doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.10.069

具有多驱动模式的末端铰接三平动并联机构动力学建模与性能分析

梁　栋[1,2]　石浩昊[3]　畅博彦[1,2]　崔满军[1]　张珺鹏[1]

(1. 天津工业大学机械工程学院, 天津 300387; 2. 天津工业大学天津市现代机电装备技术重点实验室, 天津 300387;
3. 天津工业大学航空航天学院, 天津 300387)

摘要: 面向高端制造领域机器人作业环境复杂化及任务多样性需求,研究了一种具有多驱动模式的末端铰接并联机构设计、运动学/动力学建模及性能。基于已有构型,通过构造多种辅助结构,提出一类可实现 8 种驱动模式的三平动并联机构,并进行概念设计。在全关节位置分析基础上,构建多驱动模式下的雅可比矩阵及速度、加速度映射模型,并运用虚功率原理建立多驱动模式下完备的系统动力学模型与其规范式。借助虚拟样机技术,开发 Simscape 多体物理仿真模型,实施多驱动模式下逆动力学仿真,多体仿真与数值计算对比结果表明,力矩最大误差不超过 0.03 N·m,充分验证了多驱动模式下系统动力学模型的正确性。最后,基于操作空间系统动力学模型,评估机器人在不同驱动模式下的局域动态性能,进一步揭示多驱动模式的有效性和先进性。研究结果为该类新型机器人设计、建模、优化及未来实际应用奠定理论基础。

关键词: 多驱动模式并联机构; 动力学建模; 多体仿真试验; 性能分析

中图分类号: TH112　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2025)10-0758-12　　**OSID**:

Dynamic Modeling and Performance Analysis of End-articulated Three-translational Parallel Mechanism with Multiple Driving Modes

LIANG Dong[1,2]　SHI Haohao[3]　CHANG Boyan[1,2]　CUI Manjun[1]　ZHANG Junpeng[1]

(1. *School of Mechanical Engineering*, *Tiangong University*, *Tianjin* 300387, *China*
2. *Tianjin Key Laboratory of Advanced Mechatronics Equipment Technology*, *Tiangong University*, *Tianjin* 300387, *China*
3. *School of Aeronautics and Astronautics*, *Tiangong University*, *Tianjin* 300387, *China*)

Abstract: Oriented by the complex working environment and multi-task requirements of robots in the high-end manufacturing field, a type of end-hinged parallel mechanism with multiple driving modes was studied for its design, kinematic/dynamic modeling, and performance analysis. Based on the existed mechanism, by constructing various auxiliary structures, a 3-DOF translational parallel mechanism that realizing eight driving modes was proposed, and the conceptual design was given. On the premise of positional analysis for the total joints, the Jacobian matrix and the velocity/acceleration mapping models under multiple driving modes were obtained, and a complete system dynamics model under multiple driving modes was established by using the principle of virtual power. By virtue of virtual prototyping technology, a Simscape multi-body physical simulation model was developed to implement inverse dynamics simulation under multiple driving modes. The comparison result between the simulation and numerical calculation indicated that the maximum torque error did not exceed 0.03 N·m, verifying the correctness of the dynamics model under multiple driving modes. Finally, based on the task-space dynamic model of system, the dynamic dexterity index was defined to evaluate the local dynamic performance of the robot under different driving modes to further reveal the effectiveness and advantage of multiple driving modes. The research results can lay a theoretical foundation for the design, modeling, optimization, and practical applications the robot in future.

Key words: multiple drive mode parallel mechanism; dynamic modeling; multi-body simulation experiment; performance analysis

收稿日期: 2024-07-13　修回日期: 2024-09-18

基金项目: 国家自然科学基金项目(52175243、52005368)

作者简介: 梁栋(1985—),男,副教授,博士,主要从事机器人机构学与多体系统动力学研究,E-mail: dongliang@tiangong.edu.cn

0　引言

并联机器人以其高刚度、高精度、高承载能力和良好的动力学特性等优势得到了广泛关注[1]。在实际应用中，少自由度并联机器人因其结构简单、成本低、易于控制等优点而备受青睐[2-6]。然而，其特有的闭链结构亦会导致有限的工作空间和复杂的奇异点[7]，其中，奇异点减少了并联机器人的可用工作空间。

由于并联机构中关节数量远大于其自由度，故仅有部分关节被驱动，而其他关节未被驱动。因此，并联机构有多种潜在驱动方式，即不同的主动关节选择方案。文献[8-9]研究表明，驱动方式显著影响并联机器人工作空间和奇异性。文献[10-11]证明了驱动方式会对平面并联机构动态性能产生影响。在此基础上，文献[12-13]设计了可实现多种驱动模式的平面并联机器人，并进行了运动学性能分析，揭示了多驱动模式优势。因此，通过合理设计传动装置，将驱动力传递给不同的部件，实现驱动方式转换，将有助于提高并联机器人运动性能。

为提高并联机构运动性能，常用方法是冗余方法[14-15]。ZANGANEH 等[16]提出了一种基于 Stewart 平台而构造的冗余驱动并联机构。目前，国内外多家研究团队在冗余驱动并联机构方面取得了一些研究成果[17-19]。但在实际中存在一定缺陷。驱动冗余会引入复杂的动态控制和内力耦合问题[20]，而具有运动冗余的并联机器人逆运动学解则较为复杂[21]。因此，结合前述多驱动模式优势，在无冗余条件下，开展并联机构创新设计，对于提升其性能具有重要意义。

并联机器人动力学分析建模不仅是机器人控制和动力学优化的基础，同时是电机选型的依据。刚体动力学分析方法主要有虚功原理、拉格朗日法、牛顿-欧拉法、凯恩法等，除上述常用动力学方法之外，还有达朗贝尔原理[22]以及哈密顿原理[23]等。基于上述方法，国内外学者开展了一系列研究。祝宏铭[24]将凯恩方程与旋量理论相结合，对一种 3-PRS 并联机器人进行了刚体动力学分析，并进行了仿真。BERNAL 等[25]基于欧拉-拉格朗日建立了6-3-PUS 并联机构的动力学模型，并验证了准确性。梁栋等[26]利用凯恩法完成了冗余驱动平面并联机器人动力学建模。然而，对于多驱动模式并联机器人的高效、高精度动力学建模研究目前仍不足，相关研究亟待开展。

随着电子制造、精密加工等高端制造业的持续发展，机器人作业工况日益复杂化，对其性能提出了更高的要求。为此，本文在已有机构基础上，提出一种具有 8 种驱动模式的并联机构，并进行构型优选和概念设计。运用矢量法和虚功率原理建立可兼顾多种驱动模式的系统完备动力学模型；通过数值计算与多体仿真试验，验证多驱动模式下动力学模型正确性；定义操作空间动态灵巧度指标，对机构多驱动模式下动态性能进行评估，以期为多驱动模式动态性能优化及样机开发奠定理论基础。

1　结构分析与概念设计

为满足三平动并联机器人在多工况、多任务下的应用需求，将设计一种具有多种驱动模式的并联机构，并进行概念设计。

图 1 为作者前期提出的一种末端铰接式三平动并联机构，对其构型做了初步概念设计，并计算了其自由度[27]。

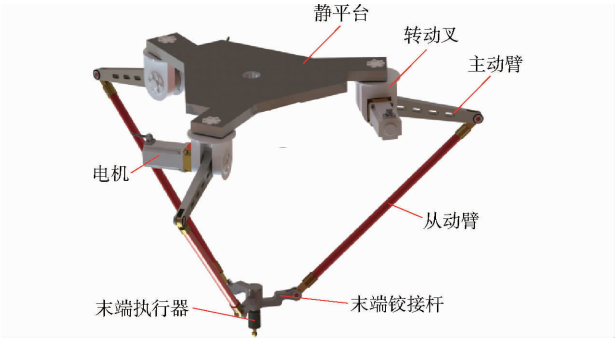

图 1　机器人初始构型

Fig. 1　Initial configuration of robot

在原有机构基础上，通过构造辅助结构，在不改变原有自由度的前提下，实现机构多种驱动方式[10]。如图 2 所示，构造辅助结构的方法包括 2 类，其中，图 2a、2b 为添加平行四边形辅助支链，其添加方法有 2 种。图 2a 构型称为内置型，辅助支链位于支链内侧。相比之下，图 2b 构型称为外置型，辅助支链位于支链外侧，这 2 种拓扑构型在运动学上等价。图 2c 为同步带传动方案，但同步带传动附加部件较多，且传动带为柔性机构，实际应用中需考虑较多的动力学因素。综合考虑，选用图 2a 构型方案。以此为基础，开发多驱动模式并联机构虚拟样机[28]，如图 3 所示。其中，为避免链路之间的干扰，该机构分支中的链路分为 4 层，因此，分支链运动范围可大幅增加。该并联机构由静平台、平行四边形分支、铰接杆和末端执行器组成，尤其是在上端转动叉处有 2 个共线的旋转关节。为满足多驱动模式要求，在转动叉处添加电磁离合开关，通过与不同杆件进行抱闸锁合，以实现目标机构多驱动模式。

不失一般性，以 3 条支链中的任意 1 条为例，将电机放置在位置 $B_i(i=1,2,3)$ 处，通过电磁离合开关控制，可得 2 种驱动方式(图 4)。

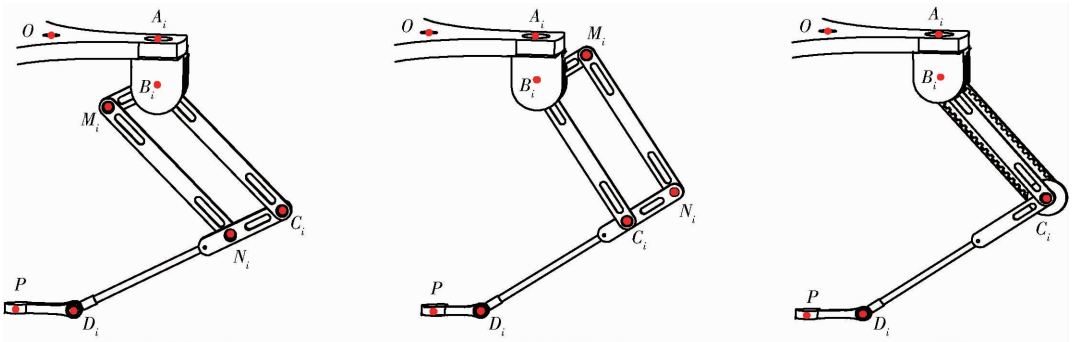

图 2 机构多驱动实现方式

Fig. 2 Implementation method of multi drive mechanism

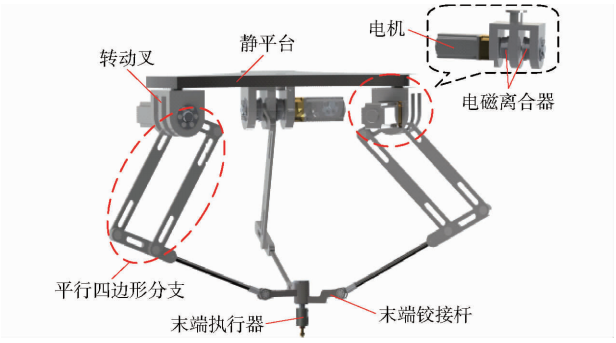

图 3 多驱动并联机器人虚拟样机

Fig. 3 Virtual prototype of multi drive parallel robot

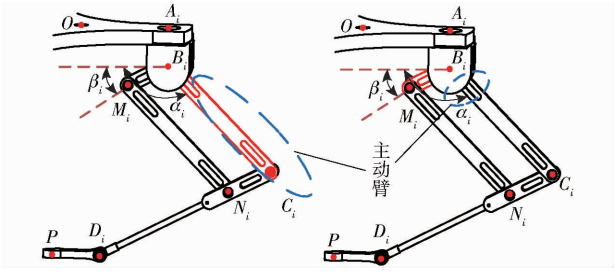

图 4 单个支链 2 种驱动方法

Fig. 4 Two driving methods for a single branch chain

每条支链可以在工作期间使用 2 种驱动方式中的任意一种，图中 α_i 和 β_i 分别为主动长杆和主动短杆驱动角。因此，该并联机构共有 8 种分支驱动方式组合，如表 1 所示。考虑到结构对称性，一些驱动模式具有相似性，可以归为一类。经分析，可筛选得 4 种驱动模式，如表 2 所示。

表 1 机构 8 种驱动模式

Tab. 1 Eight driving modes of mechanism

驱动代号	组合方式	驱动代号	组合方式
1	a－a－a	5	a－b－b
2	a－a－b	6	b－a－b
3	a－b－a	7	b－b－a
4	b－a－a	8	b－b－b

注：a 表示主动长杆，b 表示主动短杆。

2 机构运动学分析

2.1 位置逆解

位置逆解是通过已知末端动平台位姿反求出主动臂转角。借助几何投影法和闭环矢量法进行运动分析。如图 5 所示，在该机构静平台中心 O 处建立静坐标系 $OXYZ$，第 i 条支链上建立局部坐标系 $\{S_i\}$，3 个局部坐标均可由静坐标旋转 φ_i 得到，其中 $\varphi_i=(2i-1)\pi/3\ (i=1,2,3)$。由此可得到局部坐标旋转矩阵，记为 ${}_i^O\boldsymbol{R}\in SO(3)$。

表 2 机构 4 种驱动模式

Tab. 2 Four driving modes of mechanism

驱动模式	分支驱动方法	驱动角
Ⅰ	a－a－a	$(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)$
Ⅱ	a－a－b（与 a－b－a，b－a－a 相似）	$(\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_3)$
Ⅲ	b－b－a（与 b－a－b，a－b－b 相似）	$(\beta_1\ \beta_2\ \alpha_3)$
Ⅳ	b－b－b	$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$

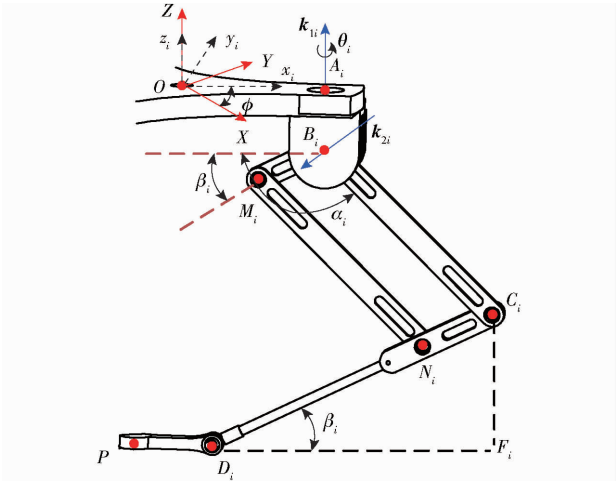

图 5 机构支链示意图

Fig. 5 Schematic of mechanism branch

图 5 中 $\boldsymbol{k}_{1i}$ 为支链竖直转动轴线单位方向矢量，$\boldsymbol{k}_{2i}$ 为支链所在平面单位法矢量。在静平台俯视图（图 6）中，其中末端执行器参考点 P 在俯视图上的投影与点 O、点 A_i 构成三角形 $\triangle OA_iP$，由三角形余弦定理可求得 θ_i。末端点 P 位置在静坐标系下可表示为 $\boldsymbol{P}_O=[x\ y\ z]^{\mathrm{T}}$，在图 6 状态下，将点 P 在静坐标系 OXY 下的投影点坐标转换至局部坐标系 Ox_iy_i 中，其坐标为

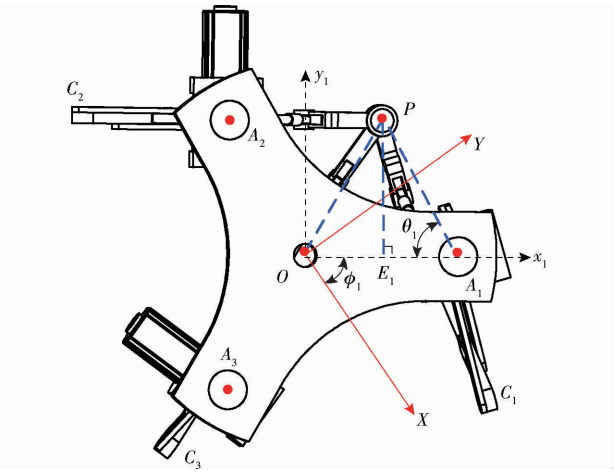

图 6　机构静平台俯视图

Fig. 6　Top view of fixed platform of mechanism

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i \\ -x\sin\varphi_i + y\cos\varphi_i \end{bmatrix} \tag{1}$$

点 A_i 在局部坐标系下坐标为 $[R \quad 0]^{\mathrm{T}}$，由 $\triangle PA_iE_i$ 几何关系，可得

$$\theta_i = \arctan \frac{y\cos\varphi_i - x\sin\varphi_i}{l_{OA_i} - x\cos\varphi_i - y\sin\varphi_i} \tag{2}$$

在静坐标系 $OXYZ$ 下，进一步有

$$\boldsymbol{B}_{iO} = {}_i^O\boldsymbol{R} \begin{bmatrix} l_{OA_i} \\ 0 \\ -l_{A_iB_i} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{C}_{iO} = {}_i^O\boldsymbol{R} \begin{bmatrix} l_{OA_i} - l_{B_iC_i}\cos\theta_i\cos\alpha_i \\ l_{B_iC_i}\sin\theta_i\cos\alpha_i \\ -l_{A_iB_i} - l_{B_iC_i}\sin\alpha_i \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\boldsymbol{D}_{iO} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + {}_i^O\boldsymbol{R} \begin{bmatrix} l_{D_iP}\cos\theta_i \\ -l_{D_iP}\sin\theta_i \\ z \end{bmatrix} \tag{5}$$

由从动臂约束条件 $|\boldsymbol{l}_{D_iC_i}|^2 = l_{D_iC_i}^2$，将式(3)～(5)代入该约束条件并化简，可得

$$A_i + B_i\cos\alpha + C_i\sin\alpha = 0 \tag{6}$$

其中

$$\begin{cases} A_i = l_{OA_i}^2 + l_{D_iP}^2 + l_{B_iC_i}^2 - l_{C_iD_i}^2 + x^2 + y^2 + (z + l_{A_iB_i})^2 - \\ \quad 2l_{D_iP}l_{OA_i}\cos\theta_i - 2x(l_{OA_i}\cos\varphi_i - l_{D_iP}\cos(\varphi_i - \theta_i)) - \\ \quad 2y(l_{OA_i}\sin\varphi_i - l_{D_iP}\sin(\varphi_i - \theta_i)) \\ B_i = 2l_{B_iC_i}(-l_{OA_i}\cos\theta_i + l_{D_iP} + x\cos(\varphi_i - \theta_i) + \\ \quad y\sin(\varphi_i - \theta_i)) \\ C_i = 2l_{B_iC_i}(l_{A_iB_i} + z) \quad (i = 1,2,3) \end{cases}$$

求解式(6)可得主动长杆主动角 α_i 为

$$\alpha_i = 2\arctan \frac{-C_i - \sqrt{B_i^2 + C_i^2 - A_i^2}}{A_i - B_i} \quad (i = 1,2,3) \tag{7}$$

α_i 取逆时针转动为正方向。

由点 C 向 PD_i 延长线作垂线，如图 5 所示，交点记为 F_i，由 $\triangle D_iC_iF_i$ 几何关系，进而可求得主动短杆主动角 β_i 为

$$\beta_i = \arcsin \frac{z_c - z}{l_{C_iD_i}} = \arcsin \frac{-l_{A_iB_i} - l_{B_iC_i}\sin\alpha_i - z}{l_{C_iD_i}} \quad (i = 1,2,3) \tag{8}$$

依据表 1、2 所述驱动模式组合，选择不同关节转角作为主动输入，可获得不同驱动模式。

2.2　速度映射模型

如图 5、6 所示，运用闭环矢量法，矢量 OP 用 $\boldsymbol{u}$ 表示，则闭环矢量方程可表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{l}_{OA_i} + \boldsymbol{l}_{A_iB_i} + \boldsymbol{l}_{B_iC_i} + \boldsymbol{l}_{C_iD_i} + \boldsymbol{l}_{D_iP} \tag{9}$$

对式(9)等号两端同时关于时间求导，可得

$$\dot{\boldsymbol{u}} = (\dot\theta_i\boldsymbol{k}_{1i} + \dot\alpha_i\boldsymbol{k}_{2i}) \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i} + (\dot\theta_i\boldsymbol{k}_{1i} + \dot\beta_i\boldsymbol{k}_{2i}) \times \boldsymbol{l}_{C_iD_i} + \dot\theta_i\boldsymbol{k}_{1i} \times \boldsymbol{l}_{D_iP} = \dot\alpha_i\boldsymbol{k}_{2i} \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i} + \dot\theta_i\boldsymbol{k}_{1i} \times \boldsymbol{l}_{B_iP} + \dot\beta_i\boldsymbol{k}_{2i} \times \boldsymbol{l}_{C_iD_i} \tag{10}$$

对式(10)等号两端同乘 $\boldsymbol{l}_{C_iD_i}^{\mathrm{T}}$，可得机构任一支链中主动长杆所对应的转动角速率为

$$\dot\alpha_i = \frac{\boldsymbol{l}_{C_iD_i}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{l}_{C_iD_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}_{2i} \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i})}\dot{\boldsymbol{u}} \quad (i = 1,2,3) \tag{11}$$

将式(11)整理成矩阵形式，可得主动长杆所对应的速度映射模型为

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{J}_1\dot{\boldsymbol{u}} \tag{12}$$

其中　$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = [\dot\alpha_1 \quad \dot\alpha_2 \quad \dot\alpha_3]^{\mathrm{T}}$　$\dot{\boldsymbol{u}} = [\dot x \quad \dot y \quad \dot z]^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{J}_q^{-1}\boldsymbol{J}_x \quad \boldsymbol{J}_q = \mathrm{diag}(\boldsymbol{l}_{C_iD_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}_{2i} \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i}))$$

$$\boldsymbol{J}_x = [\boldsymbol{l}_{C_1D_1} \quad \boldsymbol{l}_{C_2D_2} \quad \boldsymbol{l}_{C_3D_3}]^{\mathrm{T}}$$

式中　$\boldsymbol{J}_1$——主动长杆所对应的雅可比矩阵

对式(10)等号两端同乘 $\boldsymbol{l}_{B_iC_i}^{\mathrm{T}}$，可得机构任一支链中主动短杆所对应的转动角速率为

$$\dot\beta_i = \frac{\boldsymbol{l}_{B_iC_i}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{l}_{B_iC_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}_{2i} \times \boldsymbol{l}_{C_iD_i})}\dot{\boldsymbol{u}} \quad (i = 1,2,3) \tag{13}$$

同理，将式(13)整理成矩阵形式，可得主动短杆所对应的速度映射模型为

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{J}_2\dot{\boldsymbol{u}} \tag{14}$$

式中　$\boldsymbol{J}_2$——主动短杆所对应的雅可比矩阵

对式(10)等号两端同乘 $\boldsymbol{k}_{2i}^{\mathrm{T}}$，可得机构任一支链所对应的转动角速率为

$$\dot\theta_i = \frac{\boldsymbol{k}_{2i}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{k}_{2i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}_{1i} \times \boldsymbol{l}_{B_iP})}\dot{\boldsymbol{u}} \quad (i = 1,2,3) \tag{15}$$

同理,将式(15)写成矩阵形式,可得任意支链所对应的转动角速度映射模型为

$$\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{J}_3 \dot{\boldsymbol{u}} \tag{16}$$

将主动长杆所对应的雅可比矩阵改写为

$$\boldsymbol{J}_1 = [\boldsymbol{J}_{11}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{12}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{13}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{J}_{1i}$——主动长杆对应的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_1$ 第 i 行

同理,将主动短杆所对应的雅可比矩阵改写为

$$\boldsymbol{J}_2 = [\boldsymbol{J}_{21}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{22}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{23}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{J}_{2i}$——主动短杆对应的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_2$ 第 i 行

同理,将支链转角所对应的雅可比矩阵改写为

$$\boldsymbol{J}_3 = [\boldsymbol{J}_{31}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{32}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{33}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{J}_{3i}$——支链转角对应的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_3$ 第 i 行

由于该机构存在 8 种驱动模式,显然不同的驱动模式对应不同的雅可比矩阵。则该机构不同驱动模式所对应的雅可比矩阵可一致简记为

$$\boldsymbol{J}_D = [\boldsymbol{J}_{i1}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{j2}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{k3}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$
$$(i = 1,2;\ j = 1,2;\ k = 1,2) \tag{20}$$

当 i、j 和 k 选择不同数字组合时,即可获得机构在不同驱动模式下的雅可比矩阵。例如,当 $i = 1, j = 1, k = 2$,雅可比矩阵表达式为 $\boldsymbol{J}_D = [\boldsymbol{J}_{11}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{12}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{J}_{23}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,其对应表 1 中的驱动模式 a－a－b。

2.3 加速度映射模

对式(12)关于时间求导,可得主动长杆所对应的角加速度映射模型为

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{J}_1 \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{J}}_1 \dot{\boldsymbol{u}} \tag{21}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{J}}_1$——雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_1$ 时间导数

对式(14)关于时间求导,可得主动短杆所对应的角加速度映射模型为

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{J}_2 \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{J}}_2 \dot{\boldsymbol{u}} \tag{22}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{J}}_2$——雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_2$ 时间导数

对式(16)关于时间求导,可得支链所对应的转动角加速度映射模型为

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{J}_3 \ddot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{J}}_3 \dot{\boldsymbol{u}} \tag{23}$$

式中 $\dot{\boldsymbol{J}}_3$——雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}_3$ 时间导数

3 刚体动力学

在刚体动力学建模前,忽略摩擦以及由摩擦引起的能量损耗。将建立多驱动模式下机器人精细化刚体动力学模型。为此,基于虚功率原理建立具有模块化特征的系统动力学模型。

3.1 各构件速度与加速度

为便于建模,将机构分为电机模块、主动长杆、主动短杆、辅助杆、从动臂、末端铰接杆和末端执行器 7 个模块。

(1)电机模块示意图如图 7 所示。图中点 O_{1i}($i = 1,2,3$)为电机模块质心,$O_{1i}x_{1i}y_{1i}z_{1i}$ 为电机模块连体坐标系;m_m 为电机模块质量;l_0 为质心距旋转轴线距离,且 $\boldsymbol{l}_0 = l_0 \boldsymbol{k}_{2i}$。

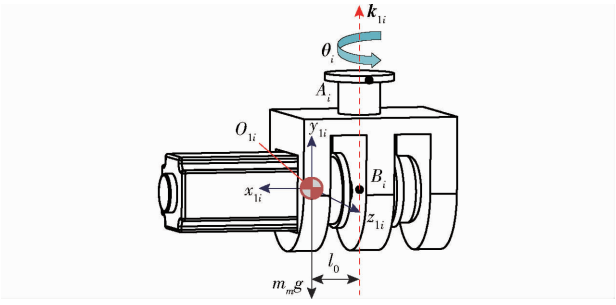

图 7 电机模块示意图

Fig. 7 Motor module

由图 7 可知,电机模块角速度、质心速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{mi} = \dot{\theta}_i \boldsymbol{k}_{1i} = \boldsymbol{k}_{1i} \boldsymbol{J}_{3i} \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{J}_{mvi} \dot{\boldsymbol{u}} \tag{24}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{mi} = \boldsymbol{\omega}_{mi} \times \boldsymbol{l}_0 = (\boldsymbol{k}_{1i} \times \boldsymbol{l}_0) \boldsymbol{J}_{3i} \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{J}_{mi} \dot{\boldsymbol{u}} \tag{25}$$

对式(24)、(25)等号两端同时关于时间求导,可得电机模块角加速度和质心加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mi} = \dot{\boldsymbol{J}}_{mvi} \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{J}_{mvi} \ddot{\boldsymbol{u}} \tag{26}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{mi} = \dot{\boldsymbol{J}}_{mi} \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{J}_{mi} \ddot{\boldsymbol{u}} \tag{27}$$

(2)主动长杆示意图如图 8 所示。图中点 O_{2i} 为主动长杆质心,且质心位于主动长杆二分之一处;$O_{2i}x_{2i}y_{2i}z_{2i}$ 为主动长杆连体坐标系;m_a 为主动长杆质量。由图 8 可知,主动长杆角速度、质心速度为

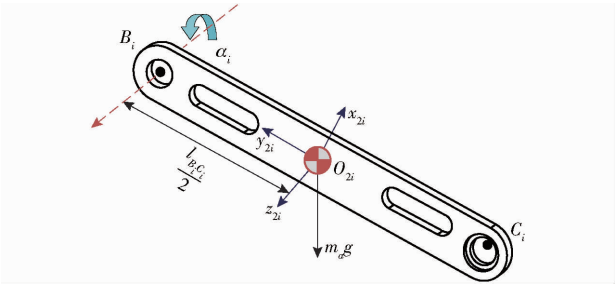

图 8 主动长杆示意图

Fig. 8 Active long rod

$$\boldsymbol{\omega}_{ai} = \dot{\theta}_i \boldsymbol{k}_{1i} + \dot{\alpha}_i \boldsymbol{k}_{2i} = \boldsymbol{k}_{1i} \boldsymbol{J}_{3i} \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{k}_{2i} \boldsymbol{J}_{1i} \dot{\boldsymbol{u}} = (\boldsymbol{k}_{1i} \boldsymbol{J}_{3i} + \boldsymbol{k}_{2i} \boldsymbol{J}_{1i}) \dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{J}_{avi} \dot{\boldsymbol{u}} \tag{28}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{ai} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{ai} \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i} = ((\boldsymbol{k}_{1i} \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i}) \boldsymbol{J}_{3i} + (\boldsymbol{k}_{2i} \times \boldsymbol{l}_{B_iC_i}) \boldsymbol{J}_{1i}) \frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{2} = \boldsymbol{J}_{ai} \dot{\boldsymbol{u}} \tag{29}$$

对式(28)、(29)等号两端同时关于时间求导,可得主动长杆角加速度和质心加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai} = \dot{\boldsymbol{J}}_{avi} \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{J}_{avi} \ddot{\boldsymbol{u}} \tag{30}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{ai} = \dot{\boldsymbol{J}}_{ai} \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{J}_{ai} \ddot{\boldsymbol{u}} \tag{31}$$

(3)主动短杆示意图如图 9 所示。图中点 O_{3i} 为主动短杆质心,且质心位于主动短杆二分之一处;

$O_{3i}x_{3i}y_{3i}z_{3i}$为主动短杆连体坐标系；m_p 为主动短杆质量。由图 9 可知，主动短杆角速度、质心速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{pi}=\dot{\theta}_i\boldsymbol{k}_{1i}+\dot{\beta}_i\boldsymbol{k}_{2i}=(\boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{J}_{3i}+\boldsymbol{k}_{2i}\boldsymbol{J}_{2i})\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{J}_{pvi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{32}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{pi}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{pi}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i}=$$

$$(\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i}\boldsymbol{J}_{3i}+\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i}\boldsymbol{J}_{2i})\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{2}=\boldsymbol{J}_{pi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{33}$$

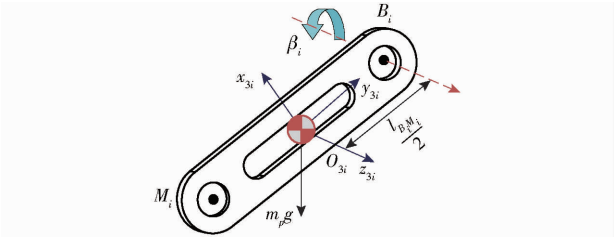

图 9　主动短杆示意图

Fig. 9　Active short rod

对式(32)、(33)等号两端同时关于时间求导，可得主动短杆角加速度和质心加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{pvi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{pvi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{34}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{pi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{pi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{pi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{35}$$

(4)从动臂示意图如图 10 所示。图中点 O_{4i}为从动臂质心，且质心到 C_i 距离 d 为 0.382 $5l_{C_iD_i}$；$O_{4i}x_{4i}y_{4i}z_{4i}$为从动臂连体坐标系；m_f 为从动臂质量。由图 10 可知，从动臂角速度、质心速度为

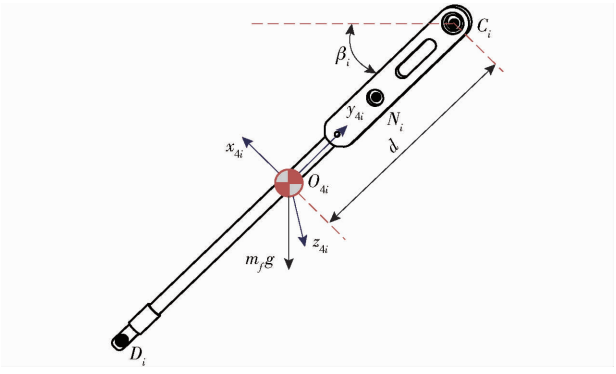

图 10　从动臂示意图

Fig. 10　Passive arm

$$\boldsymbol{\omega}_{fi}=\dot{\theta}_i\boldsymbol{k}_{1i}+\dot{\beta}_i\boldsymbol{k}_{2i}=(\boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{J}_{3i}+\boldsymbol{k}_{2i}\boldsymbol{J}_{2i})\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{J}_{fvi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{36}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{fi}=0.382\,5(\boldsymbol{V}_{C_i}+\boldsymbol{V}_{D_i})=$$

$$0.382\,5(\boldsymbol{\omega}_{ai}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i}+\boldsymbol{\omega}_{ai}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i}+\boldsymbol{\omega}_{fi}\times\boldsymbol{l}_{C_iD_i})=$$

$$0.382\,5(2(\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i})\boldsymbol{J}_{3i}+(\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{C_iD_i})\boldsymbol{J}_{3i}+$$

$$2(\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i})\boldsymbol{J}_{1i}+(\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{C_iD_i})\boldsymbol{J}_{2i})\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{J}_{fi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{37}$$

对式(36)、(37)等号两端同时关于时间求导，可得从动臂角加速度和质心加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{fi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{fvi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{fvi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{38}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{fi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{fi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{fi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{39}$$

(5)辅助杆示意图如图 11 所示。图中 O_{5i}为辅助杆质心，且质心位于辅助杆二分之一处；$O_{5i}x_{5i}y_{5i}z_{5i}$为辅助杆的连体坐标系；m_o 为辅助杆质量。由图 11 可知，辅助杆角速度、质心速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{oi}=\dot{\theta}_i\boldsymbol{k}_{1i}+\dot{\alpha}_i\boldsymbol{k}_{2i}=(\boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{J}_{3i}+\boldsymbol{k}_{2i}\boldsymbol{J}_{1i})\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{J}_{ovi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{40}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{oi}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}_{M_i}+\boldsymbol{V}_{N_i})=$$

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{pi}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i}+\boldsymbol{\omega}_{pi}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i}+\boldsymbol{\omega}_{oi}\times\boldsymbol{l}_{M_iN_i})=$$

$$(2(\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i})\boldsymbol{J}_{3i}+(\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{M_iN_i})\boldsymbol{J}_{3i}+2(\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{B_iM_i})\boldsymbol{J}_{2i}+$$

$$(\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{M_iN_i})\boldsymbol{J}_{1i})\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{2}=\boldsymbol{J}_{oi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{41}$$

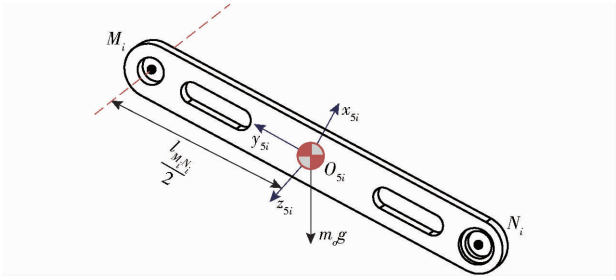

图 11　辅助杆示意图

Fig. 11　Auxiliary rod

对式(40)、(41)等号两端同时关于时间求导，可得辅助杆角加速度和质心加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{oi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{ovi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{ovi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{42}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{oi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{oi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{oi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{43}$$

(6)末端铰接杆示意图如图 12 所示。图中点 O_{6i}为末端铰接杆质心，且质心位于末端铰接杆二分之一处；$O_{6i}x_{6i}y_{6i}z_{6i}$为末端铰接杆连体坐标系；m_h 为末端铰接杆质量。由图 12 可知，末端铰接杆角速度、质心速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{hi}=\dot{\theta}_i\boldsymbol{k}_{1i}=\boldsymbol{k}_{1i}\boldsymbol{J}_{3i}\dot{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{J}_{hvi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{44}$$

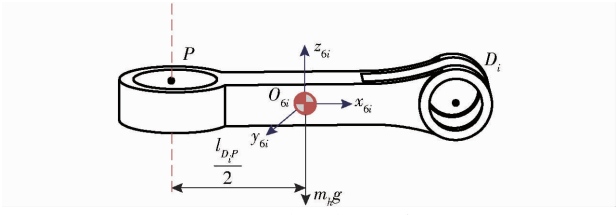

图 12　末端铰接杆示意图

Fig. 12　End-hinged rod

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{hi}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}_{D_i}+\boldsymbol{V}_P)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{ai}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i}+\boldsymbol{\omega}_{fi}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i}+\dot{\boldsymbol{u}})=$$

$$((\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i})\boldsymbol{J}_{3i}+(\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{B_iC_i})\boldsymbol{J}_{1i}+(\boldsymbol{k}_{1i}\times\boldsymbol{l}_{C_iD_i})\boldsymbol{J}_{3i}+$$

$$(\boldsymbol{k}_{2i}\times\boldsymbol{l}_{C_iD_i})\boldsymbol{J}_{2i}+\boldsymbol{E})\frac{\dot{\boldsymbol{u}}}{2}=\boldsymbol{J}_{hi}\dot{\boldsymbol{u}} \tag{45}$$

对式(44)、(45)等号两端同时关于时间求导，可得末端铰接杆角加速度和质心加速度为

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{hi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{hvi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{hvi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{46}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_{hi}=\dot{\boldsymbol{J}}_{hi}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{J}_{hi}\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{47}$$

(7)末端执行器示意图如图 13 所示,末端执行器在空间内实现三平动。图中点 O_{7i}为末端执行器质心;m_d 为末端执行器质量。由图 13 可知,末端执行器角速度、质心速度为

$$\dot{\boldsymbol{r}}_d=\dot{\boldsymbol{u}} \tag{48}$$

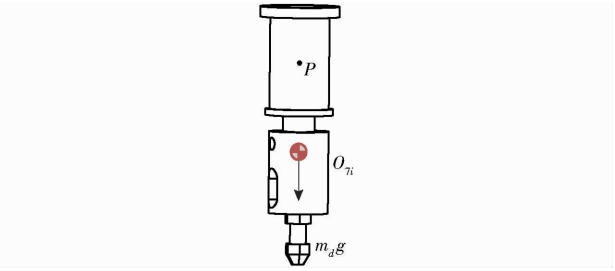

图 13 末端执行器示意图

Fig. 13 End effector

对式(48)等号两端同时关于时间求导可得末端执行器质心加速度为

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_d=\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{49}$$

3.2 各构件受力

忽略负载以及关节摩擦,对机构中各模块受到的驱动力和重力进行分析。

电机模块受到驱动力和重力为

$$\boldsymbol{M}_{m}=-\boldsymbol{I}_{mi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{mi} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{f}_{mi}=-m_m\ddot{\boldsymbol{r}}_{mi} \tag{51}$$

式中 $\boldsymbol{I}_{mi}$——电机模块惯量矩阵,$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

主动长杆受到驱动力和重力为

$$\boldsymbol{M}_{ai}=-(\boldsymbol{I}_{ai}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}+\boldsymbol{\omega}_{ai}\times(\boldsymbol{I}_{ai}\boldsymbol{\omega}_{ai}))=-(\boldsymbol{I}_{ai}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ai}+[\boldsymbol{\omega}_{ai}\times](\boldsymbol{I}_{ai}\boldsymbol{\omega}_{ai})) \tag{52}$$

$$\boldsymbol{f}_{ai}=m_agz-m_a\ddot{\boldsymbol{r}}_{ai} \tag{53}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{ai}={}^{ai}_{O}\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_{a}{}^{ai}_{O}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ $z=(0\quad 0\quad -1)^{\mathrm{T}}$

$${}^{ai}_{O}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\phi_i & \sin\phi_i & 0\\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\cos\alpha_i & 0 & -\sin\alpha_i\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\alpha_i & 0 & -\cos\alpha_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{I}_{ai}$——主动长杆相对于静坐标系惯量矩阵,$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

${}^{ai}_{O}\boldsymbol{R}$——姿态旋转矩阵

z——方向矢量

$[\boldsymbol{\omega}_{ai}\times]$——$\boldsymbol{\omega}_{ai}$反对称矩阵

主动短杆受到驱动力和重力为

$$\boldsymbol{M}_{pi}=-(\boldsymbol{I}_{pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}+\boldsymbol{\omega}_{pi}\times(\boldsymbol{I}_{pi}\boldsymbol{\omega}_{pi}))=-(\boldsymbol{I}_{pi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{pi}+[\boldsymbol{\omega}_{pi}\times](\boldsymbol{I}_{pi}\boldsymbol{\omega}_{pi})) \tag{54}$$

$$\boldsymbol{f}_{pi}=m_pgz-m_p\ddot{\boldsymbol{r}}_{pi} \tag{55}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{pi}={}^{pi}_{O}\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_{p}{}^{pi}_{O}\boldsymbol{R}$

$${}^{pi}_{O}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\phi_i & \sin\phi_i & 0\\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\beta_i & 0 & \sin\beta_i\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{I}_{pi}$——主动短杆相对于静坐标系惯量矩阵,$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

${}^{pi}_{O}\boldsymbol{R}$——姿态旋转矩阵

$[\boldsymbol{\omega}_{pi}\times]$——$\boldsymbol{\omega}_{pi}$反对称矩阵

从动臂受到驱动力和重力为

$$\boldsymbol{M}_{fi}=-(\boldsymbol{I}_{fi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{fi}+\boldsymbol{\omega}_{fi}\times(\boldsymbol{I}_{fi}\boldsymbol{\omega}_{fi}))=-(\boldsymbol{I}_{fi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{fi}+[\boldsymbol{\omega}_{fi}\times](\boldsymbol{I}_{fi}\boldsymbol{\omega}_{fi})) \tag{56}$$

$$\boldsymbol{f}_{fi}=m_fgz-m_f\ddot{\boldsymbol{r}}_{fi} \tag{57}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{fi}={}^{fi}_{O}\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_{f}{}^{fi}_{O}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ ${}^{fi}_{O}\boldsymbol{R}={}^{ai}_{O}\boldsymbol{R}$

式中 $\boldsymbol{I}_{fi}$——从动臂相对于静坐标系的惯量矩阵,$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

${}^{fi}_{O}\boldsymbol{R}$——姿态旋转矩阵

$[\boldsymbol{\omega}_{fi}\times]$——$\boldsymbol{\omega}_{fi}$反对称矩阵

辅助杆受到驱动力和重力为

$$\boldsymbol{M}_{oi}=-(\boldsymbol{I}_{oi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{oi}+\boldsymbol{\omega}_{oi}\times(\boldsymbol{I}_{oi}\boldsymbol{\omega}_{oi}))=-(\boldsymbol{I}_{oi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{oi}+[\boldsymbol{\omega}_{oi}\times](\boldsymbol{I}_{oi}\boldsymbol{\omega}_{oi})) \tag{58}$$

$$\boldsymbol{f}_{oi}=m_ogz-m_o\ddot{\boldsymbol{r}}_{oi} \tag{59}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{oi}={}^{oi}_{O}\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_{o}{}^{oi}_{O}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ ${}^{oi}_{O}\boldsymbol{R}={}^{pi}_{O}\boldsymbol{R}$

式中 $\boldsymbol{I}_{oi}$——辅助杆相对于静坐标系惯量矩阵,$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

${}^{oi}_{O}\boldsymbol{R}$——姿态旋转矩阵

$[\boldsymbol{\omega}_{oi}\times]$——$\boldsymbol{\omega}_{oi}$反对称矩阵

末端铰接杆受到驱动力和重力为

$$\boldsymbol{M}_{hi}=-\boldsymbol{I}_{hi}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{hi} \tag{60}$$

$$\boldsymbol{f}_{hi}=m_hgz-m_h\ddot{\boldsymbol{r}}_{hi} \tag{61}$$

其中 $\boldsymbol{I}_{hi}={}^{hi}_{O}\boldsymbol{R}\boldsymbol{I}_{h}{}^{hi}_{O}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$

$${}^{hi}_{O}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\cos\phi_i & \sin\phi & 0\\ -\sin\phi_i & \cos\phi_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0\\ \sin\theta_i & \cos\theta_i & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{I}_{h}$——末端铰接杆相对于静坐标系的惯量矩阵,$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

${}^{hi}_{O}\boldsymbol{R}$——姿态旋转矩阵

末端执行器受到重力为

$$\boldsymbol{f}_{p}=m_pgz-m_p\ddot{\boldsymbol{r}}_{p} \tag{62}$$

3.3 多驱动模式下系统刚体动力学模型

多驱动模式完备刚体动力学模型为

$$\delta\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}+\sum_{i=1}^{3}\left[(\delta\boldsymbol{\omega}_{mi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{mi}+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{mi}^{\mathrm{T}}f_{mi})+(\delta\boldsymbol{\omega}_{ai}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{ai}+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{ai}^{\mathrm{T}}f_{ai})+(\delta\boldsymbol{\omega}_{oi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{pi}+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{oi}^{\mathrm{T}}f_{oi})+(\delta\boldsymbol{\omega}_{fi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{fi}+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{fi}^{\mathrm{T}}f_{fi})+(\delta\boldsymbol{\omega}_{pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{pi}+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{pi}^{\mathrm{T}}f_{pi})+(\delta\boldsymbol{\omega}_{hi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{hi}+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{hi}^{\mathrm{T}}f_{hi})\right]+\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{p}^{\mathrm{T}}f_{p}=0 \tag{63}$$

其中　$\delta\boldsymbol{\omega}_{mi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{mvi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$　$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{hi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{hi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{p}^{\mathrm{T}}=\delta\dot{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}$　$\delta\boldsymbol{\omega}_{ai}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{avi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

$\delta\boldsymbol{\omega}_{oi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{ovi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$　$\delta\boldsymbol{\omega}_{fi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{fvi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

$\delta\boldsymbol{\omega}_{pi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{pvi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$　$\delta\boldsymbol{\omega}_{hi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{hvi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{mi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{mi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$　$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{ai}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{ai}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{oi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{oi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$　$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{fi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{fi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{pi}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{J}_{pi}\delta\dot{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}$

式中，$\delta\boldsymbol{\omega}_{mi}$、$\delta\boldsymbol{\omega}_{ai}$、$\delta\boldsymbol{\omega}_{oi}$、$\delta\boldsymbol{\omega}_{fi}$、$\delta\boldsymbol{\omega}_{pi}$、$\delta\boldsymbol{\omega}_{hi}$为电机模块、主动长杆、主动短杆、辅助杆、从动臂和末端铰接杆虚角速度，$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{mi}$、$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{ai}$、$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{oi}$、$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{fi}$、$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{pi}$、$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{hi}$、$\delta\dot{\boldsymbol{r}}_{p}$ 为电机模块、主动长杆、主动短杆、从动臂、辅助杆、末端铰接杆和末端执行器质心虚速度。

将式(24)～(62)代入式(63)，可得该并联机器人多驱动模式下一致刚体动力学模型为

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}_{\mathrm{D}}^{-\mathrm{T}}\left[\begin{array}{l}-\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{mvi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{I}_{m}\dot{\boldsymbol{J}}_{mvi}\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{I}_{m}\boldsymbol{J}_{mvi}\ddot{\boldsymbol{u}})+\\ \quad\boldsymbol{J}_{mi}^{\mathrm{T}}(-m_{m}\dot{\boldsymbol{J}}_{mi}\dot{\boldsymbol{u}}-m_{m}\boldsymbol{J}_{mi}\ddot{\boldsymbol{u}}))\\ -\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{avi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{I}_{ai}\dot{\boldsymbol{J}}_{avi}\dot{\boldsymbol{u}}-\\ \quad[\boldsymbol{J}_{avi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{ai}\boldsymbol{J}_{avi})\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{I}_{ai}\boldsymbol{J}_{avi}\ddot{\boldsymbol{u}})+\\ \quad\boldsymbol{J}_{ai}^{\mathrm{T}}(m_{a}g\boldsymbol{z}-m_{a}\dot{\boldsymbol{J}}_{ai}\dot{\boldsymbol{u}}-m_{a}\boldsymbol{J}_{ai}\ddot{\boldsymbol{u}}))\\ -\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{pvi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{I}_{pi}\dot{\boldsymbol{J}}_{pvi}\dot{\boldsymbol{u}}-\\ \quad[\boldsymbol{J}_{pvi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{pi}\boldsymbol{J}_{pvi})\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{I}_{pi}\boldsymbol{J}_{pvi}\ddot{\boldsymbol{u}})+\\ \quad\boldsymbol{J}_{pi}^{\mathrm{T}}(m_{p}g\boldsymbol{z}-m_{p}\dot{\boldsymbol{J}}_{pi}\dot{\boldsymbol{u}}-m_{p}\boldsymbol{J}_{pi}\ddot{\boldsymbol{u}}))\\ -\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{fvi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{I}_{fi}\dot{\boldsymbol{J}}_{fvi}\dot{\boldsymbol{u}}-\\ \quad[\boldsymbol{J}_{fvi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{fi}\boldsymbol{J}_{fvi})\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{I}_{fi}\boldsymbol{J}_{fvi}\ddot{\boldsymbol{u}})+\\ \quad\boldsymbol{J}_{fi}^{\mathrm{T}}(m_{f}g\boldsymbol{z}-m_{f}\dot{\boldsymbol{J}}_{fi}\dot{\boldsymbol{u}}-m_{f}\boldsymbol{J}_{fi}\ddot{\boldsymbol{u}}))\\ -\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{ovi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{I}_{oi}\dot{\boldsymbol{J}}_{ovi}\dot{\boldsymbol{u}}-\\ \quad[\boldsymbol{J}_{ovi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{oi}\boldsymbol{J}_{ovi})\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{I}_{oi}\boldsymbol{J}_{ovi}\ddot{\boldsymbol{u}})+\\ \quad\boldsymbol{J}_{oi}^{\mathrm{T}}(m_{o}g\boldsymbol{z}-m_{o}\dot{\boldsymbol{J}}_{oi}\dot{\boldsymbol{u}}-m_{o}\boldsymbol{J}_{oi}\ddot{\boldsymbol{u}}))\\ -\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{hvi}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{I}_{hi}\dot{\boldsymbol{J}}_{hvi}\dot{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{I}_{hi}\boldsymbol{J}_{hvi}\ddot{\boldsymbol{u}})+\\ \quad\boldsymbol{J}_{hi}^{\mathrm{T}}(m_{h}g\boldsymbol{z}-m_{h}\dot{\boldsymbol{J}}_{hi}\dot{\boldsymbol{u}}-m_{h}\boldsymbol{J}_{hi}\ddot{\boldsymbol{u}}))-\\ \quad m_{d}g\boldsymbol{z}+m_{d}\ddot{\boldsymbol{u}}\end{array}\right] \tag{64}$$

将式(64)整理成规范形式

$$\boldsymbol{\tau}=(\boldsymbol{J}_{D}^{-\mathrm{T}})(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{G}) \tag{65}$$

其中

$$\boldsymbol{M}=\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{mvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{m}\boldsymbol{J}_{mvi}+\boldsymbol{J}_{mi}^{\mathrm{T}}m_{m}\boldsymbol{J}_{vi}+\boldsymbol{J}_{avi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{ai}\boldsymbol{J}_{avi}+\boldsymbol{J}_{ai}^{\mathrm{T}}m_{a}\boldsymbol{J}_{ai}+\boldsymbol{J}_{pvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{pi}\boldsymbol{J}_{pvi}+\boldsymbol{J}_{pi}^{\mathrm{T}}m_{p}\boldsymbol{J}_{pi}+\boldsymbol{J}_{fvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{fi}\boldsymbol{J}_{fvi}+\boldsymbol{J}_{fi}^{\mathrm{T}}m_{f}\boldsymbol{J}_{fi}+\boldsymbol{J}_{ovi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{oi}\boldsymbol{J}_{ovi}+\boldsymbol{J}_{oi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{o}\boldsymbol{J}_{oi}+\boldsymbol{J}_{hvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{hi}\boldsymbol{J}_{hvi}+\boldsymbol{J}_{hi}^{\mathrm{T}}m_{h}\boldsymbol{J}_{hi})+m_{p}\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{C}=\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{mvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{m}\dot{\boldsymbol{J}}_{mvi}+\boldsymbol{J}_{mi}^{\mathrm{T}}m_{m}\dot{\boldsymbol{J}}_{mi}+\boldsymbol{J}_{avi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{ai}\dot{\boldsymbol{J}}_{avi}+\boldsymbol{J}_{avi}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{J}_{avi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{ai}\boldsymbol{J}_{avi})+\boldsymbol{J}_{ai}^{\mathrm{T}}m_{a}\dot{\boldsymbol{J}}_{ai}+\boldsymbol{J}_{pvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{pi}\dot{\boldsymbol{J}}_{pvi}+\boldsymbol{J}_{pvi}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{J}_{pvi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{pi}\boldsymbol{J}_{pvi})+\boldsymbol{J}_{pi}^{\mathrm{T}}m_{p}\dot{\boldsymbol{J}}_{pi}+\boldsymbol{J}_{fvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{fi}\dot{\boldsymbol{J}}_{fvi}+\boldsymbol{J}_{fvi}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{J}_{fvi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{fi}\boldsymbol{J}_{fvi})+\boldsymbol{J}_{fi}^{\mathrm{T}}m_{f}\dot{\boldsymbol{J}}_{fi}+\boldsymbol{J}_{ovi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{oi}\dot{\boldsymbol{J}}_{ovi}+\boldsymbol{J}_{ovi}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{J}_{ovi}\dot{\boldsymbol{u}}\times](\boldsymbol{I}_{oi}\boldsymbol{J}_{ovi})+\boldsymbol{J}_{oi}^{\mathrm{T}}m_{o}\dot{\boldsymbol{J}}_{oi}+\boldsymbol{J}_{hvi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_{hi}\dot{\boldsymbol{J}}_{hvi}+\boldsymbol{J}_{hi}^{\mathrm{T}}m_{h}\dot{\boldsymbol{J}}_{hi})$$

$$\boldsymbol{G}=-\sum_{i=1}^{3}(\boldsymbol{J}_{ai}^{\mathrm{T}}m_{a}+\boldsymbol{J}_{pi}^{\mathrm{T}}m_{p}+\boldsymbol{J}_{ai}^{\mathrm{T}}m_{a}+\boldsymbol{J}_{oi}^{\mathrm{T}}m_{f}+\boldsymbol{J}_{hi}^{\mathrm{T}}m_{h})g\boldsymbol{z}-m_{p}g\boldsymbol{z}$$

式中　$\boldsymbol{M}$——质量矩阵，$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

$\boldsymbol{C}$——离心力/科氏力矩阵，$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

$\boldsymbol{G}$——重力列阵，$\in\boldsymbol{R}^{3\times3}$

为便于进行后续数值计算及仿真，给出各构件惯量参数如表 3 所示。几何参数和质量参数如表 4、5 所示。

表 3　各构件惯量参数

Tab. 3　Inertial parameters of each component

kg·m²

参数	数值
$\boldsymbol{I}_{m}$	$\begin{bmatrix}0.001\,3 & 0 & 0\\ 0 & 0.005\,1 & 0\\ 0 & 0 & 0.005\,4\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{I}_{a}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.000\,4 & 0\\ 0 & 0 & 0.000\,4\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{I}_{p}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.000\,02 & 0\\ 0 & 0 & 0.000\,02\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{I}_{f}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.001\,24 & 0\\ 0 & 0 & 0.001\,25\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{I}_{o}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0.000\,4 & 0\\ 0 & 0 & 0.000\,4\end{bmatrix}$
$\boldsymbol{I}_{h}$	$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.000\,1\end{bmatrix}$

4　数值模拟与软件多体仿真

给定机构末端运动轨迹。仿真轨迹选用在高度

表 4 机构几何参数

Tab. 4 Geometric parameters of mechanism m

参数	数值	参数	数值	参数	数值	参数	数值
l_{OA_i}	0.30	$l_{A_iB_i}$	0.087 5	$l_{C_iD_i}$	0.40	$l_{B_iC_i}$	0.30
l_{D_iP}	0.10	$l_{M_iN_i}$	0.30	$l_{B_iM_i}$	0.10	l_0	0.046

表 5 各构件质量参数

Tab. 5 Mass parameters of each component kg

参数	数值	参数	数值	参数	数值	参数	数值
m_m	1.352	m_p	0.018	m_o	0.054	m_d	0.022
m_a	0.054	m_f	0.088	m_h	0.075		

$z=-0.4$ m 上的工作空间截面内，且半径为 0.08 m 的圆形轨迹，轨迹参数方程为

$$\begin{cases} x=0.08\cos(\pi t) \\ y=0.08\sin(\pi t) \\ z=-0.4\ \text{m} \end{cases} \quad (t\in[0,2\ \text{s}]) \tag{66}$$

Simscape 是 Matlab/Simulink 仿真平台中的一个物理建模和仿真模块集，其基于物理原理和方程，用于建立和模拟多领域物理系统。Simscape 模块与其他 Simulink 工具之间无缝集成，使得数据处理、结果分析和可视化更加方便和高效。采用该模块并结合三维建模软件联合实施多体仿真。

仿真流程如图 14 所示。建立机器人 Solidworks 虚拟样机模型，通过 Simscape Multibody 插件将机器人虚拟样机模型导入到 Simulink 环境中，并进行模块化封装操作。建立的仿真试验模型如图 15 所示。

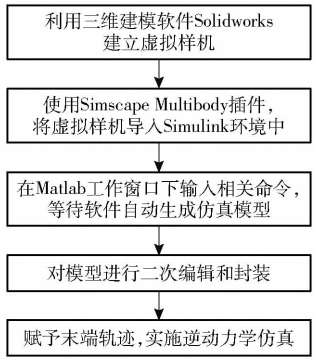

图 14 仿真流程图

Fig. 14 Simulation flowchart

将期望末端轨迹作为输入信号，传递给末端执行器，实施多驱动模式下逆动力学仿真。同时，设定仿真参数，采用 ode45 求解器可求解出在不计摩擦情况下的驱动力矩。机器人运动可视化模型如图 16 所示。

将机构仿真试验结果与逆动力学数值计算的结果进行比较，如图 17 所示。其中，图 17a 对应驱动模式为表 2 中的模式Ⅰ，对应的驱动角为（α_1 α_2 α_3）；图 17b 对应的驱动模式为表 2 中的模式Ⅱ，对应的驱动角为（α_1 α_2 β_3）；图 17c 对应的驱动模式为表 2 中的模式Ⅲ，对应的驱动角为（β_1 β_2 α_3）；图 17d 对应的驱动模式为表 2 中的模式Ⅳ，对应的驱动角为（β_1 β_2 β_3）。

由图 17 可知，在不同驱动模式下，两者力矩曲线具有很好的吻合度，仅在个别地方存在较小

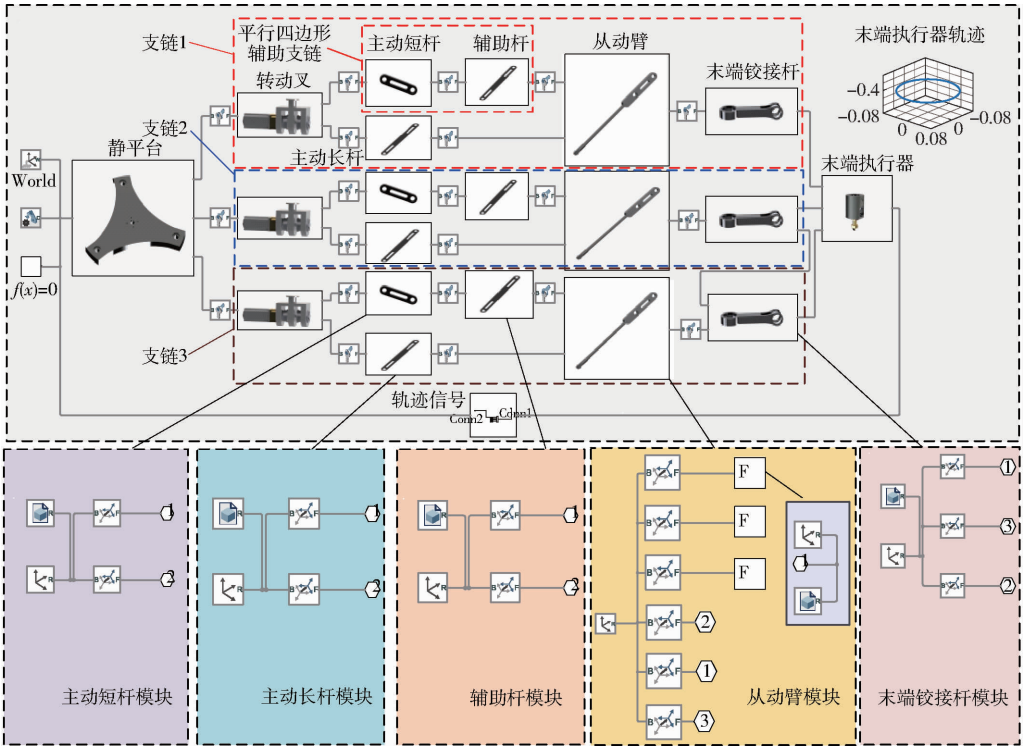

图 15 Simscape 仿真试验模型

Fig. 15 Simulation experiment model under Simscape platform

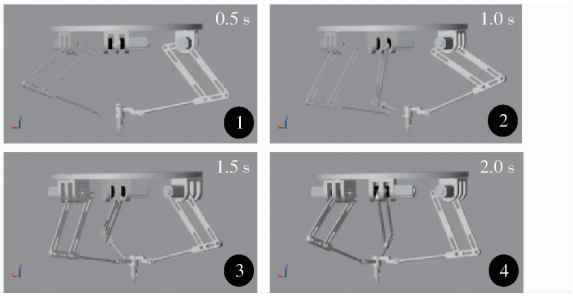

图 16　可视化模型

Fig. 16　Visualization model

误差，且最大力矩误差不超过 0.03 N·m，证明了所建多驱动模式下的系统动力学模型的正确性和有效性。

5　动力学性能指标

为进一步评价机器人在不同驱动模式下动态性能，基于前述操作空间动力学模型，定义出动态性能评价指标为

$$\kappa_J = \mathrm{cond}(\boldsymbol{J}_D^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{M}) = \frac{\sigma_{\max}(\boldsymbol{J}_D^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{M})}{\sigma_{\min}(\boldsymbol{J}_D^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{M})} \tag{67}$$

实际中，一般多将 κ_J 的倒数 $1/\kappa_J$ 作为衡量机

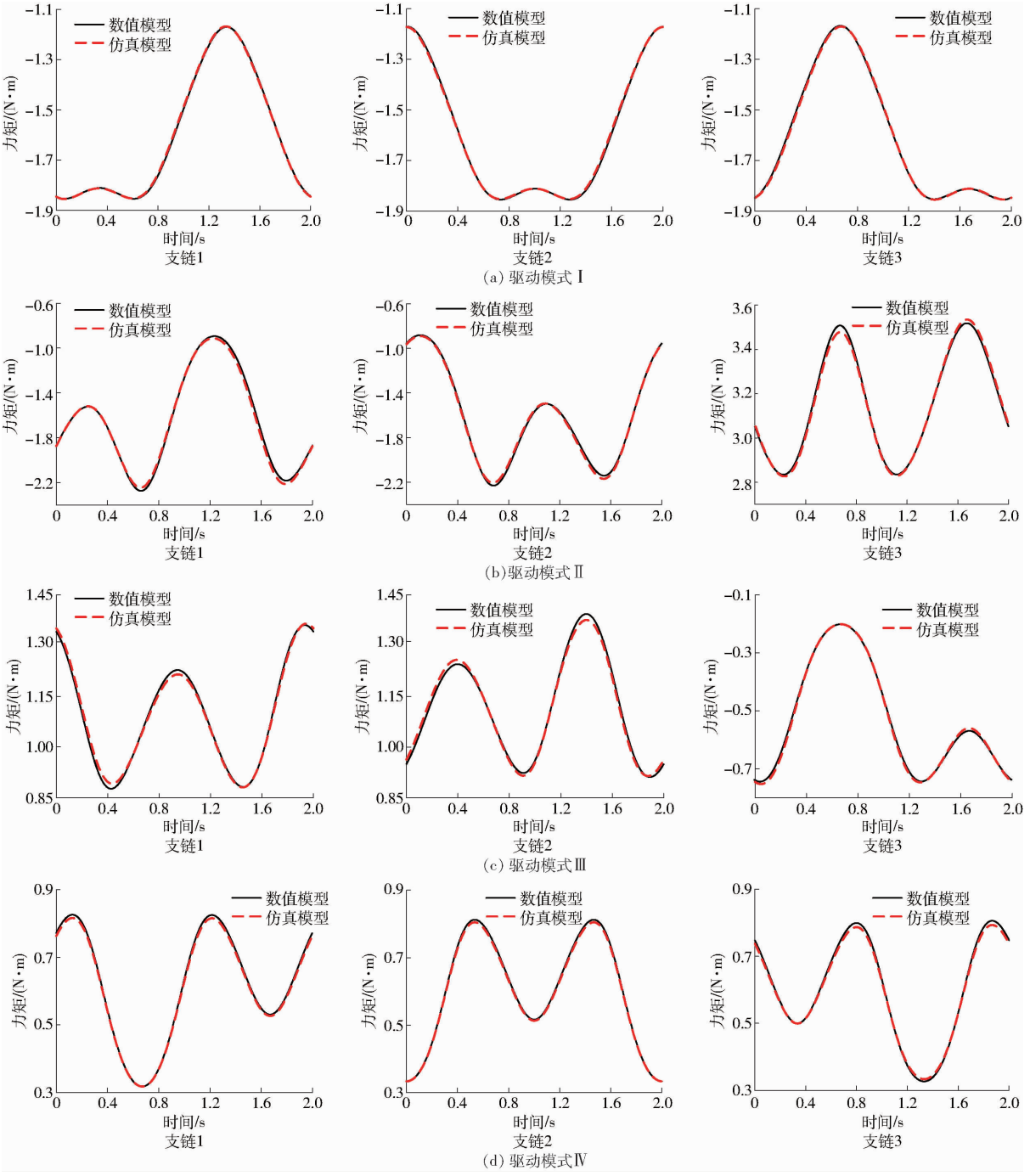

图 17　关节驱动力矩

Fig. 17　Joint driving torques under different driving modes

构性能指标,定义为动力学动态灵巧度,其值越大越好,通过研究其在工作空间内分布情况,进一步揭示机构在不同驱动模式下动态性能变化情况。不同驱动模式下机构末端执行器在其工作空间 $z=-0.4$ m、$z=-0.5$ m 和 $z=-0.6$ m 截面内的动态性能分布图如图 18 所示。

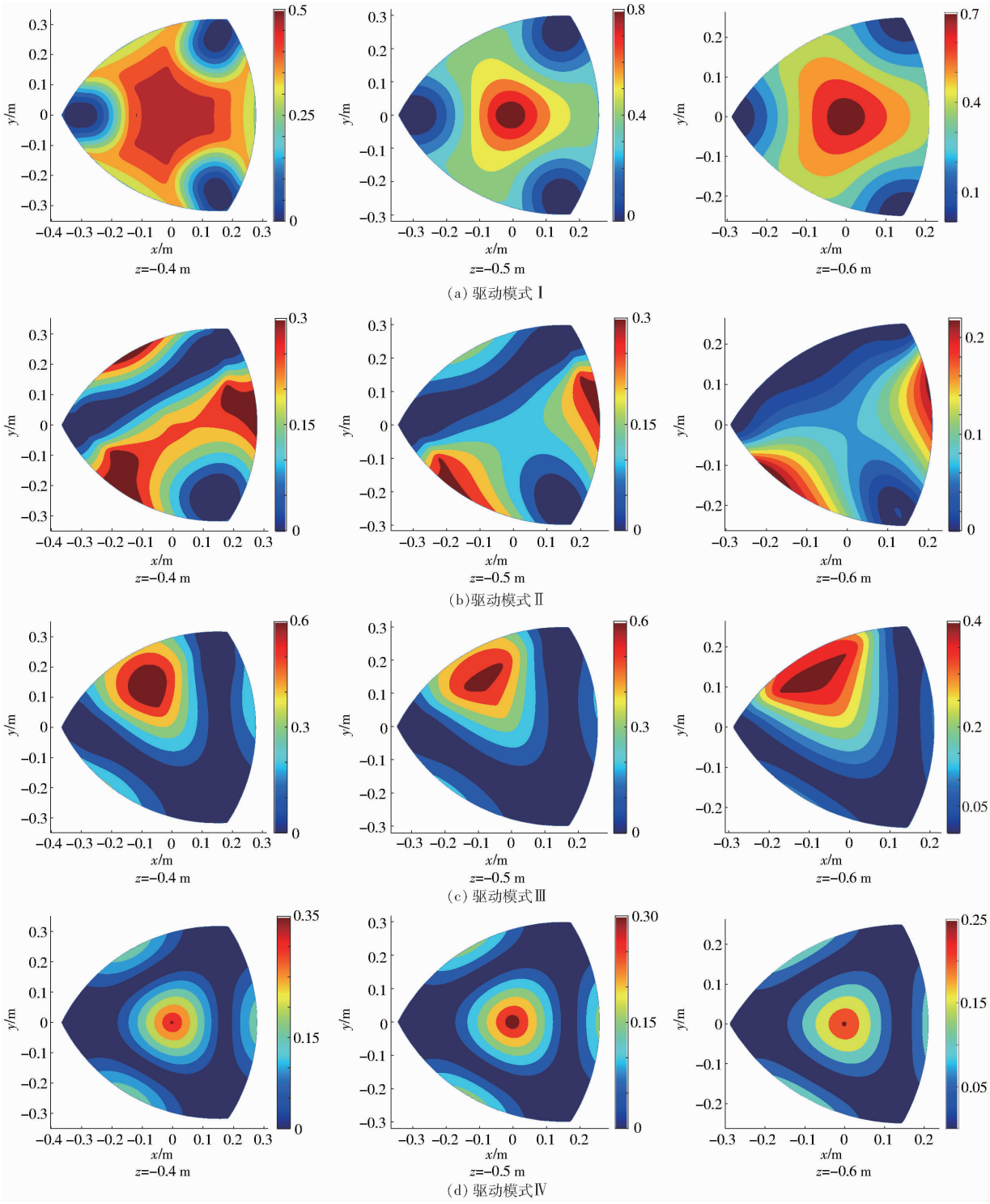

图 18 不同驱动模式下动态灵巧度等高线分布图

Fig. 18 Contour distributions for dynamic dexterity under different driving modes

由图 18 可知,在不同驱动模式下,机构动态性能分布存在明显差异,且性能优势区域的分布也不同。因此在机构实际应用中,结合工作场景,可根据末端执行器所处区域切换合适的驱动模式,保证机构在大部分区域内均具有较高的运动性能,使机构工作空间得到充分利用。与传统并联机构相比,该类机构可根据作业工况及不同任务需求,改变驱动模式,保证工作空间充分利用,提高了机构在工作空间运动可靠性及稳定性。同时,也为后续进一步的多驱动模式动态性能优化提供了重要参考。

6　结论

(1)通过构造辅助结构(包括附加二级杆组和同步带驱动)方法,提出了一类在空间内可实现多驱动模式的三平动并联机器人,其通过电磁离合开关控制可实现 8 种驱动方式。

(2)建立了机构运动学模型,在运动学分析基础上,借助虚功率原理建立了多驱动模式下系统完备动力学模型,并推导出动力学模型规范表达式。

(3)结合不同驱动模式下 Simscape 多体仿真试验和数值计算,验证了所建动力学模型的正确性,为动态性能优化、控制策略设计奠定了理论基础。

(4)基于操作空间动力学模型定义了动态灵巧度指标,分析了机构在不同驱动模式下的动态性能,为驱动模式选择及动态性能优化提供了理论参考。

参　考　文　献

[1] 谢福贵, 梅斌, 刘辛军, 等. 一种大型复杂构件加工新模式及新装备探讨[J]. 机械工程学报, 2020, 56(19): 70 – 78.
XIE Fugui, MEI Bin, LIU Xinjun, et al. Novel mode and equipment for machining large complex components[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(19): 70 – 78. (in Chinese)

[2] 冯李航, 张为公, 龚宗洋, 等. Delta 系列并联机器人研究现状[J]. 机器人,2014, 36(3):374 – 384.
FENG Lihang, ZHANG Weigong, GONG Zongyang, et al. Research status of Delta series parallel robots[J]. Robot, 2014, 36(3): 374 – 384. (in Chinese)

[3] MENG Qizhi, LIU Xinjun, XIE Fugui. Design and development of a Schönflies-motion parallel robot with articulated platforms and closed-loop passive limbs[J]. Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, 2022,77:102352.

[4] CHETWYND G D, MEI J, BAI P, et al. Tolerance design and kinematic calibration of a four-degrees-of-freedom pick-and-place parallel robot[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2016,8(6):061018.

[5] CHEN Z, SONG J, LI N, et al. Design and dynamics modeling of a novel 2R1T 3-DOF parallel motion simulator[J]. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, 2023, 45(4): 234.

[6] JIA Z, LI R, LIU J, et al. Dynamic modeling and performance analysis of a hip rehabilitation robot[J]. Biomimetics, 2023, 8(8):585.

[7] WOLF A, GLOZMAN D. Singularity analysis of large workspace 3RRRS parallel mechanism using line geometry and linear complex approximation[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2011,3(1): 011004.

[8] ARAKELIAN V, BRIOT S, GLAZUNOV V. Increase of singularity-free zones in the workspace of parallel manipulators using mechanisms of variable structure[J]. Mechanism and Machine Theory, 2008,43(9):1129 – 1140.

[9] BABU R S, RAJU R V, RAMJI K. Choosing actuation scheme for optimal performance of 3-DOF planar parallel manipulators [J]. Advances in Mechanical Engineering, 2012,4:171682.

[10] LIANG Dong, SONG Yimin, SUN Tao, et al. Optimum design of a novel redundantly actuated parallel manipulator with multiple actuation modes for high kinematic and dynamic performance[J]. Nonlinear Dynamics, 2016,83(1 – 2):631 – 658.

[11] RAKOTOMANGA W, CHABLAT D, CARO S. Kinetostatic performance of a planar parallel mechanism with variable actuation [M]. Advances Robot Kinematics: Analysis and Design, 2008: 311 – 320.

[12] ZHANG Zhaokun, WANG Liping, SHAO Zhufeng. Improving the kinematic performance of a planar 3-RRR parallel manipulator through actuation mode conversion[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018,130:86 – 108.

[13] WANG Liping, ZHANG Zhaokun, SHAO Zhufeng, et al. Analysis and optimization of a novel planar 5R parallel mechanism with variable actuation modes[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing, 2019,56:178 – 190.

[14] WANG Dan, FAN Rui, CHEN Wuyi. Performance enhancement of a three-degree-of-freedom parallel tool head via actuation redundancy[J]. Mechanism and Machine Theory, 2014,71:142 – 162.

[15] XU Lingmin, LI Qinchuan, ZHANG Ningbin, et al. Mobility, kinematic analysis, and dimensional optimization of new three degrees-of-freedom parallel manipulator with actuation redundancy[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2017, 9(4): 041008.

[16] ZANGANEH K E, ANGELES J. Mobility and position analyses of a novel redundant parallel manipulator[C]// Proceedings of the 1994 lEEE International Conference on Robotics and Automation, 1994: 3049 – 3054.

[17] MENG Zhaoran, CAO Wenao, DING Huafeng, et al. A new six degree-of-freedom parallel robot with three limbs for high-speed operations[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022,173:104875.

[18] LIU Xiaofeng, XU Yundong, YAO Jiantao, et al. Control-faced dynamics with deformation compatibility for a 5-DOF active over-constrained spatial parallel manipulator 6PUS – UPU[J]. Mechatronics, 2015,30:107 – 115.

[19] LI Shihua, LIU Yanmin, CUI Yunzhan, et al. Synthesis of branched chains with actuation redundancy for eliminating interior singularities of 3T1R parallel mechanisms[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2016, 29(2):250 – 259.

[20] WU Jun, LI Tiemin, XU Boqiang. Force optimization of planar 2-DOF parallel manipulators with actuation redundancy considering deformation [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2013, 227(6): 1371 – 1377.

(下转第 801 页)

CHEN Zhiyong, WU Jinghua. Improved probability path graph method for robots based on goal-oriented sampling[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023,54(6):410 - 418,426. (in Chinese)

[23] 张勤,刘丰溥,蒋先平,等. 番茄串收机械臂运动规划方法与试验[J]. 农业工程学报,2021,37(9):149 - 156.
ZHANG Qin, LIU Fengpu, JIANG Xianping, et al. Motion planning method and experiments of tomato bunch harvesting manipulator[J]. Transactions of the CSAE, 2021,37(9):149 - 156. (in Chinese)

[24] 田金文,于镭,李衍照. 基于改进 APF - RRT 的机械臂避障路径规划[J]. 电子测量技术, 2022, 45(22):41 - 46.
TIAN Jinwen, YU Lei, LI Yanzhao. Obstacle avoidance path planning of manipulator based on improved APF - RRT[J]. Electronic Measurement Technology, 2022, 45(22):41 - 46. (in Chinese)

[25] 刘紫燕,张杰. 改进 RRT 算法的室内移动机器人路径规划[J]. 计算机工程与应用, 2020, 56(9):190 - 197.
LIU Ziyan,ZHANG Jie. Path planning using improved RRT algorithm for indoor mobile robot[J]. Computer Engineering and Applications, 2020, 56(9):190 - 197. (in Chinese)

[26] 刘天湖,张迪,郑琰, 等. 基于改进 RRT* 算法的菠萝采收机导航路径规划[J]. 农业工程学报, 2022, 38(23):20 - 28.
LIU Tianhu,ZHANG Di,ZHENG Yan, et al. Navigation path planning of the pineapple harvester based on improved RRT* algorithm[J]. Transactions of the CSAE, 2022, 38(23):20 - 28. (in Chinese)

[27] 郭自良,吴玄博,殷程凯, 等. 基于 Informed - RRT* 的苹果采摘机械臂路径规划研究[J]. 林业机械与木工设备, 2024, 52(4):59 - 65.
GUO Ziliang,WU Xuanbo,YIN Chengkai, et al. Path planning of apple picking robot arm based on Informed - RRT*[J]. Forestry Machinery & Woodworking Equipment,2024, 52(4):59 - 65. (in Chinese)

[28] 符强,蓝星辉,任风华, 等. 一种双向目标 RRT 路径规划算法研究[J]. 计算机仿真, 2023, 40(1):447 - 454,461.
FU Qiang,LAN Xinghui,REN Fenghua, et al. Research on route planning algorithm of bidirectional target RRT and Dijkstra[J]. Computer Simulation, 2023, 40(1):447 - 454,461. (in Chinese)

[29] 马慧丽,鲁照权,王寿庭. 基于改进 RRT 算法的机械臂路径规划研究[J]. 机械设计与研究, 2020, 36(4):42 - 46.
MA Huili,LU Zhaoquan,WANG Shouting. Research on manipulator path planning based on improved RRT algorithms[J]. Machine Design & Research, 2020, 36(4):42 - 46. (in Chinese)

[30] 高嘉材,李丽红,原钢. 机械臂与障碍物的双层次碰撞检测算法仿真[J]. 计算机仿真, 2022,39(6):453 - 458.
GAO Jiacai,LI Lihong,YUAN Gang. Simulation of double level collision detection algorithm between manipulator and obstacle simulation of double level collision detection algorithm between manipulator and obstacle[J]. Computer Simulation, 2022, 39(6): 453 - 458. (in Chinese)

(上接第 769 页)

[21] EBRAHIMI I, CARRETERO A J, BOUDREAU R. 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: inverse displacement, workspace and singularity analyses[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007,42(8):1007 - 1016.

[22] ZHANG Chenyang, JIANG Hongzhou. Rigid-flexible modal analysis of the hydraulic 6-DOF parallel mechanism[J]. Energies, 2021,14(6): 1604.

[23] MILLER K. Optimal design and modeling of spatial parallel manipulators[J]. The International Journal of Robotics Research, 2004,23(2):127 - 140.

[24] 祝宏铭. 基于旋量理论的 3-PRS 并联机器人动力学分析与仿真[D]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 2020.
ZHU Hongming. Dynamic analysis and simulation of 3-PRS parallel manipulator based on screw theory[D]. Harbin:Harbin Engineering University, 2020. (in Chinese)

[25] BERNAL J, CAMPA R, SOTO I. Kinematics and dynamics modeling of the 6-3-PUS-type Hexapod parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(10): 4555 - 4570.

[26] 梁栋, 李世友, 畅博彦, 等. 冗余驱动精密定位并联机器人动力学优化[J]. 机械设计与研究, 2022,38(5):79 - 87.
LIANG Dong, LI Shiyou, CHANG Boyan, et al. Dynamics optimization of redundant actuated precision positioning parallel robots[J]. Machine Design and Research, 2022,38(5):79 - 87. (in Chinese)

[27] 梁栋, 刘军, 畅博彦, 等. 末端铰接三平动并联机构设计与性能优化[J]. 农业机械学报, 2022,53(10):446 - 458.
LIANG Dong, LIU Jun, CHANG Boyan, et al. Design analysis and performance optimization of a 3-DOF translational parallel mechanism with end hinged structure[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(10): 446 - 458. (in Chinese)

[28] 梁栋, 石浩昊, 崔满军, 等. 一种可实现空间三平动或三平一转自由度的多驱动模式并联机器人机构: CN202410399503.4[P]. 2024 - 06 - 25.