚度变化的演化规律，从而确定弹簧刚度的变化范围。

2.1　模态演化规律分析

为了分析装置模态频率随弹簧刚度的演化规律，需求解系统的广义特征值和特征向量，式(9)的特征方程表达为

$$(\boldsymbol{K}-\boldsymbol{\lambda M})\boldsymbol{v}=0 \tag{10}$$

式中　$\boldsymbol{\lambda}$——广义特征值

$\boldsymbol{v}$——模态振型

令矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{KM}^{-1}$，由于质量矩阵和刚度矩阵均为稀疏矩阵，且含有刚度参数，为了提高求解精度与运算效率，基于 Matlab 软件平台利用 QR 分解算法的隐式重启 Arnoldi 法进行求解，并结合 ACA 算法对矩阵构建低秩近似，进一步加速特征值的求解过程。在算法迭代过程中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的收敛性是通过检查其下三角部分是否趋近于零来进行判断。

装置前 10 阶模态频率 $\omega_1\sim\omega_{10}$ 与变刚度弹簧刚度 k_{m1} 的关系式(保留 5 位有效数字，仿真参数见表 1)为

表 1　仿真中使用的动力学参数

Tab. 1　Dynamics parameters used in simulation

参数	数值	参数	数值	参数	数值
m_b/kg	140	J_3/(kg·m^2)	2.05×10^{-3}	k_5/(N·m^{-1})	$3.991\,0\times10^6$
m_p/kg	3.516 8	J_4/(kg·m^2)	8.20×10^{-4}	k_6/(N·m^{-1})	$1.111\,5\times10^4$
m_2/kg	0.933 0	k_{m2}/(N·m^{-1})	1.032×10^4	k_7/(N·m·rad^{-1})	3.5×10^4
m_4/kg	0.933 0	k_p/(N·m^{-1})	$7.189\,5\times10^4$	k_8/(N·m·rad^{-1})	3.5×10^4
m_6/kg	0.337 8	k_1/(N·m^{-1})	$3.991\,0\times10^6$	r_1/m	0.022 5
m_r/kg	0.802 0	k_2/(N·m^{-1})	$1.111\,5\times10^4$	r_2/m	0.045 7
J_1/(kg·m^2)	5.66×10^{-5}	k_3/(N·m^{-1})	$2.813\,0\times10^6$	r_3/m	0.018 7
J_2/(kg·m^2)	8.20×10^{-4}	k_4/(N·m^{-1})	$1.111\,5\times10^4$	r_4/m	0.045 7

$$\begin{cases}\omega_1=0\\ \omega_2=0\\ \omega_3=0\\ \omega_4=0\\ \omega_5=\left[\dfrac{k_{m1}}{18\,200}-9.578\,3\times(32.906k_{m1}^2-3.921\,1\times10^8k_{m1}+1.168\,1\times10^{16})^{\frac{1}{2}}\times10^{104}+3\,275.6\right]^{\frac{1}{2}}\\ \omega_6=\left[\dfrac{k_{m1}}{18\,200}+9.578\,3\times(32.906k_{m1}^2-3.921\,1\times10^8k_{m1}+1.168\,1\times10^{16})^{\frac{1}{2}}\times10^{104}+3\,275.6\right]^{\frac{1}{2}}\\ \omega_7=40\,983-\dfrac{3.979\,5\times10^5}{(240.10k_{m1}+22\,454)^{\frac{1}{3}}}-\left[(30.012k_{m1}+28\,067)^{\frac{1}{3}}\times10^3-\dfrac{6.892\,7\times10^5}{(240.10k_{m1}+22\,454)^{\frac{1}{3}}(1-k_{m1})}\right]^{\frac{1}{2}}\\ \omega_8=\dfrac{6.892\,7\times10^5}{(240.10k_{m1}+22\,454)^{\frac{1}{3}}(1-k_{m1})}-\dfrac{7.959\,1\times10^5}{(240.10k_{m1}+22\,454)^{\frac{1}{3}}-[(30.013k_{m1}+2\,806.8)^{\frac{1}{3}}+40.983]^{\frac{1}{2}}}\\ \omega_9=\dfrac{7.959\,1\times10^5}{(240.10k_{m1}+22\,454)^{\frac{1}{3}}}+[(240.10k_{m1}+22\,454)^{\frac{1}{3}}+40.983]^{\frac{1}{2}}\times10^3\\ \omega_{10}=\dfrac{(1.414\,2\times55\,453\times10^{11})^{\frac{1}{2}}}{4\,096.0}\end{cases}\tag{11}$$

计算结果中出现了装置前 4 阶模态为 0 的现象，一方面由于刚度矩阵的秩为 8，根据秩-零化度定理[28]，刚度矩阵存在 2 个线性无关的向量，对应装置存在 2 个刚体模态；另一方面，另有 2 个数值较小的模态频率在构建低秩近似的算法迭代过程中被近似为 0，因此计算出的前 4 阶模态为 0。基于振动馈能装置对电池组的支撑作用与最大限位要求，计算出变刚度弹簧 k_{m1} 的取值应不小于 2 000 N/m。将 $k_{m1}=2\,000$ N/m 代入式(11)的 10 个关系式，可以得到只有第 5 阶模态频率 $\omega_5=1.468\,35$ Hz 在路面激励频率范围(0.009 17 Hz，3.930 56 Hz)内。图 3 反映了第 5 阶模态频率随弹簧刚度的变化规律。

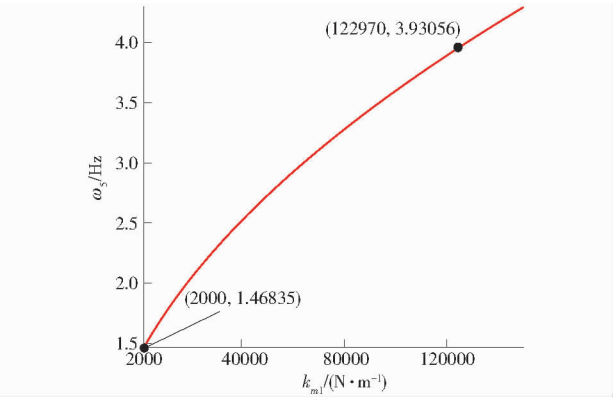


图 3 第 5 阶模态频率随弹簧刚度的变化曲线

Fig. 3 Variation curve of the fifth-order modal frequency with spring stiffness

为了使装置的第 5 阶模态频率与路面激励频率的重合域最大，令弹簧刚度 $k_{m1}\in[2\,000$ N/m，122 970 N/m]，此时对应的第 5 阶模态频率范围 $\omega_5\in[1.468\,35$ Hz，3.930 56 Hz]，即变刚度振动馈能装置能发生共振的频率区间。

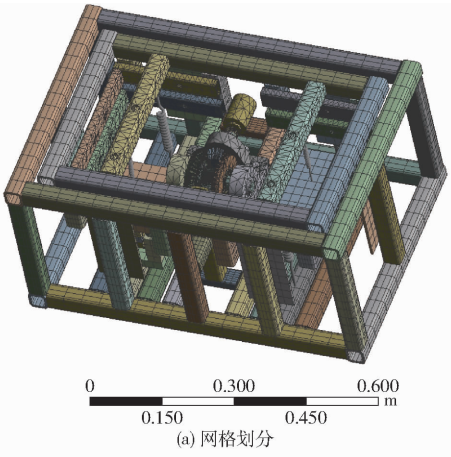
2.2 有限元分析

为了研究并验证弹簧刚度变化与装置模态频率范围的映射关系，采用多软件联合仿真方法建立装置的有限元模型，分析装置的前 10 阶模态频率。将变刚度振动馈能装置的 Creo 三维模型导入 ANSYS Workbench 中建立有限元模型，采用实体单元对模型进行网格划分，如图 4a 所示，共生成 111 024 个单元，得到 293 677 个节点，网格质量满足计算精度要求。根据弹簧刚度 k_{m1} 取值范围，令 $k_{m1}=2\,000$ N/m 得到第 1 次模态分析结果，如图 4b 所示。

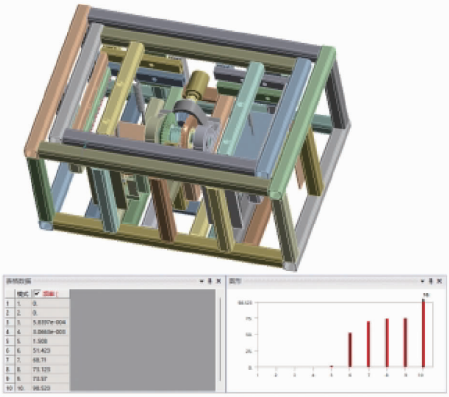
由第 1 次仿真结果可知，仅第 5 阶模态频率 ω_5 在路面激励的频率范围(0.009 17 Hz，3.930 56 Hz)内。对 $k_{m1}\in[2\,000$ N/m，122 970 N/m] 进行间隔为 10 000 N/m 的递增取值，再进行 12 次模态分析。将得到的 13 个第 5 阶模态频率的仿真结果进行多项式拟合，绘制其随弹簧刚度 k_{m1} 的变化曲线，并与 Matlab 的计算结果进行对比，如图 5 所示。

当弹簧刚度 k_{m1} 取值范围为[2 000 N/m，122 970 N/m]时，装置第 5 阶模态频率 ω_5 的 Matlab 计算结果与 ANSYS 有限元分析结果分别是[1.468 35 Hz，3.930 56 Hz]与[1.508 00 Hz，3.930 05 Hz]。结果的最大误差出现在 $k_{m1}=69\,827$ N/m 处，此时 ω_5 的 Matlab 计算结果与 ANSYS 有限元分析结果分别为 3.190 35 Hz 和 3.090 18 Hz，误差为 3.2%。

综上，本研究融合 QR 分解、隐式重启 Arnoldi 法和 ACA 算法的模态频率求解结果与有限元分析



(a) 网格划分



(b) 第1次模态分析结果

图 4　有限元模型及求解

Fig. 4　Finite element model and solution

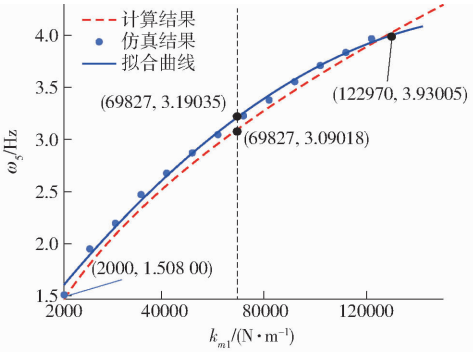


图 5　第 5 阶模态频率随弹簧刚度变化的对比图

Fig. 5　Comparison plot of fifth-order modal frequency as a function of spring stiffness

结果吻合度较好且具有足够的精度。实测变刚度弹簧的可压缩范围为[0,143 mm],获取的弹簧刚度 $k_{m1}\in[2\,000\ \text{N/m},122\,970\ \text{N/m}]$,将二者上下限的对应关系代入式(3)可求取劲度系数,进而得到变刚度弹簧 k_{m1} 的表达式为

$$k_{m1}=2\,000+5\,915\,692.7x^2 \tag{12}$$

3　台架试验

3.1　试验台搭建与试验方案

为测试提出的馈能装置的俘能性能,依据式(12)表达的弹簧刚度特性加工了变刚度弹簧,参数如表 2 所示,并将其安装于课题组现有的馈能样机内,形成变刚度振动馈能装置样机,如图 6 所示。搭建的试验台及其配置如图 7 所示。选用振动试验台作为激励源,进行谐波定频试验和扫频试验,测试分析定、变刚度振动馈能装置在定频与扫频试验过程中的俘能性能。利用变阻器模拟外部负载,示波器采集电压信号,同时在电池组上安装加速度传感器,通过振动测试仪采集其加速度信号,并传送到 PC 机上。设置外部负载为 50 Ω,基于电动拖拉机行驶的路面等级,设置谐波激励振动幅度为 4 mm。定频试验中,在电动拖拉机的激励频带内设置振动试验台的谐波激励频率分别为 1.5、2、2.5 Hz;扫频试验中,在电动拖拉机的激励频带内设置振动试验台的扫频频率为 1.5 ~ 3.9 Hz,步长为 0.1 Hz/s。

表 2　变刚度弹簧参数

Tab. 2　Parameters of variable stiffness spring

参数	数值	参数	数值
自由长度 L/mm	308	支撑圈数 n_2	3
外径 D/mm	32	有效圈数 n_1	30
内径 D_1/mm	22	刚度范围/(N·m^{-1})	2 000 ~ 122 970
线径 d/mm	5		

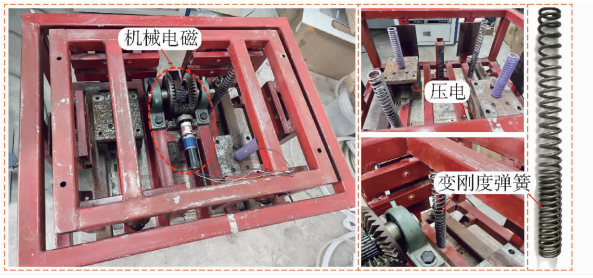


图 6　变刚度振动馈能装置的样机实物图

Fig. 6　Prototype drawing of variable stiffness vibration energy feedback device

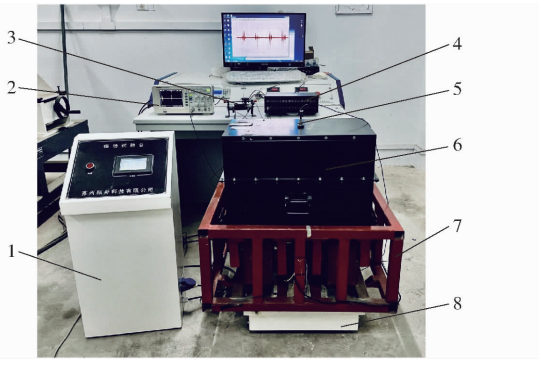


图 7　搭建的试验台及其配置

Fig. 7　Test bench and its configuration

1. 振动台　2. 示波器　3. 滑动变阻器　4. 振动测试仪　5. 加速度传感器　6. 电池组　7. 样机　8. 振动台

3.2　结果分析

在定频和扫频试验中,由示波器记录的定、变刚

度振动馈能装置的瞬时输出电压如图 8 所示，基于外部负载 50 Ω 计算出对应的瞬时输出功率如图 9 所示。由图 8a～8c 可知，定频试验中定刚度振动馈能装置的输出电压波形未出现持续且规律性的高电压，即所设置的 3 个激励频率未与其固有频率相接近而发生共振；对图 9a～9c 取平均值并进行多项式

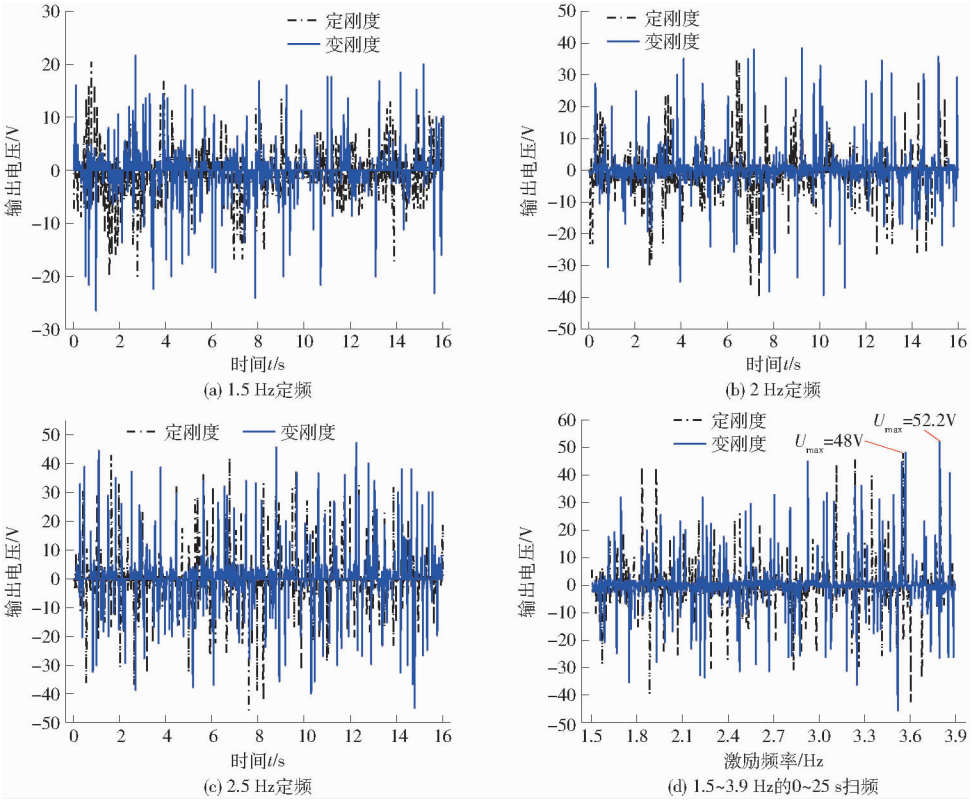


图 8 瞬时输出电压试验结果

Fig. 8 Instantaneous output voltage test results

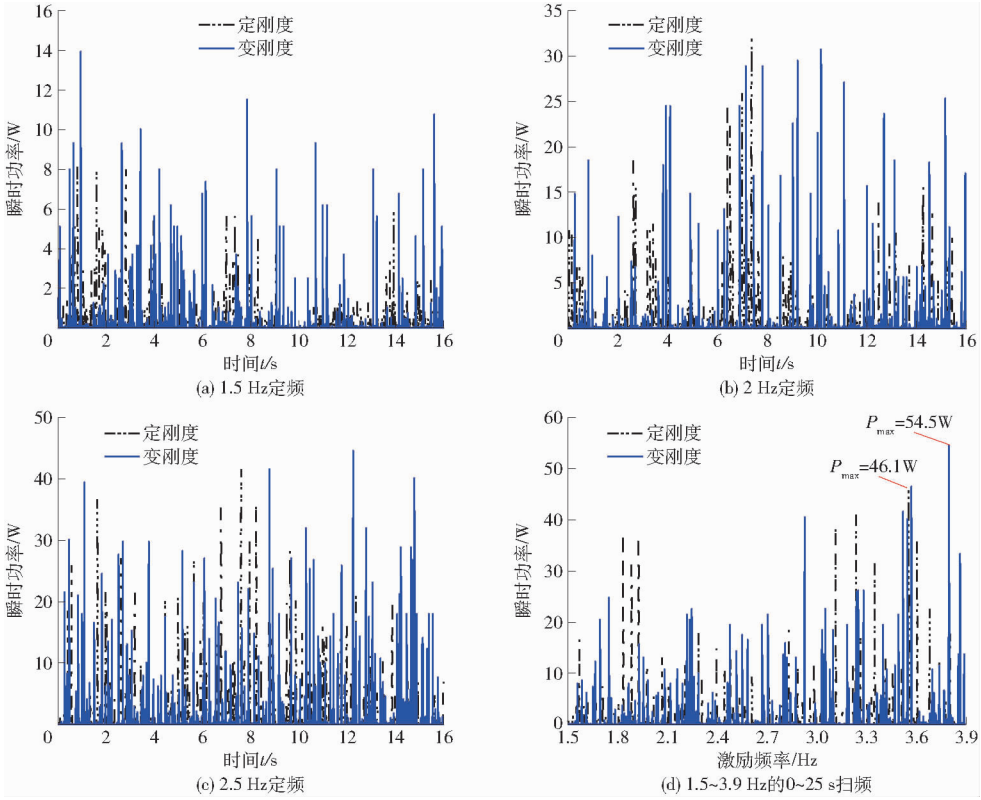


图 9 瞬时输出功率

Fig. 9 Instantaneous output power

曲线拟合，得到平均输出功率曲线如图 10 所示，定、变刚度振动馈能装置的平均输出功率分别为 0.224、0.525、1.024 W 和 0.301、0.714、1.412 W，变刚度振动馈能装置相比于定刚度馈能装置平均输出功率分别提升 34.4%、36% 和 37.9%。因此，在定频试验中，变刚度振动馈能装置通过模态演化提升了俘能性能。

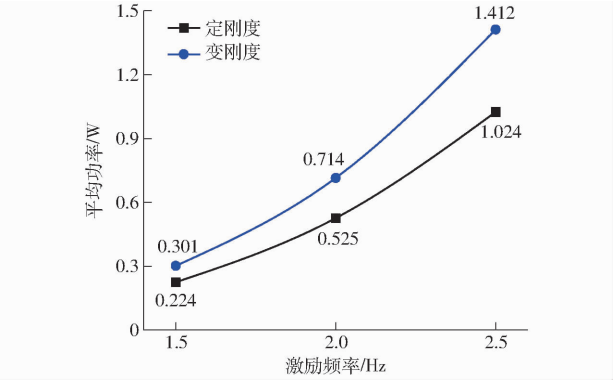


图 10　平均输出功率

Fig. 10　Average output power

由图 9d 的瞬时输出功率曲线积分得到的扫频试验定、变刚度振动馈能装置 0～25 s 的发电量分别为 23.676 J 与 33.798 J，即变刚度振动馈能装置的发电量提升了 42.8%；由振动测试仪采集变刚度振动馈能装置电池组的加速度信号如图 11 所示，电池组受到的最大加速度为 3.26 m/s^2，远低于 ISO 12405－3 中规定的电池组 1.44 g 最大加速度[29]。因此，在扫频试验中，变刚度振动馈能装置在满足电池组减振要求下具有较好的拓频俘能性能。

综合分析定频与扫频试验结果，定、变刚度振动馈能装置的最大瞬时电压和最大瞬时功率均出现在扫频试验中，如图 8d、9d 所示，分别为 48、52.2 V 和 46.1、54.5 W；与定刚度振动馈能装置相比，变刚度振动馈能装置在定频试验中，由于模态的连续演化，平均输出功率提高 34.4%～37.9%；而在扫频试验中，得益于其拓频俘能特性，发电量提高 42.8%，同时满足电池组的减振要求。

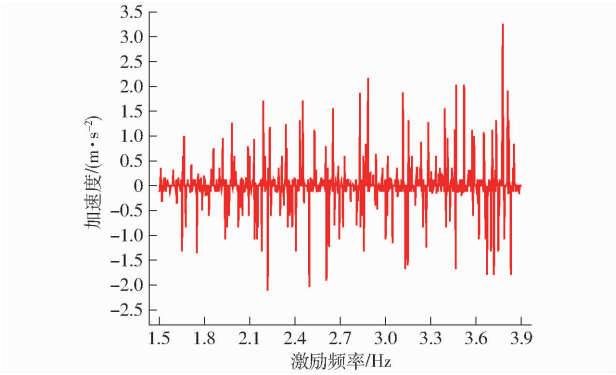


图 11　电池组的加速度

Fig. 11　Acceleration of battery pack

4　结论

（1）提出了一种变刚度振动馈能装置的模态频率与路面激励频率匹配方法。在分析电动拖拉机行驶路面激励频率动态变化范围的基础上，建立了变刚度振动馈能装置的动力学模型，通过构建融合隐式重启 Arnoldi 法、自适应交叉近似算法和有限元仿真相结合的模态分析框架，揭示了装置模态频率随弹簧刚度变化的演化规律，确定了模态频率与路面激励频率匹配下变刚度弹簧的劲度系数。

（2）开展了谐波定频与扫频台架试验，对比研究了定、变刚度振动馈能装置的俘能性能。定频试验表明，相比于定刚度振动馈能装置，变刚度振动馈能装置的平均输出功率提升 34.4%～37.9%，揭示了变刚度振动馈能装置通过模态演化提升了俘能性能；扫频试验表明，变刚度振动馈能装置的发电量提升 42.8%，揭示了变刚度振动馈能装置在满足电池组减振要求下具有较好的拓频俘能性能。研究可实现电动拖拉机振动能量的高效俘获，为其电能补给提供新理论与技术创新路径，对推动电动拖拉机节能技术的高质量发展具有重要意义。

参　考　文　献

[1]　黄斌，孔祥智. 农业新质生产力赋能农民增收：理论机制与实践路径[J]. 中国农业大学学报(社会科学版)，2025，42：1－13.
HUANG Bin，KONG Xiangzhi. New quality agricultural productive forces empower farmers income：theoretical mechanism and practical path[J]. Journal of China Agricultural University(Social Sciences)，2025，42：1－13.（in Chinese）

[2]　徐立友，张俊江，闫祥海，等. 农业装备电动化技术研究综述[J]. 农业机械学报，2023，54(9)：1－12.
XU Liyou，ZHANG Junjiang，YAN Xianghai，et al. Review of research for agricultural equipment electrification technology[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2023，54(9)：1－12.（in Chinese）

[3]　李利桥，高宗余，聂晶. 电动拖拉机混合电源负载自适应能量管理策略研究[J]. 农业机械学报，2024，55(9)：459－469.
LI Liqiao，GAO Zongyu，NIE Jing. Load-adaptive energy management strategy for electric tractor based on hybrid power source[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2024，55(9)：459－469.（in Chinese）

[4]　LUO H Z，XIE B，TONG K Y，et al. Energy-saving drive control strategy for electric tractors based on terrain parameter identification[J]. Applied Energy，2024，376：124230.

[5] 石慧荣,左存胜,高全福.随动压电磁耦合能量采集器的组合共振分析[J].振动与冲击,2024,43(3):209 - 217,226.
SHI Huirong, ZUO Cunsheng, GAO Quanfu. Combined resonance analysis of a servo piezoelectric-magnetic coupled energy harvester[J]. Journal of Vibration and Shock, 2024,43(3):209 - 217,226. (in Chinese)

[6] JIN F Y, ZANG C P, XING G P, et al. Resonant peak reduction of a rotor system based on gradually variable stiffness of supports with shape memory alloy springs[J]. Journal of Sound and Vibration,2024,591:118626.

[7] WANG X D, WANG Q, WANG W, et al. Performance investigation of piezoelectric-mechanical electromagnetic compound vibration energy harvester for electric tractor[J]. Energy,2023,281:128285.

[8] 汪若尘,焦宇,钱金刚,等.混合悬架半主动控制器设计与试验[J].农业机械学报,2017,48(6):334 - 340.
WANG Ruochen, JIAO Yu, QIAN Jingang, et al. Design and experiment on semi-active controller for hybrid suspension[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017,48(6):334 - 340. (in Chinese)

[9] 吴义鹏,李森,蓝春波,等.压电能量俘获结构及其升频转换技术的发展现状[J].机械工程学报,2022,58(20):27 - 45.
WU Yipeng, LI Sen, LAN Chunbo, et al. Recent development of piezoelectric energy harvesting structures and the technology of frequency up-converting oscillators[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022,58(20):27 - 45. (in Chinese)

[10] 周坤涛,杨涛,葛根,等.变截面压电悬臂梁能量采集器在高斯白噪声激励下的稳态统计特性研究[J].振动工程学报,2024,37(5):864 - 874.
ZHOU Kuntao, YANG Tao, GE Gen, et al. Study on the steady state statistical characteristics of variable-section piezoelectric cantilever energy harvester under Gaussian white noise excitation[J]. Journal of Vibration Engineering, 2024,37(5):864 - 874. (in Chinese)

[11] LAI Z H, XU J C,FANG S T, et al. Energy harvesting from a hybrid piezo-dielectric vibration energy harvester with a self-priming circuit[J]. Energy,2023,273:127205.

[12] 高彦辉.变刚度悬臂梁压电俘能器的理论和有限元仿真研究[D].北京:北京工业大学,2019.
GAO Yanhui. Theoretical and finite element simulation research on piezoelectric energy harvester of cantilever beam with variable stiffness[D]. Beijing: Beijing University of Technology,2019. (in Chinese)

[13] YANG T, HUANG Z, XIE J, et al. Dynamic analysis and energy harvesting of double nonlinear stiffness vibration isolator[J]. Engineering Structures,2025,332:120028.

[14] 韦永祥.低频宽带振动非线性电磁式俘能器设计与实验研究[D].长沙:湖南工业大学,2023.
WEI Yongxiang. Design of nonlinear electromagnetic energy harvester for low-frequency and broadband vibration[D]. Changsha: Hunan University of Technology,2023. (in Chinese)

[15] MINA G, GHADER R, VAHID M. A wide-bandwidth MEMS energy harvester based on a novel voltage-sliding stiffness tunability[J]. Applied Mathematical Modelling,2024,125:16 - 34.

[16] SHEN J W, WAN S, FU J D, et al. A magnetic plucking frequency up-conversion piezoelectric energy harvester with nonlinear energy sink structure[J]. Applied Energy, 2024,376:124326.

[17] 曹永勇.旋转运动能量俘获的非线性动力学特性与机理研究[D].北京:北京科技大学,2023.
CAO Yongyong. Nonlinear dynamic characteristics and mechanism investigation of rotational motion energy harvesting[D]. Beijing: University of Science and Technology Beijing,2023. (in Chinese)

[18] 罗凤,杨忠炯,周立强.变节距悬架弹簧对方程式赛车平顺性的影响[J].中国机械工程,2017,28(24):2971 - 2975.
LUO Feng, YANG Zhongjiong, ZHOU Liqiang. Effects of variable pitch spring on ride comfort of formula student racings[J]. China Mechanical Engineering,2017,28(24):2971 - 2975. (in Chinese)

[19] 陈小亮.大型拖拉机半主动座椅悬架复合自适应模糊控制研究[D].洛阳:河南科技大学,2023.
CHEN Xiaoliang. A composite adaptive fuzzy control of semi-active seat suspension for large tractors[D]. Luoyang: Henan University of Science and Technology,2023.

[20] 闫建国. 基于农田地面不平激励的拖拉机振动特性研究[D].呼和浩特:内蒙古农业大学,2020.
YAN Jianguo. Study on vibration characteristics of tractor based on excitation of agriculture terrain roughness[D]. Hohhot: Inner Mongolia Agricultural University,2020. (in Chinese)

[21] LUO Z, WANG J, WU J, et al. Research on a hydraulic cylinder pressure control method for efficient traction operation in electro-hydraulic hitch system of electric tractors[J]. Agriculture,2023,13(8):1555.

[22] 金红杰,钟岳,臧利国,等. 基于三次样条插值谐波叠加技术的随机路面重构方法研究[J].振动与冲击,2023,42(10):23 - 30,143.
JIN Hongjie, ZHONG Yue, ZANG Liguo, et al. A study on harmonic superposition method based on cubic spline interpolation of random road reconstruction[J]. Journal of Vibration and Shock, 2023,42(10):23 - 30,143. (in Chinese)

[23] ISO 8608: Road vehicles-mechanical vibration-measurement of vibrations of seats in driving position[S].2016.

[24] 陈辉. 车辆-道路非线性耦合系统动力学建模与分析[D]. 兰州:兰州理工大学, 2021.
CHEN Hui. Dynamics modeling and analysis of vehicle-pavement nonlinear coupling system[D]. Lanzhou: Lanzhou University of Technology, 2021. (in Chinese)

(下转第 246 页)

[23] WANG Z, MA F, ZHU Y, et al. Prediction and calibration of black soil modeling parameters based on response surface methodology and machine learning algorithms[J]. Particulate Science and Technology, 2025, 43(4): 534 – 545.
[24] 徐凤英,彭智康,刘庆庭,等. 甘蔗种植机随速播种控制系统设计与试验[J]. 农机化研究, 2025, 47(7): 89 – 94.
XU Fengying, PENG Zhikang, LIU Qingting, et al. Design and test of speed-following seeding control system for sugarcane planter[J]. Journal of Agricultural Mechanization Research, 2025, 47(7): 89 – 94. (in Chinese)
[25] LIU J, CHEN Q, XU H, et al. Inverse design and accurate optimization of layered structured seeding mechanism for sugarcane planters[J]. International Journal of Agricultural & Biological Engineering, 2023, 16(6): 107 – 115.
[26] 颜利民,吴涛,蒋德莉,等. 侧抛式棉秆粉碎还田装置设计与试验[J]. 农业机械学报, 2025, 56(3): 216 – 226.
YAN Limin, WU Tao, JIANG Deli, et al. Design and test of side-throw type cotton stalk crushing and returning device[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2025, 56(3): 216 – 226. (in Chinese)
[27] 蒋德莉,颜利民,陈学庚,等. 纵向型钉齿链式地膜捡拾装置设计与试验[J]. 农业机械学报, 2025, 56(1): 267 – 281.
JIANG Deli, YAN Limin, CHEN Xuegeng, et al. Design and test of longitudinal tooth chain type plastic film collecting device[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2025, 56(1): 267 – 281. (in Chinese)

(上接第 130 页)

[25] 罗尧,王慧. 非线性弹簧阻尼减振装置的探究[J]. 物理与工程, 2011, 21(5): 13 – 16.
LUO Yao, WANG Hui. Study of the nonlinear damping spring shock absorbers[J]. Physics and Engineering, 2011, 21(5): 13 – 16. (in Chinese)
[26] 廖平,魏静,张爱强,等. 一种弧齿锥齿轮时变啮合刚度和传动误差半解析计算方法[J]. 机械传动, 2019, 43(12): 50 – 56.
LIAO Ping, WEI Jing, ZHANG Aiqiang, et al. A semi-analytical calculation method for time-varying meshing stiffness and transmission error of spiral bevel gear[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(12): 50 – 56. (in Chinese)
[27] 李谷雨. 锥齿轮传动系统多状态啮合动力学建模及动态特性研究[D]. 天津:天津工业大学, 2022.
[28] 袁婧. 近世代数观点下高等代数的形式化[D]. 北京:北京邮电大学, 2019.
YUAN Jing. Formalization of advanced algebra in the view of modern algebra[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications, 2019. (in Chinese)
[29] ISO 12405-3: Electrically propelled road vehicles-test specification for lithium-ion traction battery packs and systems-part 3: safety performance requirements[S]. 2014.