doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.07.066

五自由度混联机构运动学分析与参数优化

伞红军[1,2]　吴兴梅[1]　陈久朋[1,2]　杨晓园[1]　张号彬[1]

(1.昆明理工大学机电工程学院,昆明 650500;2.云南省先进装备智能制造技术重点实验室,昆明 650500)

摘要:结构参数优化对机构性能有重要影响,本文以一种面向复杂曲面加工的五自由度混联机构为研究对象,对其进行运动学分析及结构参数优化。运用数值迭代法和解析法建立机构运动学模型。采用分层搜索法求解可达工作空间并计算由每层最大内切圆构成的规则工作空间体积。定义全域性能指标并采用正交试验法分析机构尺寸对性能的影响。通过参考目标距离法建立多目标优化模型,采用遗传算法进行优化设计。仿真结果表明,优化后机构尺寸均有所减小,而全域运动性能指标、全域运动性能波动指标以及全域可操作度性能指标分别提高 40%、45% 和 77%。

关键词:混联机构;运动学分析;工作空间;性能指标;参数优化

中图分类号:TP242;TH112　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1000-1298(2025)07-0701-12　　**OSID**:

Kinematic Analysis and Parameter Optimization of 5-DOF Hybrid Mechanism

SAN Hongjun[1,2]　WU Xingmei[1]　CHEN Jiupeng[1,2]　YANG Xiaoyuan[1]　ZHANG Haobin[1]

(1. *Faculty of Mechanical and Electrical Engineering*, *Kunming University of Science and Technology*, *Kunming* 650500, *China*
2. *Key Laboratory of Advanced Equipment Intelligent Manufacturing Technology of Yunnan Province*, *Kunming* 650500, *China*)

Abstract: The optimization of structural parameters had a significant impact on the performance of mechanisms, in this paper, a five-degree-of-freedom hybrid mechanism for complex surface machining was taken as the research object, and the kinematic analysis and optimization of structural parameters were carried out. The forward and inverse kinematic models of the mechanism were established respectively by using the numerical iterative method and the analytical method. The layered search method was used to solve the reachable workspace and calculated the volume of the regular workspace consisting of the maximum internal tangent circle of each layer. The global performance index was defined and the influence of the size parameters of the mechanism on each performance index was analyzed by orthogonal test method. The multi-objective optimization model of the mechanism was established by the reference target distance method and the linear weighting method, and the genetic algorithm was used to optimize the design. The simulation results showed that the size of the optimized mechanism was reduced, while the global motion performance index, the global motion performance fluctuation index and the global operability performance index were increased by 40%, 45% and 77% respectively. To further verify the optimization results, the velocity and acceleration of the models before and after optimization were simulated and compared. It was found that after the mechanism was optimized, the impact and vibration during the motion process could be reduced, making the motion control of the mechanism more precise.

Key words: hybrid mechanism; kinematic analysis; workspace; performance index; parameter optimization

0　引言

混联机构兼顾串、并联机构优点,具有工作空间大、承载能力强、精度高和刚度好等特点[1-2],已被广泛应用于航天[3-4]、工业[5-6]、医疗[7-8]等领域[9-12]。鉴于混联机构广泛的应用前景,对其进行

收稿日期:2024-04-17　修回日期:2024-05-13

基金项目:云南省基础研究计划-青年基金项目(202301AU070059)和昆明理工大学人才培养项目(KKZ3202301041)

作者简介:伞红军(1976—),男,副教授,主要从事并联机器人理论及应用研究,E-mail:sanhjun@163.com

通信作者:陈久朋(1993—),男,讲师,博士,主要从事机器人技术及应用研究,E-mail:18314490225@163.com

运动学分析、工作空间求解、性能分析和参数优化等具有重要的意义。在运动学分析方面,胡波等[13]基于共形几何代数理论对两种混联机构位置逆解进行分析。黄俊杰等[14]提出用 D-H 法和图形可视化相结合的方法求解 3-PRS 并联机构的正运动学。崔马茹等[15]采用空间封闭矢量法求解 3-URPR 并联机构位置逆解。李龙飞等[16]结合粒子群算法和封闭矢量法求解 UPS/UPR/SP 并联机构的正逆解,并利用极限搜索法求解机构可达工作空间。LEI 等[17]采用圆柱坐标搜索法和边界提取法计算 3-RRPS 并联机器人定向工作空间。

基于运动学层面的优化对整机设计及运动控制有重要意义,文献[18-22]对机构尺度进行了优化。在结构优化中,常用的智能算法有遗传算法、粒子群算法以及差分进化法[23]等,这些算法具有较好的适用性和可靠性[24-25]。文献[26]建立串并联混合机械臂含平均功率、扭矩波动和平均功率偏差在内的多优化模型,并采用主成分分析法进行求解。文献[27]以定位精度指标和紧凑性指标为优化目标,采用粒子群算法对 3-PUS-PU 并联机构进行尺寸参数优化设计。吕明青等[28]通过线性加权法构造出反映综合性能的多目标优化函数,并采用遗传算法完成多目标优化设计。许允斗等[29]依据工作空间和力传递效率性能指标,利用离散优化法对 R(2RPR)R/SP+RR 混联机器人进行尺寸优化。在现有研究中,部分学者构造多目标优化函数时常采用直接加权的方式,但各子目标函数的数量级往往有区别,容易导致目标函数物理意义不清晰,数量级较小的子目标函数的影响被忽略,使得某些优化算法在处理数量级不同的目标函数时表现不佳。

本文以一种面向复杂曲面加工的五自由度混联机构为研究对象,对其进行运动学分析和参数优化。在对结构描述的基础上,分析该机构运动特性并建立机构运动学模型。求解机构可达工作空间和规则工作空间。定义全域性能评价指标并分析机构尺寸参数对各项性能指标的影响,将各子目标函数转换为无量纲且等量级的子目标函数,采用参考目标距离法建立多目标优化模型,并通过遗传算法对机构尺寸参数进行优化设计。

1 混联机构运动学分析

1.1 结构描述

所设计的五自由度混联机构主要用于复杂曲面加工,其三维模型如图 1 所示。其由 3-PRS 并联机构串联二维移动滑轨机构组成。整机可实现沿 X、Y、Z 轴移动以及绕 X、Y 轴转动。3-PRS 并联机构可实现两转一移运动,其运动特征为 Z 轴方向上移动和绕 X、Y 轴转动,从上往下依次由定平台、3 条相同且分布均匀的驱动支链以及动平台组成。每条支链又分别由移动副 P、转动副 R、球面副 S 组成。其中,各支链移动副沿着立柱导轨上下滑动,连杆上端依次通过转动副和移动副连接于定平台,下端由球面副连接于动平台。机器人串联部分则由 2 条正交的移动滑轨组成,分别为 X 轴向滑轨和 Y 轴向滑轨。Y 轴向滑轨通过滑块分别与并联机构定平台以及 X 轴向滑轨相连,X 轴向滑轨则固定在机架上。此外,刀具中心线始终与动平台保持垂直,通过电机电主轴安装在并联部分的动平台上,在主轴带动下可实现绕 Z 轴转动。

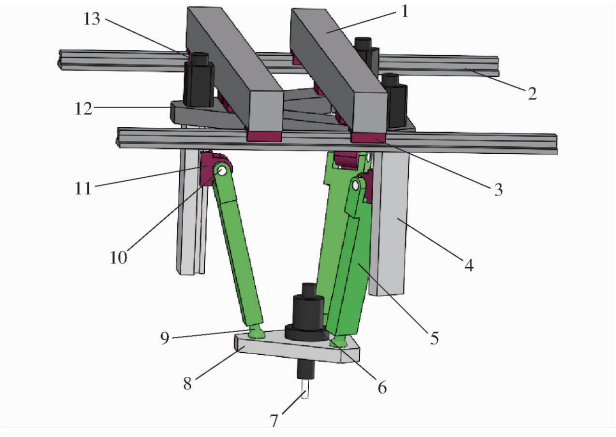

图 1 混联机构三维图

Fig. 1 Three-dimensional drawing of hybrid mechanism

1. Y 轴向滑轨 2. X 轴向滑轨 3. 移动副Ⅰ 4. 立柱导轨 5. 连杆 6. 电机Ⅰ 7. 刀具 8. 动平台 9. 球面副 10. 转动副 11. 移动副Ⅱ 12. 定平台 13. 电机Ⅱ

1.2 参数解耦

为了便于分析,将定平台、动平台均视为等边三角形,3 条 PRS 串联支链空间呈现 120°对称分布,其简化后模型如图 2 所示。其中,点 A_i 为立柱导轨与定平台交点,P_i 为移动副,R_i 为转动副,S_i 为球面副,L_i 为连杆长度,H_i 为移动副在立柱导轨上的移动距离,θ_i 为连杆与相邻立柱之间夹角,$i=1,2,3$ 为各支

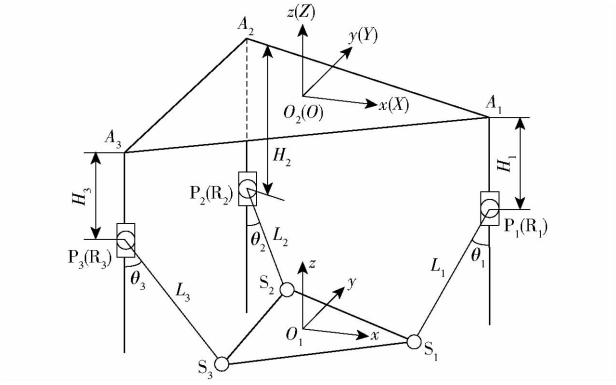

图 2 3-PRS 并联机构简图

Fig. 2 3-PRS parallel mechanism sketch

链序号。

在动平台几何中心处建立动坐标系 O_1xyz，规定 x 轴正方向为过点 O_1 指向 S_1，y 轴正方向为过点 O_1 平行于 S_2S_3 并指向 S_2，z 轴正方向则通过右手定则确定。在定平台几何中心处建立定坐标系 O_2xyz 和绝对坐标系 $OXYZ$，坐标轴正方向确定方法与动坐标系一致。定坐标系会随着串联移动滑轨运动而沿着 X、Y 轴方向移动，绝对坐标系固定不动。初始状态下，定坐标系与绝对坐标系完全重合，且坐标轴方向一致。将定平台外接圆半径设为 R，动平台外接圆半径设为 r。

3－PRS 并联机构属于少自由度机构，其动平台 6 个位姿参数 $(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ 中只有 3 个参数是独立的。因此，在运动学分析前应先对这 6 个位姿参数进行解耦。在绝对坐标系 $OXYZ$ 中动平台中心 O_1 位姿表示为 $(x_c,y_c,z_c,\alpha,\beta,\gamma)$，动坐标系 O_1xyz 与绝对坐标系 $OXYZ$ 之间的转换矩阵采用 ZYZ 欧拉角，即转换矩阵为

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{1}$$

球面副 S_1、S_2、S_3 在动坐标系 O_1xyz 中的坐标可以表示为

$$\begin{cases}[x_{S_1}^{O_1}\quad y_{S_1}^{O_1}\quad z_{S_1}^{O_1}]=[r\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}\\ [x_{S_2}^{O_1}\quad y_{S_2}^{O_1}\quad z_{S_2}^{O_1}]=\left[-\dfrac{r}{2}\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\quad 0\right]^{\mathrm{T}}\\ [x_{S_3}^{O_1}\quad y_{S_3}^{O_1}\quad z_{S_3}^{O_1}]=\left[-\dfrac{r}{2}\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\quad 0\right]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{2}$$

将式(2)转换成定坐标系中的坐标，得

$$\begin{cases}[x_{S_1}^{O_2}\quad y_{S_1}^{O_2}\quad z_{S_1}^{O_2}]=\boldsymbol{T}[r\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}+[x_c\quad y_c\quad z_c]^{\mathrm{T}}\\ [x_{S_2}^{O_2}\quad y_{S_2}^{O_2}\quad z_{S_2}^{O_2}]=\boldsymbol{T}\left[-\dfrac{r}{2}\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}r\quad 0\right]^{\mathrm{T}}+[x_c\quad y_c\quad z_c]^{\mathrm{T}}\\ [x_{S_3}^{O_2}\quad y_{S_3}^{O_2}\quad z_{S_3}^{O_2}]=T\left[-\dfrac{r}{2}\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}r\quad 0\right]^{\mathrm{T}}+[x_c\quad y_c\quad z_c]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{3}$$

由于转动副约束作用，各球面副只能在其所处支链中由滑块移动方向与连杆所组成的平面内运动，将这个平面称为约束平面。由此可得 3 个约束平面所对应的约束方程分别为

$$\begin{cases}Y=0\\ Y=-\sqrt{3}X\\ Y=\sqrt{3}X\end{cases} \tag{4}$$

故 3 个球面副坐标须满足

$$\begin{cases}y_{S_1}^{O_2}=0\\ y_{S_2}^{O_2}=-\sqrt{3}x_{S_2}^{O_2}\\ y_{S_3}^{O_2}=\sqrt{3}x_{S_3}^{O_2}\end{cases} \tag{5}$$

则有

$$\begin{cases}\gamma=-\alpha\\ x_c=-r\cos(2\alpha)\sin^2(\beta/2)\\ y_c=r\sin(2\alpha)\sin^2(\beta/2)\end{cases} \tag{6}$$

通过式(6)可知，动平台位姿参数 γ 与 α 互为相反数，参数 x_c、y_c 只与参数 α、β 有关，而与参数 z_c 无关，故 3－PRS 并联机构 3 个独立位姿参数为 α、β 和 z_c，符合 3－PRS 并联机构两转一移的运动特性。

1.3　逆运动学

已知刀尖点在绝对坐标系 $OXYZ$ 中的位姿 $(x_t,y_t,z_t,\alpha_t,\beta_t,\gamma_t)$，求解 3 个滑块移动距离 (H_1,H_2,H_3) 和串联部分位移 X、Y。由于刀具垂直安装于动平台上，故两者姿态角一致，则有 $\alpha_t=\alpha,\beta_t=\beta,\gamma_t=\gamma$。

因为刀具中心线与动坐标系 O_1xyz 的 z 轴重合，所以刀具单位方向矢量可表示为 $\boldsymbol{n}_t=[\cos\alpha\sin\beta\quad \sin\alpha\sin\beta\quad \cos\beta]^{\mathrm{T}}$。串联部分运动为平动，则刀尖点坐标 z_t 在绝对坐标系和在定坐标系中相同。设刀具长度为 h，在绝对坐标系 $OXYZ$ 中动平台中心 O_1 坐标可表示为

$$\begin{cases}x_{O_1}^{O}=x_t-h\cos\alpha\sin\beta\\ y_{O_1}^{O}=y_t-h\sin\alpha\sin\beta\\ z_{O_1}^{O}=z_c=z_t-h\cos\beta\end{cases} \tag{7}$$

在绝对坐标系中移动副 P_i 坐标为

$$\begin{cases}[x_{P_1}^{O}\quad y_{P_1}^{O}\quad z_{P_1}^{O}]=[R\quad 0\quad -H_1]^{\mathrm{T}}\\ [x_{P_2}^{O}\quad y_{P_2}^{O}\quad z_{P_2}^{O}]=\left[-\dfrac{R}{2}\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2}R\quad -H_2\right]^{\mathrm{T}}\\ [x_{P_3}^{O}\quad y_{P_3}^{O}\quad z_{P_3}^{O}]=\left[-\dfrac{R}{2}\quad -\dfrac{\sqrt{3}}{2}R\quad -H_3\right]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{8}$$

通过式(7)、(8)可得逆解模型为

$$H_i=z_{S_i}^{O}-\sqrt{L_i^2-(x_{P_i}^{O}-x_{S_i}^{O})^2-(y_{P_i}^{O}-y_{S_i}^{O})^2} \tag{9}$$

$$\theta_i=\arccos\frac{|z_{S_i}^{O}-H_i|}{L_i} \tag{10}$$

串联滑轨移动位移为

$$\begin{cases}X=x_{O_1}^{O_2}-x_c=x_t-h\cos\alpha\sin\beta+r\cos(2\alpha)\sin^2(\beta/2)\\ Y=y_{O_1}^{O_2}-y_c=y_t-h\sin\alpha\sin\beta-r\sin(2\alpha)\sin^2(\beta/2)\end{cases} \tag{11}$$

1.4　正运动学

该机构正运动学求解是已知滑块移动距离 (H_1,H_2,H_3) 和串联滑轨位移 X、Y，求解刀尖点位

姿。采用数值迭代法进行正运动学分析。采用连杆与相邻立柱之间的夹角 θ_i 来表示定坐标系 O_2xyz 中球面副 S_i 位置,即

$$\begin{cases} \boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} R - L_1\sin\theta_1 \\ 0 \\ -L_1\cos\theta_1 - H_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} -(R - L_2\sin\theta_2)/2 \\ \sqrt{3}(R - L_2\sin\theta_2)/2 \\ -L_2\cos\theta_2 - H_2 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{S}_3 = \begin{bmatrix} -(R - L_3\sin\theta_3)/2 \\ -\sqrt{3}(R - L_3\sin\theta_3)/2 \\ -L_3\cos\theta_3 - H_3 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{12}$$

由于 3 个球面副几何中心均匀分布在半径为 r 的圆周上,可得

$$|\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_{i+1}| = \sqrt{3}r \quad (i = 1,2,3) \tag{13}$$

其中,当 $i=3$ 时,$i+1$ 取 1。由此可得一个三元非线性方程组,可利用数值迭代法求解出 θ_i,即可求出 3 个球面副坐标,则在定坐标系 O_2xyz 中动平台中心坐标计算式为

$$\boldsymbol{S}_0 = [x_c \quad y_c \quad z_c]^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3)/3 \tag{14}$$

动平台姿态可以通过动平台所在平面单位法向量来进行求解。设 $\boldsymbol{m} = (a,b,c)^{\mathrm{T}}$ 为 3 个球面副所在空间平面法向量,也为动平台法向量,可得

$$\boldsymbol{m} = (\boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_1)(\boldsymbol{S}_3 - \boldsymbol{S}_1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_{S_2} - X_{S_1} & Y_{S_2} - Y_{S_1} & Z_{S_2} - Z_{S_1} \\ X_{S_3} - X_{S_1} & Y_{S_3} - Y_{S_1} & Z_{S_3} - Z_{S_1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

对动平台法向量进行单位化,可得

$$\boldsymbol{n}_S = (\boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_1) \times (\boldsymbol{S}_3 - \boldsymbol{S}_1)/|(\boldsymbol{S}_2 - \boldsymbol{S}_1) \times (\boldsymbol{S}_3 - \boldsymbol{S}_1)| \tag{16}$$

则在定坐标系 O_2xyz 中刀尖点坐标为

$$\begin{bmatrix} x_t' \\ y_t' \\ z_t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} - h\begin{bmatrix} n_{Sx} \\ n_{Sy} \\ n_{Sz} \end{bmatrix} \tag{17}$$

对于串联二维移动滑轨,设定坐标系原点在绝对坐标系中位置为 (X,Y),则在定坐标系中刀尖点坐标计算式为

$$\begin{cases} x_t = x_t' - X \\ y_t = y_t' - Y \\ z_t = z_t' \end{cases} \tag{18}$$

1.5 雅可比矩阵求解

雅可比矩阵能描述输入输出之间的对应关系,其中雅可比矩阵输入速度为串联移动滑轨和 3 个滑块移动速度,输出速度为机器人末端执行器沿 X、Y、Z 轴移动速度和绕 X、Y 轴转动角速度。对式(9)和式(11)进行求导,可得

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{v} \tag{19}$$

式中 $\boldsymbol{V}$——输入速度

$\boldsymbol{J}$——机构雅可比矩阵

$\boldsymbol{v}$——输出速度

则有

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \\ \dot{H}_1 \\ \dot{H}_2 \\ \dot{H}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial x_t} & \frac{\partial X}{\partial y_t} & \frac{\partial X}{\partial z_t} & \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial X}{\partial \beta} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_t} & \frac{\partial Y}{\partial y_t} & \frac{\partial Y}{\partial z_t} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \beta} \\ \frac{\partial H_1}{\partial x_t} & \frac{\partial H_1}{\partial y_t} & \frac{\partial H_1}{\partial z_t} & \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial H_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x_t} & \frac{\partial H_2}{\partial y_t} & \frac{\partial H_2}{\partial z_t} & \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial H_2}{\partial \beta} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x_t} & \frac{\partial H_3}{\partial y_t} & \frac{\partial H_3}{\partial z_t} & \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial H_3}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{y}_t \\ \dot{z}_t \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{20}$$

2 工作空间

可达工作空间是指机构末端执行器在运动过程中可以到达的空间点集合。由于可达工作空间形状往往是非规则的,因此,实际工程应用中常采用规则工作空间体积作为工作空间评价指标。采用分层搜索法得到可达工作空间,然后计算出每层最大内切圆半径从而得到由每层最大内切圆构成的规则工作空间。

2.1 约束条件

(1)移动滑轨行程约束

该混联机构工作空间受串联移动滑轨行程约束,有 $M_{\min} \leqslant M \leqslant M_{\max}$。

(2)滑块行程约束

受立柱导轨长度限制,滑块只能在一定范围内移动,有 $H_{\min} \leqslant H \leqslant H_{\max}$。

(3)连杆干涉约束

为避免连杆之间发生干涉,需满足至少有 2 个相邻连杆与动平台之间夹角大于 180°,则 P_iS_i 与 S_iS_0 角度约束应满足

$$\begin{cases} (P_1S_1 \times S_1S_0)\boldsymbol{j} < 0 \\ (P_2S_2 \times S_2S_0)\boldsymbol{j} > 0 \\ (P_3S_3 \times S_3S_0)\boldsymbol{i} < 0 \end{cases}$$

(4)转动副转角约束

转动副和球面副转角范围有一定限制,球面副转角如图 3 所示。转动副和球面副转角约束条件分别为 $0 < \theta \leqslant \theta_{\max}$ 和 $0 < \delta \leqslant \delta_{\max}$。

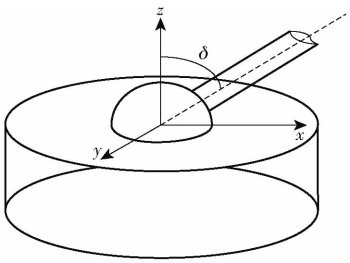

图 3　球面副转角约束

Fig. 3　Spherical sub-turn angle constraints

2.2　工作空间求解

该机构基本参数设置为：R = 350 mm，r = 150 mm，L = 550 mm。以刀尖点作为搜索参考点，给定机构约束条件参数取值为：M_{min} = − 250 mm，M_{max} = 250 mm，H_{min} = 0 mm，H_{max} = 500 mm，θ_{max} = 30°，δ_{max} = 45°。图 4 为可达工作空间求解流程图。图 5 和图 6 为并联部分和混联机构可达工作空间，3 − PRS 并联机构可达工作空间较小，且沿 X、Y 轴方向上的移动范围也比较小，不满足大范围下加工要求，而混联机构可达工作空间较大，关于 Y 轴对称，弥补了并联机构工作空间小的不足。

通过求解各层内切圆，可获得规则工作空间如图 7 所示。由图 7 可知，该混联机构规则工作空间

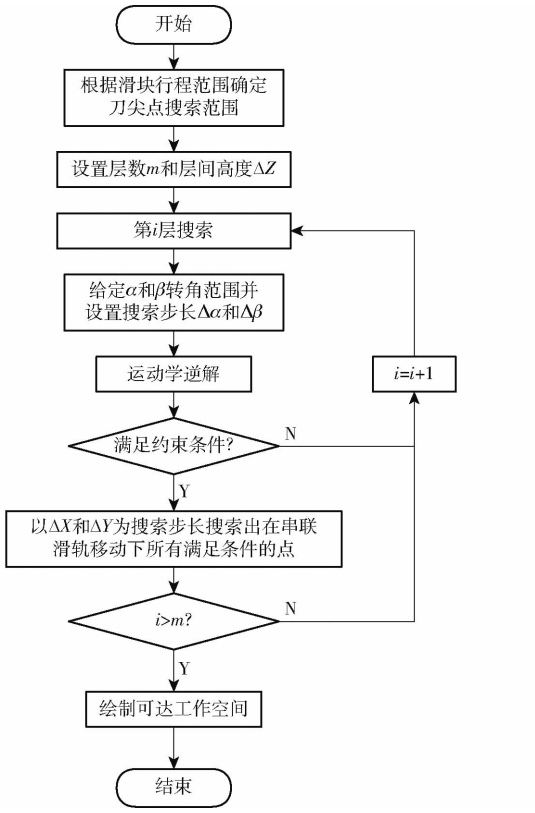

图 4　可达工作空间求解流程图

Fig. 4　Reachable workspace solution flowchart

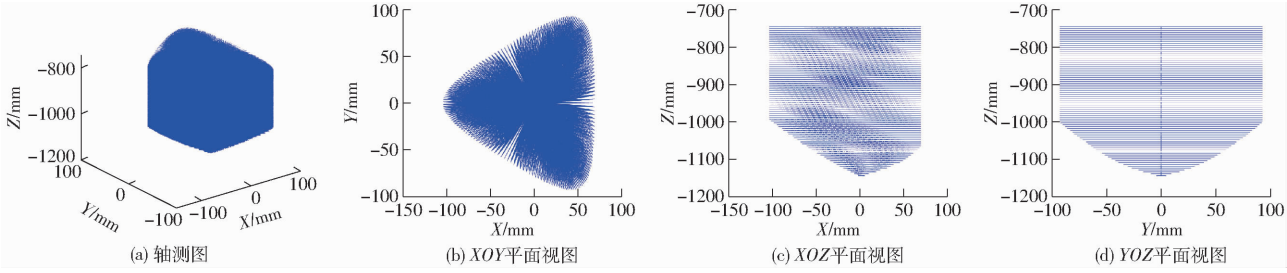

图 5　并联部分可达工作空间

Fig. 5　Reachable workspace in parallel section

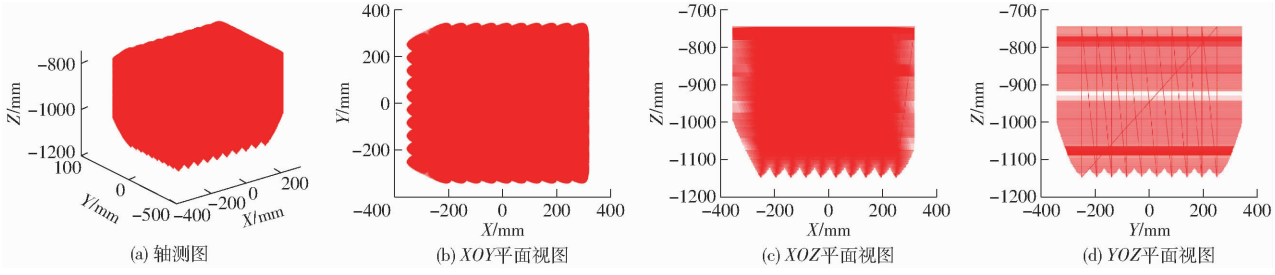

图 6　整机可达工作空间

Fig. 6　Reachable workspace of whole machine

平滑连续、无空洞现象。随着 Z 增加，投影在 XOY 平面上的截面先增大，最后趋于稳定。

根据每层最大内切圆半径计算规则工作空间体积 V，计算式为

$$V = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2}(C_i + C_{i+1})\Delta Z \tag{21}$$

式中　m——层数

C_i——第 i 层最大内切圆面积

C_{i+1}——第 $i+1$ 层最大内切圆面积

ΔZ——层间高度

3　性能分析

3.1　运动学性能评价指标

由矩阵论可知，雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的条件数决定其

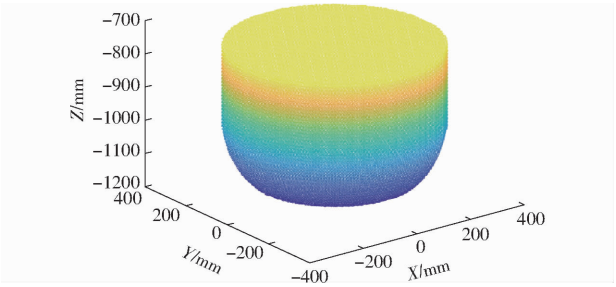

图 7 规则工作空间三维图

Fig. 7 Rule workspace three-dimensional diagram

求逆的计算精度,因此常用雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 条件数作为衡量机构运动学性能的指标。条件数计算式为

$$K(\boldsymbol{J})=\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \tag{22}$$

式中 $\sigma_{\max}$——雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 最大奇异值

$\sigma_{\min}$——雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 最小奇异值

条件数取值范围为 $1\leqslant K<\infty$,当 $K=1$ 时,机构具有最佳运动传递性能。为了便于分析,常采用条件数倒数来表示,即 $\kappa=1/K$。图 8 为结构参数 R、r、L 一定时,条件数 κ 随高度 Z 的分布情况。

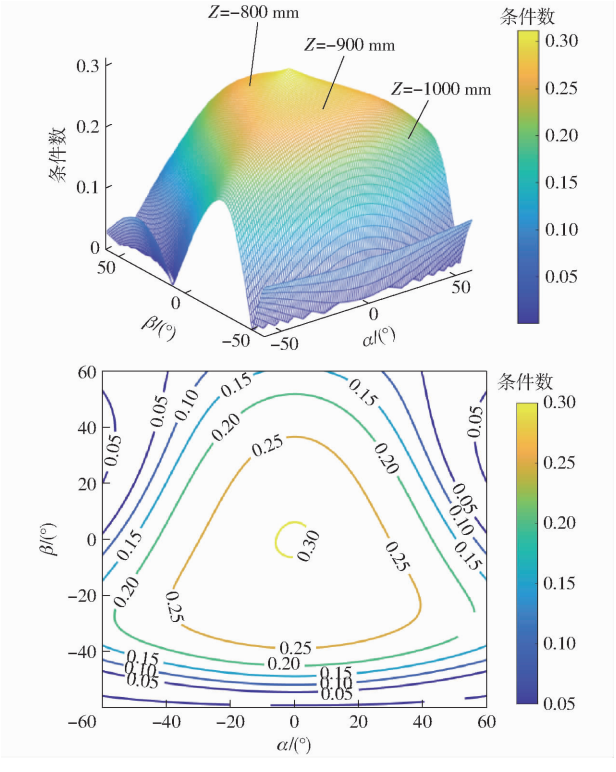

图 8 条件数 κ 分布图

Fig. 8 Distribution of condition number κ

由图 8 可知,条件数 κ 呈对称分布,动平台姿态越接近于初始姿态时,κ 越大,机构运动学性能越好,且 κ 与 Z 取值无关,故该机构在优化设计时,只需分析 Z 轴某一高度处条件数分布情况。为整体分析机构运动性能,将条件数 κ 的全域均值作为评价机构运动学性能指标,即

$$\eta=\frac{\int_{s_t}\kappa\mathrm{d}s}{\int_{s_t}\mathrm{d}s} \tag{23}$$

式中 s_t——工作空间内某一高度截面面积

由于 η 仅能反映机构在整个工作空间内运动性能的平均水平,而不能体现其性能波动幅度的信息,因此引入性能指标 σ 计算式为

$$\sigma=\sqrt{\frac{\int_s(\kappa-\eta)^2\mathrm{d}s}{\int_s\mathrm{d}s}} \tag{24}$$

σ 为 κ 在整个工作空间内的标准差,将其定义为机构全域运动性能波动指标。σ 越小,机构在工作空间内运动性能越稳定。

3.2 可操作度性能指标

可操作度性能指标用于评价动平台在工作空间内变化位姿的能力。结合雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$,该指标定义为

$$\chi=\sqrt{\det(\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J})}=|\det(\boldsymbol{J})| \tag{25}$$

当 $\chi=1$ 时,机构可操作度最佳;若趋于 0 或无穷时,机构则处于奇异位置。同样,对可操作度性能指标进行分析,χ 随高度 Z 的分布情况如图 9 所示。由图 9 可知,可操作度性能指标 χ 也呈对称性分布,在初始姿态处取得最大值,且与 Z 的取值无关。机构全域可操作度性能指标为

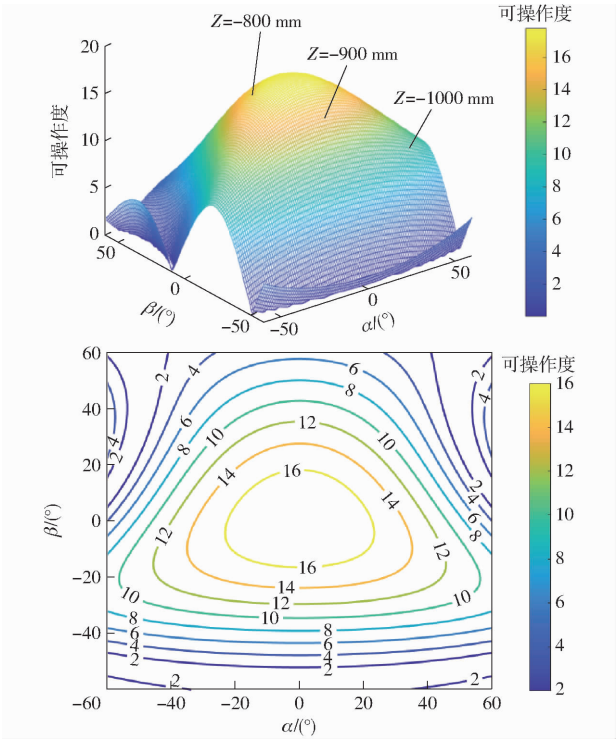

图 9 可操作度 χ 分布图

Fig. 9 Distribution of operability χ

$$\varepsilon = \frac{\int_{s_t} \chi \mathrm{d}s}{\int_{s_t} \mathrm{d}s} \tag{26}$$

3.3　规则工作空间性能指标

根据该机构加工任务要求，其设计工作空间为一个 ϕ500 mm × 300 mm 的圆柱体。由于规则工作空间高度是由滑块移动行程确定的，故当滑块行程确定后，当规则工作空间最小圆半径越接近于 250 mm 时，整个规则工作空间就越接近于设计工作空间，整体机构也就越符合设计要求。定义规则工作空间性能指标为

$$W = \frac{\min(r')}{250} \tag{27}$$

式中　r'——规则工作空间圆半径，mm

3.4　尺寸参数对性能指标的影响

采用正交试验法分析尺寸参数对各项性能指标的影响，选择定平台外接圆半径 R、动平台外接圆半径 r 和连杆长度 L 为试验因素，每个因素设置 3 个水平，如表 1 所示。

采用 $L_9(3^3)$ 三因素三水平正交表进行试验方案设计，以全域运动性能指标 η、全域运动性能波动指标 σ 和全域可操作度性能指标 ε 为目标参量进行试验，试验结果如表 2 所示。对表 2 中各因素同一水平条件下的各项性能指标进行求和，再取平均值，最后进行极差计算，结果如表 3 所示。

表 1　试验因素水平

Tab. 1　Experimental factors and levels

水平	因素		
	R/mm	r/mm	L/mm
1	300	100	500
2	350	150	550
3	400	200	600

表 2　试验结果

Tab. 2　Experiment results

序号	因素			η	σ	ε
	R/mm	r/mm	L/mm			
1	300	100	500	0.235 3	0.135 4	3.676 7
2	300	150	550	0.203 3	0.087 6	9.113 7
3	300	200	600	0.175 8	0.059 3	17.191 0
4	350	100	550	0.213 6	0.133 2	3.502 0
5	350	150	600	0.186 5	0.089 7	8.720 6
6	350	200	500	0.141 6	0.067 0	15.831 3
7	400	100	600	0.196 5	0.130 2	3.366 0
8	400	150	500	0.141 5	0.083 6	8.078 5
9	400	200	550	0.131 3	0.065 8	15.261 1

表 3　试验结果极差分析

Tab. 3　Range analysis of experiment results　　mm

因素	全域运动性能指标 η			全域运动性能波动指标 σ			全域可操作度性能指标 ε		
	R	r	L	R	r	L	R	r	L
K_{1j}	0.614 4	0.645 4	0.518 4	0.282 3	0.398 8	0.286 0	29.981 4	10.544 7	27.586 5
K_{2j}	0.541 7	0.531 3	0.548 2	0.289 9	0.260 9	0.286 6	28.053 9	25.912 8	27.876 8
K_{3j}	0.469 3	0.448 7	0.558 8	0.279 6	0.192 1	0.279 2	26.705 6	48.283 4	29.277 6
$K_{1j}/3$	0.204 8	0.215 1	0.172 8	0.094 1	0.132 9	0.095 3	9.993 8	3.514 9	9.195 5
$K_{2j}/3$	0.180 6	0.177 1	0.182 7	0.096 6	0.087 0	0.095 5	9.351 3	8.637 6	9.292 3
$K_{3j}/3$	0.156 4	0.149 6	0.186 3	0.093 2	0.064 0	0.093 1	8.901 9	16.094 5	9.759 2
极差	0.048 4	0.065 5	0.013 5	0.003 4	0.068 9	0.002 4	1.091 9	12.579 6	0.563 7

由表 3 可知，全域运动性能指标 η、全域运动性能波动指标 σ 和全域可操作度性能指标 ε 受动平台外接圆半径 r 的影响最大，其次为定平台外接圆半径 R，再次为连杆长度 L。

4　优化设计

针对该混联机构进行多目标优化，优化设计流程如图 10 所示。

4.1　设计变量和约束条件确定

通过对该混联机构各项性能指标的分析可知，尺寸参数 R、r 和 L 对各指标的影响较大，因此优化设计时取这 3 个尺寸参数作为设计变量，并确定 3 个变量尺寸约束范围及其他条件约束为

$$\begin{cases} 175\ \text{mm} \leqslant R \leqslant 525\ \text{mm} \\ 75\ \text{mm} \leqslant r \leqslant 225\ \text{mm} \\ 275\ \text{mm} \leqslant L \leqslant 825\ \text{mm} \\ 0 < \theta \leqslant 30° \\ 0 < \delta \leqslant 45° \\ -250\ \text{mm} \leqslant S \leqslant 250\ \text{mm} \\ 0\ \text{mm} \leqslant H \leqslant 500\ \text{mm} \end{cases}$$

4.2　目标函数模型

将式(23)、(24)、(26)、(27)作为优化时 4 个子目标函数。结合参考目标距离法[30]和线性加权法，将 4 个子目标函数转换成 1 个单目标函数，并统一每个子函数的量纲。假设 4 项指标同样重要，故权重 λ_i 取 1/4。构造目标函数模型

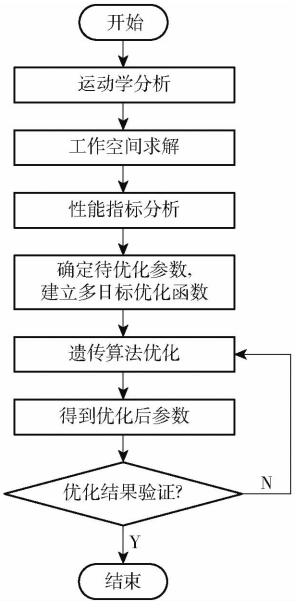

图 10 优化设计流程图

Fig. 10 Optimization design flowchart

$$F_{\min}=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i|Q_i-f_i(x)|=\frac{|1-\eta|+|\sigma|+|1-\varepsilon|+|1-W|}{4} \tag{28}$$

式中 Q_i——子目标函数参考值

4.3 优化算法

遗传算法过程简单、效率高、适用于全局搜索，因此选用遗传算法进行尺寸参数优化。算法所涉及参数设置：初始种群大小 N 为 50，交叉率 P_c 为 0.95，变异率 P_m 为 0.05，迭代次数 G 为 100。图 11 为遗传算法技术路线图。

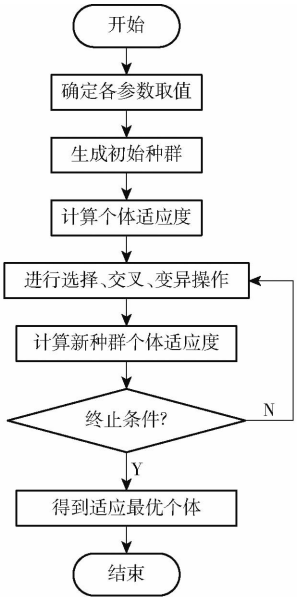

图 11 遗传算法技术路线图

Fig. 11 Genetic algorithm technology roadmap

经过多目标优化，在迭代 31 次左右，目标函数找到最优值，其收敛趋势如图 12 所示，且经过优化处理后获得的最佳尺寸参数如表 4 所示。由表 4 可知，相比于优化前，机构通过遗传算法优化后，尺寸参数 R、r、L 的取值有所变小，机构变得更加紧凑，但全域运动性能指标 η 提高 40%，全域运动性能波动指标 σ 提高 45%，全域可操作度性能指标 ε 提高 77%，说明机构性能得到了较大提升。

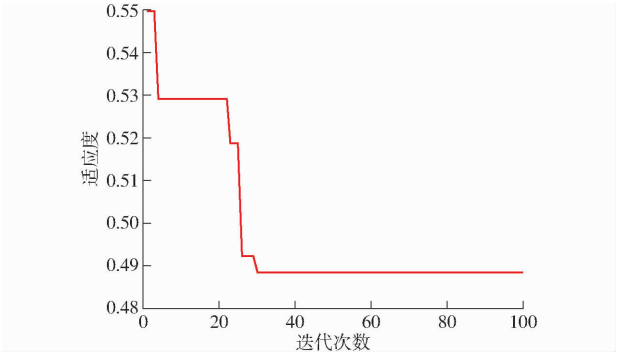

图 12 目标函数收敛曲线

Fig. 12 Convergence curve of objective function

表 4 遗传算法优化结果

Tab. 4 Genetic algorithm optimization results

参数	优化前	优化后
R/mm	350	279.366 3
r/mm	150	75.230 2
L/mm	550	436.593 0
全域运动性能指标 η	0.175 5	0.245 0
全域运动性能波动指标 σ	0.163 9	0.090 0
全域可操作度性能指标 ε	8.507 1	1.947 2
规则工作空间指标 W	1.017 0	1.000 0

4.4 结果对比

为验证优化结果，将优化后结构参数进行圆整，取 $R=279$ mm，$r=75$ mm，$L=437$ mm。图 13 为优化前后规则工作空间。对比优化前，优化后规则工作空间体积有所减小，原因为在最优性能条件下，尺寸参数变小导致的，但工作空间更接近于圆柱形设计工作空间，结构更加紧凑，性能更为优越。

由于性能指标沿 Z 轴分布规律相同，则以 $Z=-900$ mm 截面进行分析。优化前后运动性能指标和可操作度性能指标对比结果分别如图 14 和图 15 所示。由图 14 可知，优化后运动性能指标最大值由 0.3 提升至 0.55，机构运动性能更好。由图 15 可知，优化后可操作度性能指标最大值由 16 下降至 4，机构可操作度性能也得到了明显提升。

5 整机仿真实验验证

5.1 整机正逆解验证

(1)逆运动学模型仿真验证

根据优化后尺寸参数进行重新建模，优化后机

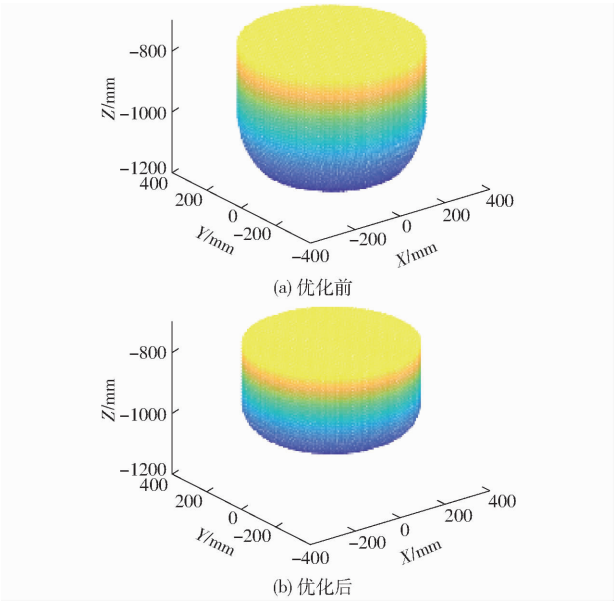

图 13　优化前后规则工作空间

Fig. 13　Rule workspace before and after optimization

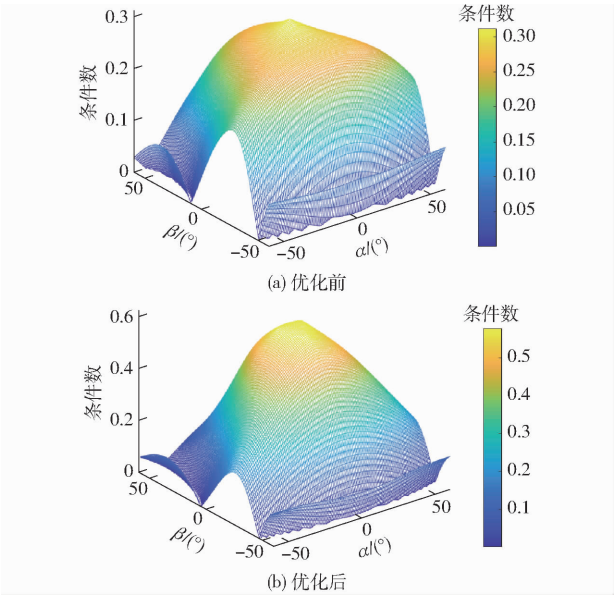

图 14　优化前后运动性能指标对比

Fig. 14　Comparison of kinematic performance indexes before and after optimization

$$\begin{cases} x = 50\cos(\pi t) \\ y = 50\sin(\pi t) \\ z = 0 \\ \alpha = 0.2\sin(\pi t/5) \\ \beta = 0.2\cos(\pi t/5) \end{cases} \tag{29}$$

构模型如图 16 所示，基于 ADAMS 仿真软件验证逆运动学理论模型正确性。选取刀尖点位置及姿态运动轨迹为式(29)。利用式(9)和式(11)计算各滑块和串联滑轨理论曲线，与利用 ADAMS 得到仿真曲线进行对比，结果如图 17 所示。由图 17 可得两种方法得到的曲线近似相等，说明逆运动学模型正确。

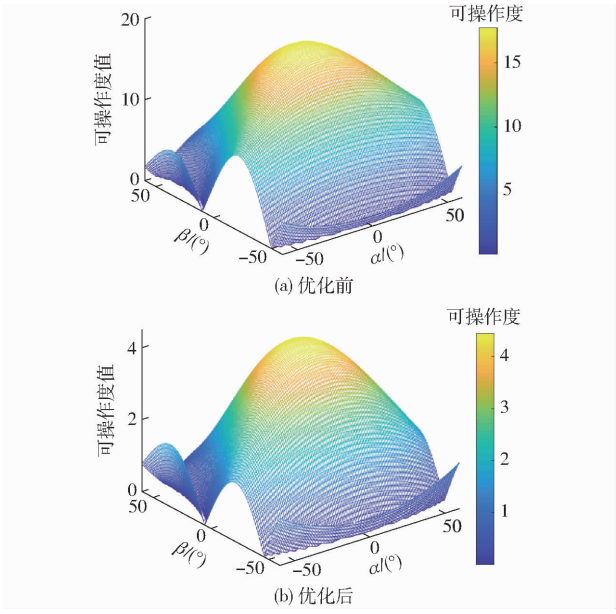

图 15　优化前后可操作度性能指标对比

Fig. 15　Comparison of operability performance metrics before and after optimization

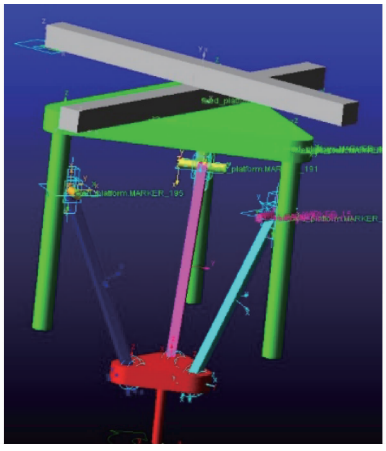

图 16　优化后三维模型简图

Fig. 16　Optimized 3D model schematic

(2)正运动学模型仿真验证

对各支链滑块以及串联部分滑块分别施加一个驱动函数为

$$\begin{cases} X = 100\sin(0.1t) \\ Y = 100\cos(0.1t) \\ P_1 = 50\sin(0.2t) \\ P_2 = 50\cos(0.2t) \\ P_3 = 50\sin(0.2t) \end{cases} \tag{30}$$

理论计算与 ADAMS 仿真结果对比如图 18 所示。由图 18 可知，在同一驱动下，刀尖点运动轨迹基本吻合，证明正运动学模型正确。

5.2　优化前后模型仿真对比

对优化后机构模型刀尖点施加如式(29)的驱动函数，对比优化前后模型速度、加速度，结果如图 19 所示。由图 19 可知，模型经过优化后，3 个滑

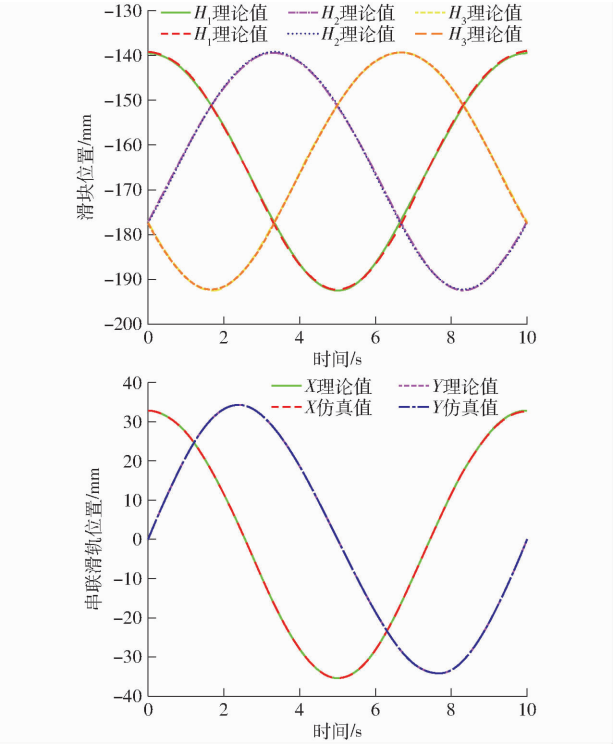

图 17 逆运动学仿真对比

Fig. 17 Inverse kinematics simulation comparison

块移动速度曲线、移动加速度曲线波动均比优化前有所减小，表明在同样输入能量下，优化后模型可减小运动过程中的冲击和振动，使机构运动控制更加精确，从而提高了整个系统稳定性和操作精度。

5.3 优化后模型轨迹仿真验证

对优化后机构模型开展三维模型仿真试验，为不失一般性，在该混联机构工作空间范围内，给定刀尖点运动轨迹为一个圆半径为 50 mm 的螺旋线，即

$$\begin{cases} x = 50\cos(\pi t) \\ y = 50\sin(\pi t) \\ z = 10t \end{cases} \tag{31}$$

因为该机构末端输出为三维移动和两维转动，因此可将该期望螺旋运动轨迹分解成沿 X、Y、Z 方向移动和绕 X、Y 轴转动，将分解完的轨迹离散成一系列的数据点，再将所得的数据点以样条曲线的形式添加到 ADAMS 中，作为刀尖点驱动函数，得到仿真结果如图 20 所示。由图 20 可知，动平台末端中心点能够按照所设螺旋线轨迹完成复杂空间曲线的运动，运动过程平稳。

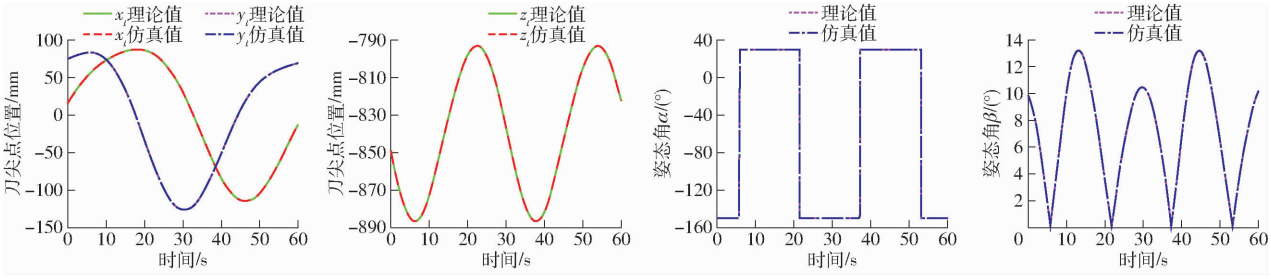

图 18 正运动学仿真对比

Fig. 18 Forward kinematics simulation comparison

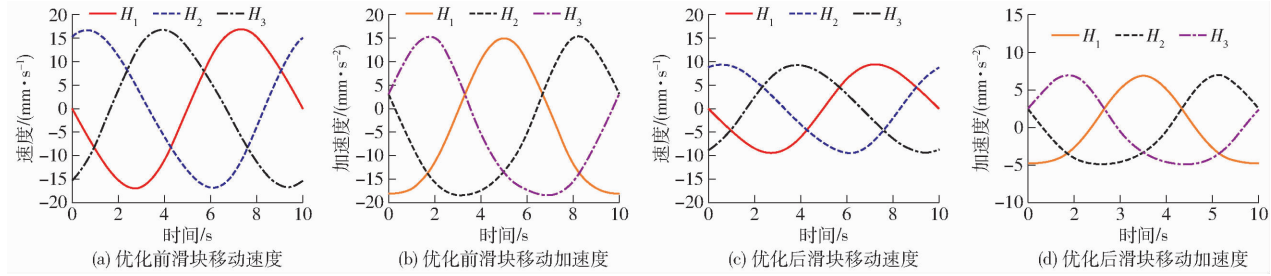

图 19 优化前后模型速度、加速度仿真对比

Fig. 19 Simulation comparison of velocity and acceleration before and after optimization

图 21 为仿真轨迹和期望轨迹对比，由图 21 可知，在所提优化模型中仿真运动轨迹与期望运动轨迹完全重合，证明优化后机构模型能够准确地模拟和预测实际系统运动，证明了优化后模型在后续复杂曲线加工和应用的可行性。

6 结论

（1）分析了五自由度混联机构特征、运动学求解、工作空间布局、性能指标，提出了优化模型。分析得到全域性能指标沿 Z 轴分布规律相同，且全域性能指标均会受动平台外接圆半径 r、定平台外接圆半径 R 和连杆长度 L 的影响。

（2）通过目标距离法建立多目标优化模型，采用遗传算法对机构尺寸参数进行优化设计。结果表明，优化模型机构尺寸参数有所减小，但全域运动性能指标、全域运动性能波动指标以及全域可操作度

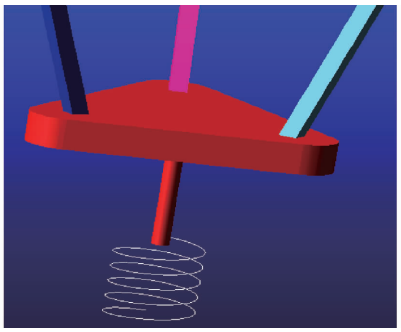

图 20　仿真运动轨迹

Fig. 20　Simulated motion trajectory

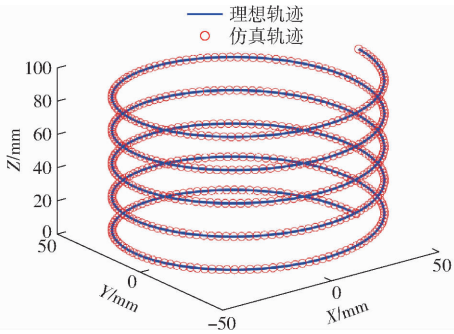

图 21　运动轨迹对比

Fig. 21　Comparison of motion trajectories

性能指标分别提高 40%、45% 和 77%，整体机构设计更加符合实际设计要求。

(3)对比了优化前后模型在驱动空间内的速度和加速度，证明了优化后模型优于优化前模型。为了表征优化后模型在复杂曲线上的加工性能，在工作空间内设置了复杂螺旋线，仿真试验结果表明，优化后机构能够走出复杂螺旋线，证明了其加工复杂曲线的可行性。

参　考　文　献

[1] 陈国强，周红鹏，黄俊杰，等. 考虑关节摩擦的 3－PRS 并联机构动力学建模研究[J]. 农业机械学报，2021，52(8)：416－426.
CHEN Guoqiang, ZHOU Hongpeng, HUANG Junjie, et al. Dynamic modeling with joint friction of 3－PRS parallel mechanism [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery，2021，52(8)：416－426. (in Chinese)

[2] PENG J, GUO Y, MENG D, et al. Kinematics, statics modeling and workspace analysis of a cable-driven hybrid robot[J]. Multibody System Dynamics, 2024，61(2)：163－193.

[3] 张加波，刘海涛，乐毅，等. 面向大型卫星的可移动混联机器人加工技术[J]. 航空学报，2022，43(5)：100－108.
ZHANG Jiabo, LIU Haitao, YUE Yi, et al. Mobile hybrid robot processing technology for large satellites[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica，2022，43(5)：100－108. (in Chinese)

[4] 房海蓉，李壮壮. 新型大转角 2T2R 并联机构的设计与分析[J]. 北京航空航天大学学报，2020，46(3)：465－473.
FANG Hairong, LI Zhuangzhuang. Design and analysis of a new large rotation angle 2T2R parallel mechanism[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics，2020，46(3)：465－473. (in Chinese)

[5] 王泽胜，李研彪，罗怡沁，等. 七自由度冗余混联机械臂的动力学分析[J]. 浙江大学学报(工学版)，2020，54(8)：1505－1515.
WANG Zesheng, LI Yanbiao, LUO Yiqin, et al. Dynamic analysis of a 7－DOF redundant and hybrid mechanical arm[J]. Journal of Zhejiang University (Engineering Science)，2020，54(8)：1505－1515. (in Chinese)

[6] SUN H, ZHANG Y, XIE B, et al. Dynamic modeling and error analysis of a cable-linkage serial-parallel palletizing robot[J]. IEEE Access, 2020, 9：2188－2200.

[7] 张鹏程，牛建业，刘承磊，等. 牵引式下肢康复机器人机构参数优化及轨迹规划[J]. 工程设计学报，2022，29(6)：695－704.
ZHANG Pengcheng, NIU Jianye, LIU Chenglei, et al. Mechanism parameter optimization and trajectory planning of traction lower limb rehabilitation robot[J]. Chinese Journal of Engineering Design, 2022，29(6)：695－704. (in Chinese)

[8] 马春生，尹晓秦，马振东，等. 下肢外骨骼的膝关节轴线自适应设计与尺度综合[J]. 兵工学报，2022，43(3)：653－660.
MA Chunsheng, YIN Xiaoqin, MA Zhendong, et al. Axis self-adaptive design and dimensional synthesis of knee joint of lower limb exoskeleton[J]. Acta Armamentarii，2022，43(3)：653－660. (in Chinese)

[9] KUMAR S, WÖHRLE H, DE GEA FERNÁNDEZ J, et al. A survey on modularity and distributivity in series-parallel hybrid robots[J]. Mechatronics, 2020, 68：102367.

[10] 胡波，高添，曾达幸，等.(2－RPU＋UPU)＋(RR)混联机构末端约束和运动耦合分析[J]. 农业机械学报，2023，54(10)：416－420，458.
HU Bo, GAO Tian, ZENG Daxing, et al. Terminal constraint and kinematic coupling of (2－RPU＋UPU)＋(RR) hybrid mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023，54(10)：416－420，458. (in Chinese)

[11] 陈凯云，盛晨原. 多足蠕动式攀爬机器人混联机构运动特性及其工作空间[J]. 机械工程学报，2023，59(9)：28－39.
CHEN Kaiyun, SHENG Chenyuan. Kinematic characteristics and workspace in hybrid mechanism of multi-legged peristaltic climbing robot[J]. Journal of Mechanical Engineering，2023，59(9)：28－39. (in Chinese)

[12] 沈惠平，吉恩成，丁文芹，等. 6-DOF 混联采茶机器人机构设计与动平衡分析[J]. 农业机械学报，2023，54(5)：416－426.
SHEN Huiping, JI Encheng, DING Wenqin, et al. Mechanism design and dynamic balance analysis of 6-DOF hybrid robot for tea-picking[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023，54(5)：416－426. (in Chinese)

[13] 胡波，高俊林，霍焱，等. 基于共形几何代数的两种 6 自由度串并混联机构位置逆解分析[J]. 机械工程学报，2022，58(21)：60－68.
HU Bo, GAO Junlin, HUO Yan, et al. Inverse position analysis of two kinds of 6-DOF serial-parallel manipulators based on conformal geometric algebra[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022，58(21)：60－68. (in Chinese)

[14] 黄俊杰，胡博炜，宋金典. 一种 3－PRS 并联机构正向运动学求解方法[J]. 机械传动，2019，43(8)：98－102.

HUANG Junjie, HU Bowei, SONG Jindian. A solving method for forward kinematics of 3 - PRS parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2019, 43(8): 98 - 102. (in Chinese)

[15] 崔马茹,武建德,李瑞琴,等. 3 - URPR 并联机构的逆运动学与可达工作空间分析[J]. 包装工程,2020,41(21):196 - 201.
CUI Maru, WU Jiande, LI Ruiqin, et al. Inverse kinematics and reachable workspace of 3 - URPR parallel mechanism[J]. Packaging Engineering, 2020, 41(21): 196 - 201. (in Chinese)

[16] 李龙飞,赵耀虹,孙斌,等. UPS/UPR/SP 并联机构的逆运动学与可达工作空间分析[J]. 机械传动,2022,46(4):89 - 94.
LI Longfei, ZHAO Yaohong, SUN Bin, et al. Inverse kinematics and reachable workspace of UPS/UPR/SP parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2022, 46(4): 89 - 94. (in Chinese)

[17] LEI J, WANG J. Orientation workspace analysis and parameter optimization of 3 - RRPS parallel robot for pelvic fracture reduction[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2023, 15(5): 051003.

[18] 胡碧波. 两种三自由度并联机构的多目标优化设计[D]. 秦皇岛:燕山大学,2022.
HU Bibo. Multi-objective optimization design of two type of three-degree-of-freedoms parallel mechanism[D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2022. (in Chinese)

[19] 王启明,张汉祖,蒋江月,等. 平面平台型 6 - PSS 并联机构构型选择与参数优化[J]. 农业机械学报,2022,53(5):449 - 458.
WANG Qiming, ZHANG Hanzu, JIANG Jiangyue, et al. Configuration selection and parameter optimization of 6 - PSS parallel mechanism with planar platform[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(5): 449 - 458. (in Chinese)

[20] 张伟中,李金平,叶敏,等. 2 - PUR - PSR 并联机构尺度综合多目标优化[J]. 农业机械学报,2020,51(11):403 - 410.
ZHANG Weizhong, LI Jinping, YE Min, et al. Multi-objective optimization of dimensional synthesis for 2 - PUR - PSR parallel manipulator[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(11): 403 - 410. (in Chinese)

[21] 叶伟,谢镇涛,李秦川. 一种可用于微创手术的并联机构运动学分析与性能优化[J]. 机械工程学报,2020,56(19):103 - 112.
YE Wei, XIE Zhentao, LI Qinchuan. Kinematics analysis and performance optimization of a parallel manipulator for minimally invasive surgery[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(19): 103 - 112. (in Chinese)

[22] 刘晓飞,刘洋,何阳,等. 2RPU + 2UPR + RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化[J]. 农业机械学报,2023,54(3):440 - 450.
LIU Xiaofei, LIU Yang, HE Yang, et al. Kinematic analysis and dimension optimization of multi-redundantly actuated parallel mechanism 2RPU + 2UPR + RPR[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(3): 440 - 450. (in Chinese)

[23] 李菊,肖思进,沈惠平,等. 两支链三平移并联机构动力学分析与性能优化[J]. 农业机械学报,2022,53(10): 412 - 422,445.
LI Ju, XIAO Sijin, SHEN Huiping, et al. Dynamics analysis and performance optimization of two-chain and three-translation parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(10): 412 - 422, 445. (in Chinese)

[24] 吉阳珍,侯力,罗岚,等. 基于组合优化算法的 6R 机器人逆运动学求解[J]. 中国机械工程,2021,32(10): 1222 - 1232.
JI Yangzhen, HOU Li, LUO Lan, et al. Solution of inverse kinematics for 6R robots based on combinatorial optimization algorithm[J]. China Mechanical Engineering, 2021, 32(10): 1222 - 1232. (in Chinese)

[25] 陈禹含,韩宝玲,王善达,等. 结合旋量理论和代数方法的六自由度机械臂逆运动学求解算法[J]. 科学技术与工程,2021,21(25):10762 - 10767.
CHEN Yuhan, HAN Baoling, WANG Shanda, et al. Inverse kinematic solution algorithm of 6-DOF robot arm with combination of screw theory and algebraic methods[J]. Science Technology and Engineering, 2021, 21(25): 10762 - 10767. (in Chinese)

[26] LI Y B, WANG Z S, SUN P, et al. Dynamic load distribution optimization for a 4-DOF redundant and series-parallel hybrid humanoid arm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(9): 45 - 54.

[27] 周亚杰,李仕华,徐奇,等. 3 - PUS - PU 柔顺并联机构运动学分析与优化设计[J]. 农业机械学报,2022,53(9):417 - 424.
ZHOU Yajie, LI Shihua, XU Qi, et al. Kinematic analysis and optimal design of 3 - PUS - PU compliant parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(9): 417 - 424. (in Chinese)

[28] 吕明青,邵珠峰,徐道春,等. 基于遗传算法的六连杆机构尺寸优化设计[J]. 锻压技术,2022,47(7):184 - 193.
LÜ Mingqing, SHAO Zhufeng, XU Daochun, et al. Optimization design on dimension of six-link mechanism based on genetic algorithm[J]. Forging & Stamping Technology, 2022, 47(7): 184 - 193. (in Chinese)

[29] 许允斗,徐郑和,杨帆,等. 考虑工作空间与力传递效率的新型五自由度混联机器人设计与分析[J]. 中国机械工程,2019,30(16):1996 - 2002.
XU Yundou, XU Zhenghe, YANG Fan, et al. Design and analysis of a new 5-DOF hybrid robot considering workspace and force transmission efficiency[J]. China Mechanical Engineering, 2019, 30(16): 1996 - 2002. (in Chinese)

[30] 蒲志新,郭建伟,潘玉奇,等. 2PPaPaR 并联机构性能分析及优化设计[J]. 中国机械工程,2023,34(19): 2304 - 2312.
PU Zhixin, GUO Jianwei, PAN Yuqi, et al. Performance analysis and optimization design of 2PPaPaR parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(19): 2304 - 2312. (in Chinese)