doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.06.068

基于运动/力传递指标的冗余串联机器人笛卡尔刚度优化控制

李秦川[1]　朱立文[1]　史东豪[1]　杨辰光[2]

(1. 浙江理工大学机械工程学院, 杭州 310018; 2. 华南理工大学自动化科学与工程学院, 广州 510641)

摘要: 冗余串联机器人具有工作空间大、动态特性好等优点,广泛用于人机协作。由于人机协作具有场景非结构化、工作任务多样化等特点,为保障交互安全性,需要对机器人末端刚度进行控制。针对常用的刚度规划算法存在功率传递效率低且计算效率低等问题,本文提出一种基于运动/力传递性能笛卡尔刚度规划器。其采用顺序最小二乘优化算法计算机器人工作轨迹,引入局部传递指标以提升轨迹中的功率传递效率,同时通过基于刚度椭球的几何成型法降低优化目标复杂度,通过拓展臂角描述法降低优化空间维度,提升优化算法计算效率,减少计算资源占用。基于 Matlab 的 Simulink 平台进行仿真验证,结果证明基于几何成型法的高效轨迹规划器对于机器人笛卡尔轨迹的不变性,并基于 Franka Panda 冗余串联机器人平台进行实验验证,结果证明该规划器实现机器人末端期望刚度方向的可行性。

关键词: 冗余串联机器人; 笛卡尔刚度优化; 运动/力传递指标; 几何成型方法

中图分类号: TP24　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2025)06-0723-12　　**OSID**:

Cartesian Stiffness Optimization Control of Redundant Serial Robots Based on Motion/Force Transmission Indices

LI Qinchuan[1]　ZHU Liwen[1]　SHI Donghao[1]　YANG Chenguang[2]

(1. *School of Mechanical Engineering*, *Zhejiang Sci-Tech University*, *Hangzhou* 310018, *China*

2. *School of Automation Science and Engineering*, *South China University of Technology*, *Guangzhou* 510641, *China*)

Abstract: Redundant serial robots possess the advantages of a large workspace and good dynamic characteristics, and have been widely used in human-robot collaboration. Due to the characteristics of unstructured scenes and diversified tasks in human-robot collaboration, it is necessary to control the end stiffness of robots to ensure interaction safety. However, common stiffness planning algorithms suffer from low power transmission efficiency and inefficient computation. Aiming to address these issues, a Cartesian stiffness planner was proposed based on motion/force transmission performance. The algorithm employed a sequential least squares optimization technique to compute the robot's workspace trajectory. Local transmission indices were introduced to enhance power transmission efficiency within the trajectory. The optimization objective was simplified through the use of a geometric shaping method based on stiffness ellipsoids. Furthermore, the optimization space dimensions were reduced by extending the arm angle description method, thereby improving the computational efficiency of the optimization algorithm and reducing computational resource consumption. The efficacy of the proposed trajectory planner, based on the geometric shaping method for robot Cartesian trajectories, was demonstrated through simulation verification conducted by using the Matlab-based Simulink platform. Experimental validation was performed on the Franka Panda redundant serial robot platform, confirming the feasibility of realizing the desired stiffness direction at the robot end by this planner.

Key words: redundant serial robot; Cartesian stiffness optimization; motion/force transmission index; geometrical shaping

收稿日期: 2024-03-17　修回日期: 2024-04-22

基金项目: 浙江省国际合作技术研发与示范推广项目(2021C04017)

作者简介: 李秦川(1975—),男,教授,博士,主要从事并联机器人机构学理论和应用技术研究,E-mail: lqchuan@zstu.edu.cn

0 引言

随着机器人运动控制技术的不断发展,冗余串联机器人凭借冗余自由度在分拣、搬运等任务中展现出高效性与灵活性[1]。为保障人机协作安全,需通过笛卡尔刚度规划实现柔顺运动特性[2]。现有刚度调控方法存在算法计算效率低[3-4]、硬件适配性差[5]及能耗优化缺失[6-7]等局限。传统轨迹规划方法在刚度约束与能耗优化方面存在局限性[8-10],特别是轨迹优化中高维刚度矩阵的维度压缩难题[13-15]。本文提出基于几何刚度椭球的轨迹规划方法,通过长/短轴表征刚度各向异性,将高维矩阵优化转换为几何方向调整[11-12]。针对 SRS 派生构型逆运动学多解问题,本文提出扩展臂角参数化方法,结合 Franka Panda 机器人构型特性建立唯一解析解[16-17]。通过建立臂角可行域与刚度椭球的几何映射关系,采用运动/力传递性能指标构建功率效率约束[18-20],基于顺序最小二乘规划(SLSQP)算法实现臂角空间多目标优化。

1 基于几何成型法的高效轨迹规划器

在轨迹处理时,须确定最佳关节配置。与传统数值成型方法不同,通过应用几何成型方法(GCSS)[21],提出了一种在机器人笛卡尔运动方向上构建刚度椭球的轨迹优化算法。该算法利用机器人冗余自由度提供零空间,在特定笛卡尔位置找到最佳机器人配置,以尽可能实现所需的主轴刚度椭球方向,同时调整工作路径途中的运动特性。

广义上冗余机器人是指驱动器数大于末端执行器自由度的机器人,一般具有 7 个或更多的驱动关节。此时关节空间具有 7 维或更高维度,在此基础上机器人优化算法效率会受到较大约束。采用一种改进的臂角描述法,其通过利用冗余机器人所拥有的零空间,以臂角形式将优化算法应用于特定的线性空间内,从而大幅降低算法空间及时间复杂度,极大程度上提升算法效率。

基于几何成型法的高效轨迹规划器工作流程如图 1 所示。需要指定机器人工作轨迹 X_d 以及工作过程中的最小功率传递性能下限 $LTI_{\min}$ 作为算法恒定参数;利用基于改进臂角运动学的臂角可行域求解器,求得当前笛卡尔坐标下满足功率传递性能的臂角可行域 c_{Range};利用顺序最小二乘规划(SLSQP)方法,将刚度椭球比率 α 作为约束条件,在机器人臂角可行域 c_{Range} 内,以迭代计算方法求得满足任务需求的最优机器人臂型角 c;通过改进臂角运动学,基于工作轨迹 X_d 及最优臂型角 c 求解机器人各关节位置值送至机器人本体执行。

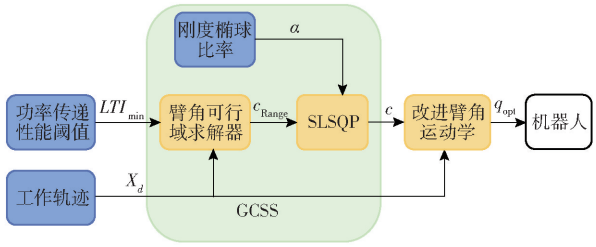

图 1 基于几何成型法的高效轨迹规划器流程图

Fig. 1 Flowchart of efficient trajectory planner based on GCSS method

基于几何成型法的高效轨迹规划器可通过优化问题表示为

$$\begin{cases}\min\ T(q(t)) = T_2(x(t), c(t)) \\ \text{s.t.}\ \begin{cases} q(t) = f(x(t), c(t)) \\ x \in X_d,\ -2\pi < c(t) < 2\pi,\ t \in [0, T] \\ x(0) = x_{init} \\ c(0) = c_{init} \\ L_{\lim} < L(t) = g(x(t), c(t)) \\ 0 < L_{\lim} < 1 \end{cases} \end{cases} \tag{1}$$

式中,优化目标为最小化 $T(q(t))$,即最小化机器人笛卡尔刚度椭球方向与期望刚度方向间误差,$q(t)$ 为机器人各时刻关节位置。基于改进臂角描述法,可将机器人关节位置通过笛卡尔位置及臂角进行描述,从而将最小化 $T(q(t))$ 问题等价变换为最小化 $T_2(x(t), c(t))$ 问题,$x(t)$ 为各时刻机器人笛卡尔位置,$c(t)$ 为各时刻机器人臂型角。$L(t)$ 表示各时刻机器人功率传递效率,取 0 ~ 1,其值越接近于 1 说明功率传递性能越好。在机器人运动期间,机器人功率传递效率可通过 $L(t) = g(x(t), c(t))$ 来求得。通过约束 $L(t)$ 始终大于机器人功率传递阈值 $L_{\lim}$,即 $L_{\lim} < L(t)$,可以实现完整路径上高功率传递特性,减少能量无端损耗。

相较于传统关节运动规划器,基于几何成型法的高效轨迹规划器不仅保证了运动精度,还兼顾了机器人在不同位形时的有效功率传递特性。通过螺旋理论对冗余机器人进行建模,以运动/力传递指标定量描述机器人运动过程中的功率传递性能,并将其作为一个约束量纳入优化过程,确保优化路径中的机器人位形均为高效功率传递位形。

2 笛卡尔刚度椭球

2.1 刚度椭球描述法

由于笛卡尔全刚度矩阵与机构可控性之间存在复杂的关系,精确控制机器人末端执行器笛卡尔刚度过于复杂且不必要。在许多实际应用场景中,仅

需对机器人末端执行器运动方向(或垂直方向)上的刚度进行定性控制。在实际应用中,完全控制需要大量输入刚度矩阵不现实。为直观理解笛卡尔刚度表示,采用刚度椭球指标作为评判标准。

为了确保冗余机器人执行效率,提出了一种使用非线性优化方法构建机器人笛卡尔刚度椭球算法。该算法以任务中笛卡尔刚度性能最优为目标,通过优化关节刚度进行实现。在大部分任务中,仅需要定性描述沿着某一轴刚度。例如,在物料搬运任务中,机器人任务性能通常仅取决于对目标物搬运力,可以通过提高垂直方向接触力和减少水平方向接触力的方式,既保证了机器人工作性能,又降低了机器人运行功率,提高了意外碰撞时的安全性。对于该类工作任务,需要将接触力矢量与任务执行所必需的轴对齐。由于需要设置参数数量为 21,因此在多数情况下,使用笛卡尔全刚度矩阵来计算工作路径并不适用。

在三维空间中,刚度矩阵中不同刚度项的相互独立性可几何地表示为刚度椭球体,提供了一种直观的表示方式。另外,刚度椭球体体积不会因关节中的参数变化而发生明显变化[22]。以单个关节力所产生的扰动作为研究对象,令 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\tau}=1$,由于

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{2}$$

式中　$\boldsymbol{J}$——机器人雅可比矩阵

根据式(2)可以求得

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=1 \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}$ 为力椭球体,$\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$ 为一个对称的半正定矩阵。

设力与线位移之间的关系 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{K}_{fd}\boldsymbol{D}$,令 $\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}=1$,可得

$$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{fd}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{fd}\boldsymbol{D}=1 \tag{4}$$

式中　$\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{fd}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{fd}\boldsymbol{D}$——三维空间内的力椭球面

$\boldsymbol{K}_{fd}$——力-线位移刚度矩阵

椭球主轴方向为 $\boldsymbol{K}_{fd}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}_{fd}$特征向量方向,彼此正交,椭球半轴长度等于其特征值开方[23]。

任务执行速度和质量取决于机器人以及末端执行器在不同任务中平行于工作表面与垂直于工作表面方向上能够产生的刚度。因此,可以利用运动冗余来扩大并引导刚度椭球主轴与工作需求方向平行,以此达到刚度最大。相较于使用笛卡尔全刚度矩阵,该方法计算效率更高。对于需要精确轨迹跟踪而不考虑可能干扰的任务,需要确保在机器人运动学、约束和初始关节刚度设置方面正确执行任务。在该情况下,用户需要提供特定于任务的笛卡尔轨迹和椭球轴之间的比例因子。

2.2　笛卡尔刚度推导

机器人末端笛卡尔刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_C$ 可通过关节刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_J$ 表示为

$$\boldsymbol{K}_C=(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{K}_J^{-1}\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})^{\mathrm{T}})^{-1}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_J=\begin{bmatrix} k_{j1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{j2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{ji} \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中　k_{ji}——第 i 个关节刚度

$\boldsymbol{q}$——关节位置向量

利用特征分解,可将笛卡尔刚度矩阵分解为

$$\boldsymbol{K}_C=\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{U}^{-1} \tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中　$\boldsymbol{U}$——特征向量矩阵

$\boldsymbol{\Lambda}$——特征值矩阵,可从笛卡尔刚度方阵特征分解中提取

矩阵 $\boldsymbol{U}=[\boldsymbol{U}_1,\boldsymbol{U}_2,\cdots,\boldsymbol{U}_n]$,由特征向量 $\boldsymbol{U}=[u_{i1},u_{i2},\cdots,u_{in}]$组成,$i=1,2,\cdots,n$。矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是一个由特征值组成的对角矩阵。

笛卡尔刚度矩阵可以表示为椭球体,其中矩阵 $\boldsymbol{U}$ 的列表示椭球轴单位向量,而矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角元素表示轴大小。刚度椭球方向由主椭球轴确定。经特征分解后,椭球参数可计算为

$$\lambda_{\max}=\max_{i\in[1,u]}(\lambda_i) \tag{8}$$

$$\lambda_{\min}=\min_{i\in[1,u]}(\lambda_i) \tag{9}$$

式中　$\lambda_{\max}$——大刚度椭球轴幅值

$\lambda_{\min}$——小刚度椭球轴幅值

刚度椭球方向向量用 $\boldsymbol{U}_{\max}$表示,是矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 中的一个特征向量,对应于主刚度椭球轴方向最大特征值。利用刚度椭球几何表示,用户可更直观地监控和控制机器人所需的笛卡尔刚度特性。

2.3　顺序最小二乘规划

对于具有关节柔度的机器人,可通过重构运动冗余机器人零空间或调整机器人关节刚度实现笛卡尔刚度优化。采用基于顺序最小二乘规划(SLSQP)方法[24]的非线性优化算法来求解指定关节刚度特性下的最优机器人构型任务。

SLSQP 方法在四自由度机器人规划中已被成功应用,证明了其在解决非线性问题中的有效性。将 SLSQP 方法应用于刚度椭球方向优化,问题陈述表述为

$$\begin{cases}\min f(\boldsymbol{q}) & (\boldsymbol{q}\in\mathbf{R}^n)\\ \text{s.t.}\begin{cases}h(\boldsymbol{q})=0\\ g(\boldsymbol{q})\leqslant 0\end{cases}\end{cases} \tag{10}$$

判据函数 f 使期望的笛卡尔刚度椭球长轴方向与当前笛卡尔刚度椭球方向之差最小,同时使刚度椭球长短轴比尽可能大于期望比值。判据函数 f 定义为[25]

$$f=\frac{\frac{\pi}{2}+|\arccos(\boldsymbol{U}_{\text{cmax}}\boldsymbol{U}_{\text{dmax}})|}{\beta} \tag{11}$$

其中

$$\beta=\min\left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},\alpha\right) \tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{U}_{\text{cmax}}$——当前刚度椭球长轴方向矢量

$\boldsymbol{U}_{\text{dmax}}$——期望刚度椭球长轴方向矢量

α——椭球轴刚度所需要达到的最大比值

当机器人刚度椭球长轴方向与期望方向重合时,判据函数 f 分子部分达到最小值 $\frac{\pi}{2}$。超过 α 的刚度椭球轴比对机器人性能并无大益处。当机器人达到期望刚度方向且刚度椭球轴比值达到期望比值 α 时,判据函数 f 取得最优值 $\frac{\pi}{2}\alpha$。通过将比例因子 β 直接纳入准则函数 f,优化结果将同时考虑刚度、椭球方向和椭球轴比的影响,从而可找到整体上机器人刚度最优位形。

等式约束 $h(\boldsymbol{q})$ 表示当前执行器位置与期望位置之间的差值。为保证轨迹跟踪精度,该值取 0,可表示为

$$h(\boldsymbol{q})=X(\boldsymbol{q})-X_d(\boldsymbol{q})=0 \tag{13}$$

式中 $X(\boldsymbol{q})$——机器人基于优化变量 $\boldsymbol{q}$ 的笛卡尔坐标和姿态

$X_d(\boldsymbol{q})$——基于笛卡尔坐标的机器人执行器期望位置和姿态

此外,为确保优化搜索不超出由机器人几何参数决定的可用关节运动范围,必须设置适当的下界和上界。不等式约束 $g(\boldsymbol{q})$ 表示任意路径点上的功率传递效率。以机器人运动学为基础,代入各关节位置,基于螺旋理论推导当前位姿下的运动/力传递性能,其必须满足大于预定值 $LTI_{\min}$,可表示为

$$LTI_{\min}-g(\boldsymbol{q})<0 \tag{14}$$

式中,过高的阈值易使可行空间不连续,导致路径阶跃。因此,设置合理的功率传递下界有助于规划器完成 1 条高效且平滑的路径。

针对七自由度 SRS 型机器人,基于冗余机器人臂角描述法,首先提取等式约束和不等式约束,即在约束笛卡尔坐标确定条件下,以有效功率传递性能特性作为约束条件,从 7 阶非线性方程中,求得一维线性机器人臂角可行域 c_{Range}。上述操作可将高维优化问题转换为在机器人臂角可行域的一维空间内求取最优刚度椭球机器人臂角 c 的线性优化问题,降低了算法计算复杂度,提升了规划器性能。依次将期望路径上的每个路径点输入至规划器中,并进行满足约束条件的关节路径计算,即可求得在关节空间内刚度最优可行路径,其可作为满足刚度椭球需求的迭代结果输出至机器人进行运动。

3 冗余机器人运动学

3.1 SRS 型冗余机器人臂角描述法

机器人逆运动学求解方法主要有解析法和数值法。相较于数值法,解析法计算量更小且精度更高,但对机器人构型要求较高,且针对于同一末端点可能会产生多组关节解。针对具有冗余自由度的冗余机器人逆运动求解,则会产生无数个关节组合和相应的机器人空间构型,构成了运动零空间,使得冗余机器人在越过运动学奇异点的同时,可对关节限位进行优化[26-27]。

为保证机器人运动灵活性并最大化工作空间,冗余机器人构型通常采用传统的“3 - 1 - 3”(即“SRS”)构型,其中 S 为拥有三向旋转全自由度的球副,R 为拥有单向旋转自由度的旋转副。在该机器人构型中,第 1 个 S 副可类比为肩关节,第 2 个 R 副为肘关节,第 3 个 S 副为腕关节。该机器人构型不仅能够实现绝大多数人手臂动作,还拥有较大工作空间。在锁定末端执行器位姿不动情况下,通过改变肘关节位置,可以改变机械臂姿态,为机器人优化提供了必要的零空间。为便于表述,简化后模型如图 2 所示,其中 S 为肩关节点,W 为腕关节点,E 为肘关节点。

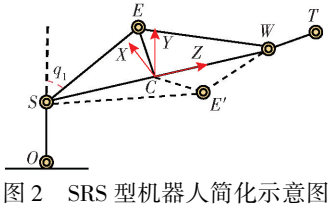

图 2 SRS 型机器人简化示意图

Fig. 2 Simplified three-dimensional diagram of robot with SRS type

由图 2 可知,当该机械臂臂平面 WES 绕着从肩关节 S 到腕关节 W 的连线 SW 旋转时,机械臂末端在笛卡尔空间中位姿不会变动。这种运动方式可保持机械臂末端位姿不变,称为自运动方式。在自运动过程中,机械臂姿态描述取决于臂型角。通过臂型角参数法,可以推导出当前末端空间坐标所对应的各关节角度,其中 EC 为肘关节 E 到肩关节 S 与

腕关节 W 的连线 SW 的垂线。$OXYZ$ 为建立在点 C 上的坐标系，Z 轴为肩关节 S 指向腕关节 W 方向，X 轴为水平延伸方向。肘关节 S 到不动点 C 的连线 SC 与 Y 轴正方向的夹角被定义为当前位形的臂型角 c，取值为[$-\pi$，π]。

3.2　Franka 冗余机器人正运动学

以 Franka Panda 冗余机器人(图 3)为研究对象。对 Franka 机器人进行建模并推导其运动学，为优化器提供实验平台与优化参数。

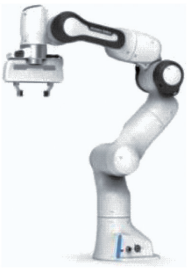

图 3　Franka Panda 冗余机器人三维图

Fig. 3　3D view of redundant robot Franka Panda

Franka 冗余机器人初始状态如图 4 所示，其中 $OX_0Y_0Z_0$ 表示固连在静平台上的定坐标系，$OX_1Y_1Z_1$ 到 $OX_7Y_7Z_7$ 表示固连在各关节处 7 个动坐标系，$OX_FY_FZ_F$ 表示固连在末端工具平台的工具坐标系。将机器人各连杆和关节抽象化后，可得简化模型如图 5 所示，机器人各连杆参数如表 1 所示。

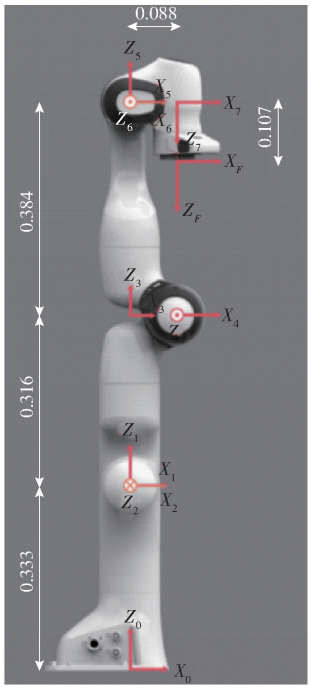

图 4　Franka Panda 实物尺寸图

Fig. 4　Physical dimension diagram of Franka Panda

Franka 冗余机器人由 7 个转动关节以“3 − 1 − 3”的形式串联而成，在末端不动情况下，拥有一维自由度(臂角)的冗余结构。可得到机器人末端在

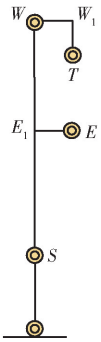

图 5　Franka Panda 简化模型图

Fig. 5　Simplified model diagram of Franka Panda

世界坐标系中的位置，表示为

表 1　Franka Panda 机器人结构尺寸

Tab. 1　Structural dimensions of Franka Panda

连杆	连杆长度/m
SO	0.333
E_1S	0.316
E_1E	0.088
WE_1	0.384
WW_1	0.088
W_1T	0.107

$$\boldsymbol{g}_{st}(0)=\begin{bmatrix} l_{WW_1} \\ 0 \\ l_{SO}+l_{E_1S}+l_{WE_1}-l_{W_1T} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.088 \\ 0 \\ 0.926 \end{bmatrix} \tag{15}$$

结合旋转矩阵，机器人末端齐次坐标矩阵可表示为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{g}_{st}(0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.088 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0.926 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{16}$$

在螺旋理论中，每个旋转关节运动都可通过一个运动螺旋表示。根据 Franka 机器人各连杆长度，在初始位置下各旋量可表示为

$$\begin{cases} \$_1=[0 \quad 0 \quad 1;0 \quad 0 \quad 0] \\ \$_2=[0 \quad 1 \quad 0;0 \quad 0.333 \quad 0] \\ \$_3=[0 \quad 0 \quad 1;0 \quad 0 \quad 0] \\ \$_4=[0 \quad -1 \quad 0;0.088 \quad 0 \quad 0.649] \\ \$_5=[0 \quad 0 \quad 1;0 \quad 0 \quad 0] \\ \$_6=[0 \quad -1 \quad 0;0 \quad 0 \quad 1.033] \\ \$_7=[0 \quad 0 \quad -1;0.088 \quad 0 \quad 0.926] \end{cases} \tag{17}$$

另外，每个关节旋转可以用指数 $\boldsymbol{T}_n^{n-1}=\mathrm{e}^{\zeta\theta_n}$ 进行描述。刚体连续做多次螺旋运动，并且经由 n 个关节串联而成的运动链从位形 S 运动到位形 T，则这一系列运动可以通过指数积公式表示为

$$\boldsymbol{g}_{st}(\theta)=\mathrm{e}^{\zeta\theta_1}\mathrm{e}^{\zeta\theta_2}\cdots\mathrm{e}^{\zeta\theta_n}\boldsymbol{g}_{st}(0) \tag{18}$$

式中 $\boldsymbol{g}_{st}(0)$——刚体初始位形

$\boldsymbol{g}_{st}(\theta)$——刚体最终位形

将式(18)应用于 7 自由度 Franka 冗余机器人，其正运动学可表示为

$$\boldsymbol{g}_{st}(\theta)=e^{\xi\theta_1}e^{\xi\theta_2}e^{\xi\theta_3}e^{\xi\theta_4}e^{\xi\theta_5}e^{\xi\theta_6}e^{\xi\theta_7}\boldsymbol{g}_{st}(0) \quad (19)$$

3.3 Franka 冗余机器人逆运动学——扩展臂型角法

与一般的 SRS 构型相比，Franka 机器人第 3、第 4 和第 7 关节具有特殊偏置[28]，使其与标准的 SRS 构型有所区别，Franka 机器人构型简化模型如图 6 所示。第 3 第 1 关节的偏置 E_1E 和 E_2E 在 SRS 模型中产生 2 个三角形拓展区域，导致上下臂部分分别产生一定量的外摆偏移，其中下臂外移同时影响了第 6 关节位姿 WW_1。

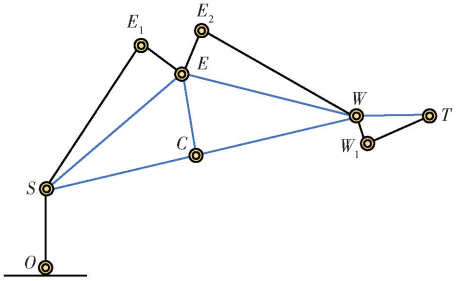

图 6 Franka 构型简化示意图

Fig. 6 Simplified three-dimensional diagram of Franka configuration

第 7 关节偏置 W_1W 令 SRS 模型中的固定腕关节 W 会随臂型角 c 的变化而改变位置，如图 7 中所示，肩关节 S 到腕关节 W 的连线 SW 长度与位置发生了改变。因此，在简化模型中原固定点 C 也随着 SW 连线位置的变化而成为变化点。简化模型中原固定角度也由于 SW 长度的变化而成为了变化角度。然而，同一种臂型角对应产生了 2 种不同的空间构型，如图 7 所示，违背了臂型角唯一描述的原则。为解决上述问题，本文提出扩展臂型角[-2π，2π]，由两部分组成：SW 长度较短的一侧(即更靠近肩关节 S 的一侧)，臂型角为 c；SW 长度较长的一侧(即更远离肩关节 S 的一侧)，臂型角为 $-c$。

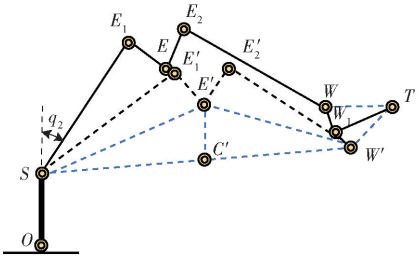

图 7 臂型角多解简化三维图

Fig. 7 Simplified three-dimensional diagram of arm angle multiple solutions

已知机械臂末端在笛卡尔空间中姿态情况下，其逆运动学的求解过程可分为 3 个步骤：①确定臂型角 c，并根据其正负性确定 W_1 位置。②使用余弦定理计算第 4 关节 q_4。③通过机械臂末端位置和臂角取值，计算确定机械臂其余各个关节角。

求解各个连杆坐标系原点。机械臂末端在基坐标系中位置为${}^0\boldsymbol{P}_T=[p_x\quad p_y\quad p_z]^{\mathrm{T}}$，腕关节点 W_1 在坐标系 7 中位置为${}^7\boldsymbol{P}_T=[0\quad 0\quad -|W_1T|]$，因此可通过运算得到腕关节 W_1 在基坐标系中的位置矩阵，计算式为

$$\begin{bmatrix}{}^0\boldsymbol{P}_W\\1\end{bmatrix}={}_7^0\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}{}^7\boldsymbol{P}_W\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_x-|l_{W_1T}|r_{13}\\p_y-|l_{W_1T}|r_{23}\\p_z-|l_{W_1T}|r_{33}\\1\end{bmatrix} \quad (20)$$

基于确定的臂型角 c，可计算得 l_{CE}及点 E 在基坐标系中的坐标，计算式为

$$l_{CE}=\mathrm{Rot}z\left(\arctan\frac{W_{1x}}{W_{1y}}\right)\cdot \mathrm{Rot}x\left(-\arctan\frac{\sqrt{W_{1x}^2+W_{1y}^2}}{W_{1y}-S_3}\right)\begin{bmatrix}\sin c\\-\cos c\\0\end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathrm{Rot}z\left(\arctan\frac{W_{1x}}{W_{1y}}\right)=\begin{bmatrix}\cos\left(\arctan\frac{W_{1x}}{W_{1y}}\right) & -\sin\left(\arctan\frac{W_{1x}}{W_{1y}}\right) & 0\\ \sin\left(\arctan\frac{W_{1x}}{W_{1y}}\right) & \cos\left(\arctan\frac{W_{1x}}{W_{1y}}\right) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\mathrm{Rot}x\left(-\arctan\frac{\sqrt{W_{1x}^2+W_{1y}^2}}{W_{1y}-S_3}\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\left(-\arctan\frac{\sqrt{W_{1x}^2+W_{1y}^2}}{W_{1y}-S_3}\right) & -\sin\left(-\arctan\frac{\sqrt{W_{1x}^2+W_{1y}^2}}{W_{1y}-S_3}\right)\\ 0 & \sin\left(-\arctan\frac{\sqrt{W_{1x}^2+W_{1y}^2}}{W_{1y}-S_3}\right) & \cos\left(-\arctan\frac{\sqrt{W_{1x}^2+W_{1y}^2}}{W_{1y}-S_3}\right)\end{bmatrix} \quad (23)$$

$$E=C+l_{CE}*|CE| \quad (24)$$

式中 Rot$z$ 和 Rot$x$ 表示绕 z 轴和绕 x 轴旋转。

在确定 W_1 和 E 位置后，可得 W_1E 在坐标系 7 中的投影。腕关节 W 位置可由第 7 关节偏置 $|WW_1|$ 和 $W=W_1+l_{W_1E_{07}}*a_7$ 求出，为

$$W=W_1+l_{W_1E_{07}}*|WW_1| \quad (25)$$

根据第 4、第 5 关节长度 $|l_{SE_1}|$、$|l_{E_2W}|$ 和偏置 $|l_{EE_1}|$、$|l_{EE_2}|$，可得 $|l_{SE}|$ 和 $|l_{WE}|$。根据上述结果得

$$q_4=-\pi+\arccos\frac{|l_{SE}|^2+|l_{WE}|^2-|l_{SW}|^2}{2*|l_{SE}|*|l_{WE}|}-\arctan\frac{|l_{EE_1}|}{|l_{SE_1}|}\arctan\frac{|l_{EE_2}|}{|l_{E_2W}|} \quad (26)$$

对机器人其余各关节角进行求解。q_1 为肘关节 E_1 在基坐标系中沿 Z 轴投影至 XOY 平面中点到原点的连线与基坐标系 Y 轴正方向夹角，可表示为

$$q_1 = \arctan \frac{E_{1y}}{E_{1x}} \tag{27}$$

l_{OS}和 l_{SE}之间夹角 q_2 计算式为

$$q_2 = \pm \arccos \frac{l_{OS} * l_{SE_1}}{\| \boldsymbol{l}_{OS} * \boldsymbol{l}_{SE_1} \|} \tag{28}$$

l_{E_2W}在关节 2 坐标系中沿 Z 轴向 $X_2O_2Y_2$ 平面的投影与 X_2 轴的夹角 q_3 计算式为

$$q_3 = \arctan \frac{{}^2l_{E_2W_y}}{{}^2l_{E_2W_x}} \tag{29}$$

其中

$${}^2l_{E_2W} = {}^0_2\boldsymbol{T}^{-1} * l_{E_2W} \tag{30}$$

$${}^0_2\boldsymbol{T} = {}^0_1\boldsymbol{T}^1_2\boldsymbol{T} = \mathrm{e}^{\zeta q_1}\mathrm{e}^{\zeta q_2}\boldsymbol{g}_{st}(0) \tag{31}$$

$l_{W_1E_2}$在关节 4 坐标系中沿 Z 轴向 $X_4O_4Y_4$ 平面的投影与 X_4 轴的夹角 q_5 计算式为

$$q_5 = \arctan \frac{{}^4l_{W_1E_{1y}}}{{}^4l_{W_1E_{1x}}} \tag{32}$$

其中

$${}^4l_{l_{W_1E_1}} = {}^0_4\boldsymbol{T}^{-1} * l_{W_1E_2} \tag{33}$$

$${}^0_4\boldsymbol{T} = {}^0_1\boldsymbol{T}^1_2\boldsymbol{T}^2_3\boldsymbol{T}^3_4\boldsymbol{T} \tag{34}$$

l_{E_2W}与 l_{W_1T}之间的夹角 q_6 可表示为

$$q_6 = \arctan \frac{{}^2l_{E_2W}}{{}^2l_{W_1T}} \tag{35}$$

q_7 由最后一个关节的旋转矩阵${}^0_6\boldsymbol{R}$ 求出，可通过下述推导得到

$$q_7 = \arctan \frac{{}^6_7\boldsymbol{R}_{(2,1)}}{{}^6_7\boldsymbol{R}_{(2,2)}} \tag{36}$$

其中

$${}^6_7\boldsymbol{R} = ({}^0_6\boldsymbol{R})^{-1}{}^0_7\boldsymbol{R} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}{}^0_6\boldsymbol{R} = {} & \mathrm{Rot}(z,q_1) * \mathrm{Rot}(y,q_2) * \mathrm{Rot}(z,q_3) * \\ & \mathrm{Rot}(y,q_4) * \mathrm{Rot}(z,q_5) * \mathrm{Rot}(y,q_6)\end{aligned} \tag{38}$$

基于上述几何推导以及反三角函数特性，可知 q_5 和 q_6 会有正负 2 个不同的值。鉴于 SRS 型本身的特点，q_3、q_5、q_7 3 个关节分别有相差 π 的两种角度。因此，一个末端笛卡尔坐标以及一个臂角坐标组成的 7 维向量，可以获得总计 32 组不同的解。然而，在实际运动过程中，并不是每组解都是可行解。通过考虑上一时刻机器人关节位姿及电机速度限制，可以优选得最优解。

针对 Franka 机器人的特异化偏置，提出的拓展臂角描述法通过将臂角扩展至 4 个象限，可以唯一描述机器人具体状态，为实验设计与规划器计算奠定了理论基础。相较于传统数值迭代法，该方法提升了计算效率，并降低了计算误差。

4　冗余机器人运动/力传递指标求解

基于刚度优先规划的运动路径不可避免会使得机器人在特定位形下的功率传递性能下降，同时易导致单个关节电机输出功率过大，造成电机损伤。为了保证机器人长时间可持续化运行，并且减少能量损耗，使用运动/力传递指标对之前的轨迹规划方法进行约束，使得笛卡尔刚度求解器可求得高传递效率下最优刚度路径。

4.1　运动/力传递性能指标

运动/力传递性能是衡量机构性能的重要评价指标，使用局部传递指标 LTI 来衡量机构运动性能[19-20]，其可分为输入传递性能和输出传递性能两部分，分别表示能量从驱动输入端传递到分支和从分支传递到输出端的传递效率，表达形式为

$$\begin{cases}\lambda_i = \dfrac{|\$_{Ai} \circ \$_{Ti}|}{|\$_{Ai} \circ \$_{Ti}|_{\max}} \\ \eta_i = \dfrac{|\$_{Oi} \circ \$_{Ti}|}{|\$_{Oi} \circ \$_{Ti}|_{\max}}\end{cases} \tag{39}$$

式中　λ_i——输入传递指标

η_i——输出传递指标

$\$_{Ai}$——输入运动螺旋

$\$_{Oi}$——输出运动螺旋

$\$_{Ti}$——传递力螺旋

由式(39)可知，其范围均为 0 ~ 1，且越接近于 1，机构的运动/力传递性能越优异。考虑两者的区别，将 LTI 定义为 $\Gamma = \min\{\lambda_i, \eta_i\}$。$\Gamma$ 值越接近 1，表示能量从输入到输出的传递效率越高。

4.2　SRS 冗余机器人运动/力传递性能指标

SRS 构型机器人各关节运动螺旋计算式为

$$\begin{cases}\$_1 = (\boldsymbol{S}_1; \boldsymbol{S}_1^0 \times \boldsymbol{S}_1) \\ \$_2 = (\boldsymbol{S}_2; \boldsymbol{S}_2^0 \times \boldsymbol{S}_2) \\ \$_3 = (\boldsymbol{S}_3; \boldsymbol{S}_3^0 \times \boldsymbol{S}_3) \\ \$_4 = (\boldsymbol{S}_4; \boldsymbol{S}_4^0 \times \boldsymbol{S}_4) \\ \$_5 = (\boldsymbol{S}_5; \boldsymbol{S}_5^0 \times \boldsymbol{S}_5) \\ \$_6 = (\boldsymbol{S}_6; \boldsymbol{S}_6^0 \times \boldsymbol{S}_6) \\ \$_7 = (\boldsymbol{S}_7; \boldsymbol{S}_7^0 \times \boldsymbol{S}_7)\end{cases} \tag{40}$$

式中　$\$_i$——机构中第 i 个运动副所对应的运动螺旋

基于 SRS 机器人的运动学逆解模型与简化模型，可推导各个关节输入运动螺旋。第 1 关节固连与世界坐标系上，坐标为世界坐标系原点。第 2 关节在世界坐标系下坐标为 $\boldsymbol{S}_2^0 = [0 \quad 0 \quad |\boldsymbol{l}_{SO}|]$，旋量方向为第 1 关节旋转角度 $\boldsymbol{S}_2 = [-\sin q_1 \quad \cos q_2 \quad 0]$。第 3 关节延长线穿越点 S，$\boldsymbol{S}_3^0 = [0 \quad 0 \quad |\boldsymbol{l}_{SO}|]$，且旋量方向 $\boldsymbol{S}_3 = l_{SE}$。第 4 关节位置为 E，$\boldsymbol{S}_4^0 = E$，旋量方向为关节坐标系${}^0_4\boldsymbol{T}$ X 轴正方向，$\boldsymbol{S}_4 = {}^0_4\boldsymbol{T}_X$。第 5 关节位置为 E，$\boldsymbol{S}_5^0 = E$，旋量方向 $\boldsymbol{S}_5 = l_{EW}$。第 6 关节

位置为 W,$\boldsymbol{S}_6^0 = W$,旋量方向为关节坐标系${}_6^0\boldsymbol{T}$ X 轴正方向,$\boldsymbol{S}_6 = {}_6^0\boldsymbol{T}_X$。第 7 关节经过点 W,$\boldsymbol{S}_7^0 = W$,旋量方向为 $\boldsymbol{S}_7 = l_{WT}$。

传递力螺旋可理解为能量从输入到输出的中间传递媒介。对于 SRS 冗余机器人,其拥有的零空间导致传递力螺旋不唯一,与多个关节变量有关。以关节 1 为例,其运动螺旋系为 $\boldsymbol{M} = [\$_1, \$_2, \$_3, \$_4, \$_5, \$_6, \$_7]$,若只锁住关节 1,则剩余运动螺旋系 $\boldsymbol{M}_1 = [\$_2, \$_3, \$_4, \$_5, \$_6, \$_7]$,不满足传递力螺旋计算要求,即传递力螺旋 $\$_1^t$ 与输入运动螺旋系中的螺旋互易积为零,即 $\$_1^t \circ \$_i = 0 (i = 2,3,4,5,6,7)$。其剩余螺旋系维度为 6,互易积为 0 无解。

联合考虑两个相邻关节,将其视为对应联合运动关节,建立剩余运动螺旋系,计算对应传递力螺旋。以锁住关节 1 和关节 2 为例,机构剩余运动螺旋系为 $\boldsymbol{M}_{12} = [\$_3, \$_4, \$_5, \$_6, \$_7]$,通过计算 $\$_{12}^t \circ \$_i = 0 (i = 2,3,4,5,6,7)$,可得到 $\$_{12}^t$ 表达式。同理,依次联合锁住关节 2 至关节 7,同理可得 $\$_{23}^t$、$\$_{34}^t$、$\$_{45}^t$、$\$_{56}^t$、$\$_{67}^t$ 表达式,综上即可建立传递力螺旋系 $\boldsymbol{M}^t = [\$_{12}^t, \$_{23}^t, \$_{34}^t, \$_{45}^t, \$_{56}^t, \$_{67}^t]$。传递力螺旋与对应主动关节的运动螺旋的互易积则是关节有效输出功率,其中将最小有效输出功率作为机构输入传递性能。

锁定除第 1 联合关节之外的所有关节后,机构中传递螺旋系变成了约束螺旋系,$\boldsymbol{M}_{12}^r = [\$_{23}^r, \$_{34}^r, \$_{45}^r, \$_{56}^r, \$_{67}^r]$,维度为 5,此时机构为单自由度机构,动平台瞬时运动可通过输出运动螺旋表示

$$\$_{O12} \circ \boldsymbol{M}_{12}^r = 0 \tag{41}$$

由式(41)可计算出 $\$_{O12}$。同理,可得 $\$_{O23}$、$\$_{O34}$、$\$_{O45}$、$\$_{O56}$、$\$_{O67}$,据此建立输出运动螺旋系 $\boldsymbol{M}^o = [\$_{O12}, \$_{O23}, \$_{O34}, \$_{O45}, \$_{O56}, \$_{O67}]$。将对应输出运动螺旋与传递力螺旋做互易积,即可求得对应关节有效输出功率。将 6 组有效输入功率与 6 组有效输出功率联立,其最小值即为在此位形下局部传递性能指标 LTI。

4.3 Franka 冗余机器人运动/力传递性能指标

Franka 机器人简化模型(图 5)相较于一般 SRS 模型,其第 3 螺旋和第 5 螺旋由于机器人第 4 关节和第 6 关节的偏置量,与原本的螺旋计算有所不同。第 3 螺旋延长线依然穿越点 S,$\boldsymbol{S}_{f3}^0 = [0 \quad 0 \quad 0.333]$,但原本指向于 E 的旋量方向变为指向于 E_1,因此旋量方向 $\boldsymbol{S}_3 = l_{SE_{f1}}$。第 5 螺旋位置由 E 变为 E_2,$\boldsymbol{S}_{f5}^0 = 0$,旋量方向 $\boldsymbol{S}_{f5} = l_{E_2W}$。其他不受影响的各个关节,可按照原方法求得 Franka 机器人剩余关节对应的 $\boldsymbol{S}_{f1}^0$、$\boldsymbol{S}_{f2}^0$、$\boldsymbol{S}_{f4}^0$、$\boldsymbol{S}_{f6}^0$、$\boldsymbol{S}_{f7}^0$ 以及 $\boldsymbol{S}_{f1}$、$\boldsymbol{S}_{f2}$、$\boldsymbol{S}_{f4}$、$\boldsymbol{S}_{f6}$、$\boldsymbol{S}_{f7}$。Franka 机器人输入运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{f1} = (\boldsymbol{S}_{f1}; \boldsymbol{S}_{f1}^0 \times \boldsymbol{S}_{f1}) \\ \$_{f2} = (\boldsymbol{S}_{f2}; \boldsymbol{S}_{f2}^0 \times \boldsymbol{S}_{f2}) \\ \$_{f3} = (\boldsymbol{S}_{f3}; \boldsymbol{S}_{f3}^0 \times \boldsymbol{S}_{f3}) \\ \$_{f4} = (\boldsymbol{S}_{f4}; \boldsymbol{S}_{f4}^0 \times \boldsymbol{S}_{f4}) \\ \$_{f5} = (\boldsymbol{S}_{f5}; \boldsymbol{S}_{f5}^0 \times \boldsymbol{S}_{f5}) \\ \$_{f6} = (\boldsymbol{S}_{f6}; \boldsymbol{S}_{f6}^0 \times \boldsymbol{S}_{f6}) \\ \$_{f7} = (\boldsymbol{S}_{f7}; \boldsymbol{S}_{f7}^0 \times \boldsymbol{S}_{f7}) \end{cases} \tag{42}$$

在求得 Franka 机器人输入螺旋系后,后续求解传递力螺旋系以及计算有效输入和输出功率过程和 SRS 冗余机器人一致,将不再重复说明。

5 仿真实验

采用 7 自由度 Franka Panda 机器人[29]作为实验对象,基于 Matlab 的 Simulink 模块进行运动轨迹仿真验证。针对提出的拓展臂角描述法,通过给定随机路径方式进行正确性验证。对于使用拓展臂角描述法的高效轨迹规划器轨迹跟随精度进行仿真验证,证明其保障机器人笛卡尔轨迹不受影响的特性。

5.1 基于扩展臂角描述法的冗余机器人逆解验证

针对 Franka Panda 机器人运动学逆解问题,提出了一种扩展臂角描述法。该方法通过确定一个虚拟自由度臂角来实现求解目标路径上各点的解析解,即从期望的笛卡尔位姿逆向计算出各个关节位置和姿态。通过这种方式,可以将目标路径转为机器人关节空间中的路径。

为了验证该逆解方法有效性,进行了螺旋线轨迹仿真验证实验,验证逆解后机器人笛卡尔位姿与期望笛卡尔位姿的一致性。首先,使用拓展臂角描述法方法对机器人目标轨迹进行逆解,得到了对应的关节位置和姿态。在仿真环境中将机器人按照逆解后关节位置进行运动,同时记录机器人在每个时间节点下笛卡尔位姿信息。

机器人仿真运动时笛卡尔轨迹及期望笛卡尔轨迹对比结果如图 8 所示。另外,机器人仿真运动时笛卡尔轨迹误差结果如图 9 所示,通过比较逆解后笛卡尔位姿和期望笛卡尔位姿间误差可以发现,绝大部分路径上的机器人笛卡尔位置误差控制在 1.2×10^{-8} mm 以内,验证了该逆解方法的有效性。

5.2 基于几何成型法的高效轨迹规划器轨迹不变性验证

提出基于几何成型法的高效轨迹规划器在优化时基于笛卡尔轨迹不变原则,本章节通过高效轨迹

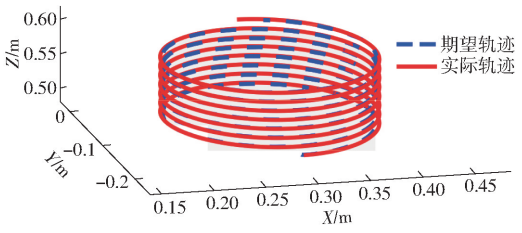

图 8　机器人笛卡尔轨迹

Fig. 8　Robot Cartesian trajectory

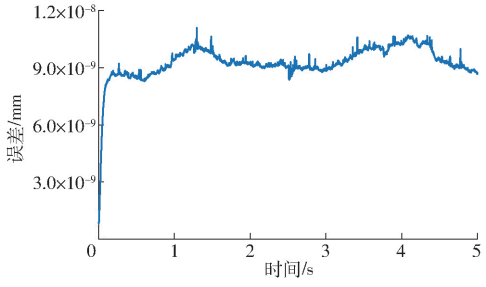

图 9　机器人笛卡尔轨迹实验误差

Fig. 9　Error diagram of the robot Cartesian trajectory experiment

规划器和笛卡尔数值轨迹规划器间的机器人笛卡尔轨迹对比分析证明其轨迹不变性。

图 10、11 为机器人在关节规划器和高效规划器下笛卡尔轨迹。2 条轨迹与期望轨迹间误差如图 12 所示，均在 5×10^{-7} mm 以内，可得，由高效轨迹规划器指引运动时的机器人末端轨迹与常规轨迹一致，可完成机器人笛卡尔期望轨迹。

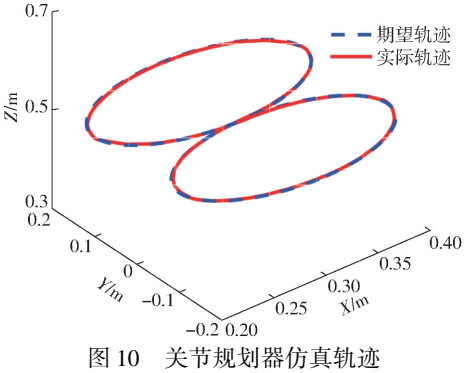

图 10　关节规划器仿真轨迹

Fig. 10　Simulation trajectory diagram of joint planner

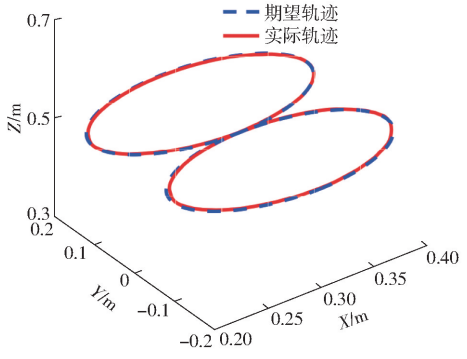

图 11　GCSS 规划器仿真轨迹

Fig. 11　GCSS planner simulation trajectory

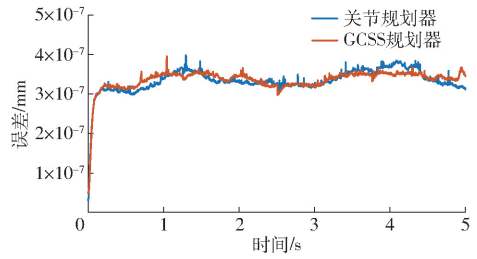

图 12　关节规划器与 GCSS 规划器仿真误差对比

Fig. 12　Comparison of simulation errors between joint planner and GCSS planner

6　实机实验

6.1　基于 LTI 指标路线与常规路线的性能对比

为了提高机器人功率传递性能，降低功率损耗，机器人位姿需要根据 LTI 进行设计。设计了针对冗余机器人 LTI 轨迹优化方法，在保持末端位置情况下，通过调整机械臂臂角配置，实现最优功率规划。

对比两者对各关节力矩的影响情况，各关节力矩如图 13 所示。可以发现，机器人第 2、第 3 关节主要为机器人末端笛卡尔移动提供动力，输出力矩较大；第 5 至第 7 关节主要为末端位姿角提供动力，输出力矩较小，另外基于 LTI 规划器所得轨迹的关节功率消耗更低。图 13h 为不同规划器下机器人各关节力矩对比曲线，展示了在末端笛卡尔轨迹一致的情况下，基于 LTI 规划器机器人总功率消耗相较于关节规划器有明显降低。因此，基于 LTI 规划器引导的轨迹在功率损耗上更少。

6.2　路径中刚度可控实验

针对快递分拣以及物料分拣场景，基于几何成型法的高效轨迹规划器设计了重物搬运实验，并与传统轨迹规划器进行实物实验对比。目标是将质量为 2 kg 的目标物从起始点搬运至目标点，并且在机器人运动过程中施加一定的外力以模拟工作时意外接触及碰撞现象。

在给定物体的搬运路线后，重物搬运实验通过指定机器人在搬运阶段的高刚度方向沿重力方向，如图 14 所示，便可实现机器人高效率搬运重物，并且在其余两轴（易和他人及外物产生接触的方向）保持低刚度，降低意外接触造成的伤害。按机器人运动目的不同，整段轨迹可划分为两部分：第 1 段为搬运工作准备轨迹，在机器人夹具移动至目标物的过程中，通过调整机器人臂角将笛卡尔刚度椭球方向调整到工作所需方向，并完成夹持重物的动作。第 2 段为搬运工作负载轨迹，机器人将通过夹具对目标物施加一定的夹持力，并且机器人将沿刚度椭球长轴方向为目标物提供升力。

在重物搬运实验中，末端夹持机构仅在 X 向和

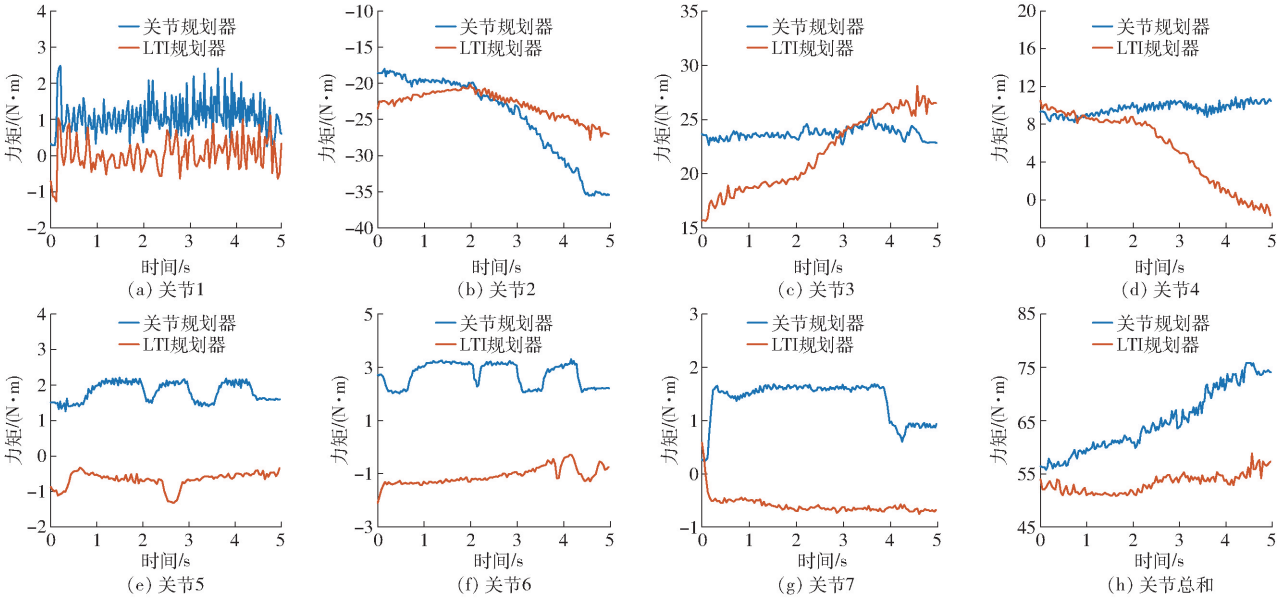

图 13 各关节力矩及总力矩曲线

Fig. 13 Output diagrams of joint torque and total torque

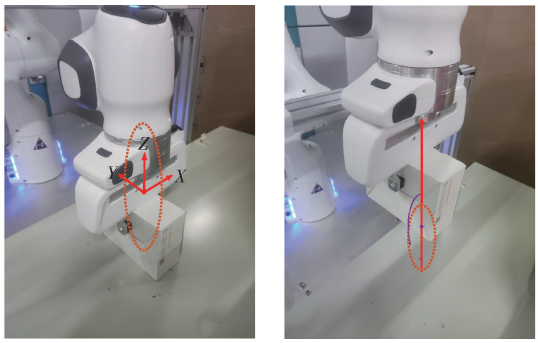

图 14 重物搬运实验

Fig. 14 Heavy object handling experiment

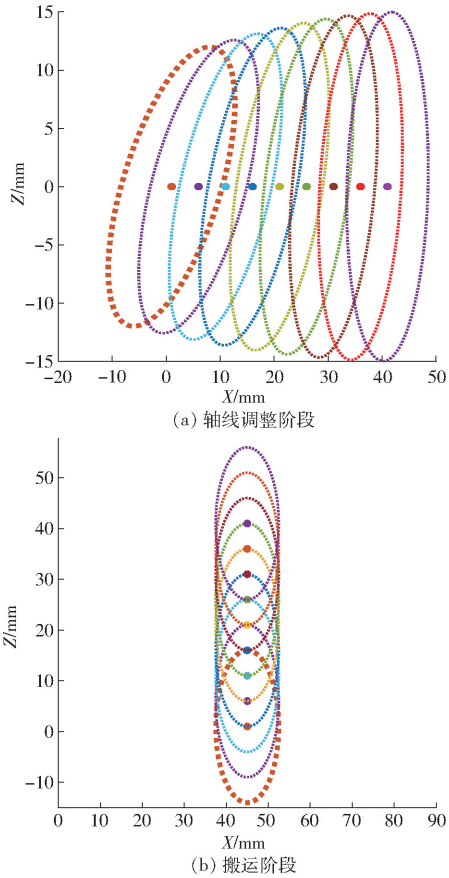

图 15 刚度椭球变化示意图

Fig. 15 Schematics of stiffness ellipsoidal variation

Z 向运动,故可将笛卡尔刚度矩阵简化为平面刚度椭圆,如图 15 所示。在第 1 段路径(图 15a),通过 GCSS 算法控制机器人从安全点运动到夹持位置的运动过程中,将刚度椭圆的长轴从原始位置转移到垂直于水平面的位置,以提升机器人末端的夹持力。在第 2 段路径(图 15b),机器人在提升重物的过程中,GCSS 算法始终将刚度椭球长轴保持在末端负载最大方向,以便机器人更快地获得升力且整体功耗和发热较小。所提方法可在完成对应重物搬运的基础上,保证机器人关节力与力矩损失最小。

实验组采用基于几何成型法的高效轨迹规划器,设置 LTI 最小阈值为 0.5,起始臂角参数为 0 rad,对照组采用传统阻抗算法的关节刚度规划器,方向刚度设置为 2 000,姿态刚度设置为 50。为实验过程中 2 组机器人功率如图 16 所示,实验组最高功率比对照组最高功率低 14.77%,平均功率低 19%,且在夹取及放置阶段的功率变化更加平稳,变化率更低,电流冲击更小。在完成相同任务基础上,由实验数据可得基于几何成型法的高效轨迹规划器引导下的机器人所需功率更低,运动过程中的能量损耗更低。

机器人正常工作时,笛卡尔刚度椭球不同方向的轴长不同,可以使机器人末端对外力干涉产生不同的响应。在无外力干涉时,机器人末端将尽量跟

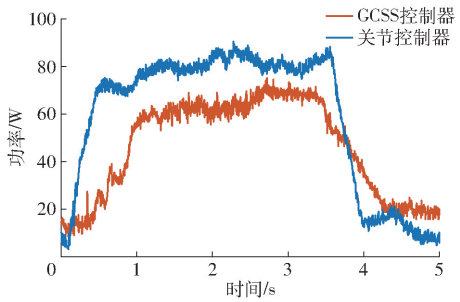

图 16　功率示意图

Fig. 16　Power schematic

随预期轨迹进行工作，如图 17 所示。由图 17 可以看出，正常情况下机器人整体运动是跟随于期望轨迹方向。机器人在受外力干涉时，其中机器人末端在刚度椭球长轴方向（Z 轴）上的高刚度可以为搬运工作提供稳定升力，以保障重力方向上的轨迹跟随效果，确保搬运任务不受干扰。而刚度椭球短轴方向（X 轴和 Y 轴）上的低刚度可以干涉机器人与外物接触时的一定柔顺性，实现机器人运动时被动跟随，减少意外碰撞时的安全风险，防止人员与机器人过度损伤。

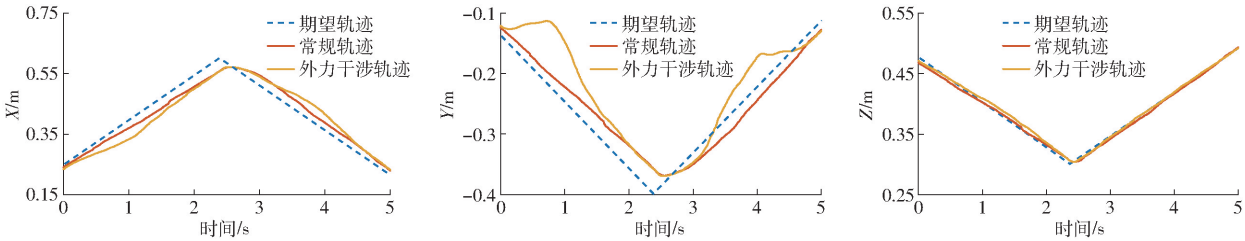

图 17　笛卡尔空间轨迹

Fig. 17　Cartesian space trajectory

通过该重物搬运实验，验证了 GCSS 算法的有效性，其可实现笛卡尔刚度椭圆长轴沿期望方向进行调整。基于该算法，机器人在重力方向上的笛卡尔刚度更高且满足 LTI 性能结果需求，因此可更快地获得目标物搬运所需的夹持力和升力，最终在保证控制电机输出功率稳定的基础上，实现机器人对重物的稳定搬运。

7　结论

（1）基于 GCSS，提出了一种可适用于冗余串联机器人的高效轨迹规划器。该规划器通过三维刚度椭球对机器人笛卡尔刚度进行图形化设置，并可基于 LTI 的 SLSQP 优化器，快速生成一条传递性能好的冗余机器人运动轨迹。

（2）提出了一种可适用于带偏置 SRS 型冗余机器人的拓展臂角描述法，扩展了臂角描述法的应用范围。该描述法可以通过代入臂角参数公式计算，快速计算生成冗余机器人逆运动学解，避免了数值法求解时的大量迭代过程。

（3）重物搬运实验结果表明，基于几何成型法的高效轨迹规划器对于冗余机器人工作特性的优化效果。在保证轨迹不受影响的基础上，相比于传统笛卡尔规划器，具有功率损耗更低、鲁棒性更强、计算效率更高等优点，同时可保障工作人员与自身安全。

参　考　文　献

[1] 蔡自兴. 机器人学基础[M]. 北京：机械工业出版社，2015：15－17.

[2] ABU-DAKKA F J, SAVERIANO M. Variable impedance control and learning—a review[J]. Frontiers in Robotics and AI, 2020(7): 590681.

[3] HOGAN N. Impedance control: an approach to manipulation: part Ⅱ—implementation[C]// 1984 American Control Conference, 1984:304－313.

[4] FICUCIELLO F, ROMANO A, VILLANI L, et al. Cartesian impedance control of redundant manipulators for human-robot co-manipulation[C]//2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. IEEE, 2014: 2120－2125.

[5] LUKIĆ B, JOVANOVIĆ K, KNEŽEVIĆ N, et al. Maximizing the end-effector Cartesian stiffness range for kinematic redundant robot with compliance[C]// International Conference on Robotics in Alpe-Adria Danube Region. Cham: Springer International Publishing, 2020: 208－217.

[6] 廖峻北，伊烁闻，雷飞，等. 连续变刚度仿生驱动关节的设计与建模分析[J]. 兵工学报，2023，44(11)：3269－3278.
LIAO Junbei, YI Shuowen, LEI Fei, et al. Design and modeling analysis of bionic drive joint with continuous variable stiffness[J]. Acta Ordnance Engineering, 2023, 44(11): 3269－3278. (in Chinese)

[7] 姚玉峰，赵建文，孙立宁. 一种直接面向位移寻优的冗余度机器人运动规划算法[J]. 西安交通大学学报，2009，43(11)：75－79.
YAO Yufeng, ZHAO Jianwen, SUN Lining. A motion planning algorithm for redundant robot with direct displacement optimization[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2009, 43(11): 75－79. (in Chinese)

[8] 熊俊涛，李中行，陈淑绵，等. 基于深度强化学习的虚拟机器人采摘路径避障规划[J]. 农业机械学报，2020，51(增刊 2)：

1 – 10.
XIONG Juntao, LI Zhonghang, CHEN Shumian, et al. Obstacle avoidance planning of virtual robot picking path based on deep reinforcement learning[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020, 51(Supp. 2): 1 – 10. (in Chinese)
[9] HUANG J, HU P, WU K, et al. Optimal time-jerk trajectory planning for industrial robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 121: 530 – 544.
[10] 王曦, 王宗彦, 张宇廷,等. 基于 NSGA Ⅱ 算法的并联机器人多目标轨迹规划[J]. 机械设计与制造工程,2022, 51(12):6 – 13.
WANG Xi, WANG Zongyan, ZHANG Yuting, et al. Multi-objective trajectory planning of parallel robot based on NSGA Ⅱ algorithm[J]. Mechanical Design and Manufacturing Engineering, 2022, 51(12):6 – 13. (in Chinese)
[11] WU K, LI J, ZHAO H, et al. Review of industrial robot stiffness identification and modelling[J]. Applied Sciences, 2022, 12(17): 8719.
[12] LUKIC N, PETROVIC P B. Complementary projector for null-space stiffness control of redundant assembly robot arm[J]. Assembly Automation, 2019, 39(4): 696 – 714.
[13] LACHNER J, ALLMENDINGER F, STRAMIGIOLI S, et al. Shaping impedances to comply with constrained task dynamics [J]. IEEE Transactions on Robotics, 2022, 38(5): 2750 – 2767.
[14] LUKIĆ B, JOVANOVIĆ K, ŽLAJPAH L, et al. Online Cartesian compliance shaping of redundant robots in assembly tasks [J]. Machines, 2022, 11(1): 35.
[15] SHI D, LI Q, YANG C, et al. A constrained framework based on iblf for robot learning with human supervision[J]. Robotica, 2023,41(8):2451 – 2463.
[16] 冯征征. 七自由度冗余机械臂的逆运动学和运动规划算法研究[D]. 北京:北京邮电大学,2023:35 – 38.
FENG Zhengzheng. Research on inverse kinematics and motion planning algorithm of 7-DOF redundant manipulator[D]. Beijing: Beijing University of Posts and Telecommunications,2023:35 – 38. (in Chinese)
[17] HE Y, LIU S. Analytical inverse kinematics for franka emika panda—a geometrical solver for 7-dof manipulators with unconventional design[C]//2021 9th International Conference on Control, Mechatronics and Automation (ICCMA). IEEE, 2021: 194 – 199.
[18] CHEN C, ANGELES J. Generalized transmission index and transmission quality for spatial linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2007, 42(9): 1225 – 1237.
[19] WANG J, WU C, LIU X J. Performance evaluation of parallel manipulators: motion/force transmissibility and its index[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(10): 1462 – 1476.
[20] 陈祥,谢富贵,刘辛军. 并联机构中运动/力传递功率最大值的评价[J]. 机械工程学报,2014,50(3):1 – 9.
CHEN Xiang, XIE Fugui, LIU Xinjun. Evaluation of maximum motion/force transfer power in parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014,50(3): 1 – 9. (in Chinese)
[21] 宋盖. 冗余机械臂的运动学建模及轨迹规划研究[D]. 太原:太原科技大学,2023.
SONG Gai. Kinematics modeling and trajectory planning of redundant manipulator research[D]. Taiyuan: Taiyuan University of Science and Technology, 2023. (in Chinese)
[22] 刘子贵. 基于刚度椭球模型工业机器人姿态与抑制振动效果的研究[J]. 自动化应用,2022(11):118 – 121.
LIU Zigui. Research on attitude and vibration suppression effect of industrial robot based on stiffness ellipsoid model[J]. Journal of Automation Applications,2022(11):118 – 121. (in Chinese)
[23] 白玉龙. 6R 机械臂加工薄壁件振动抑制研究[D]. 杭州:浙江大学,2018.
BAI Yulong. Research on vibration suppression of thin-walled parts processed by 6R robotic arm[D]. Hangzhou: Zhejiang University,2018. (in Chinese)
[24] YAMAWAKI T, ISHIKAWA H, YASHIMA M. Iterative learning of variable impedance control for human-robot cooperation [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology,2016, 30(4):1345 – 1358.
[25] KNEŽEVIĆ N, LUKIĆ B, PETRIČ T, et al. A geometric approach to task-specific Cartesian stiffness shaping[J]. Journal of Intelligent & Robotic Systems, 2024, 110(1): 1 – 11.
[26] 齐有泉, 李艳文, 陈子明, 等. 串联九自由度喷涂机器人及其运动学分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(23): 165 – 171.
QI Youquan, LI Yanwen, CHEN Ziming, et al. Series nine-degree-of-freedom spraying robot and its kinematics analysis[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(23): 165 – 171. (in Chinese)
[27] 刘晓飞,刘洋,何阳,等. 2RPU + 2UPR + RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化[J]. 农业机械学报,2023,54(3): 440 – 450.
LIU Xiaofei, LIU Yang, HE Yang, et al. Kinematics analysis and optimization of 2RPU + 2UPR + RPR multi-redundant drive parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023,54(3):440 – 450. (in Chinese)
[28] SHIMIZU M, KAKUYA H, YOON W K, et al. Analytical inverse kinematic computation for 7-dof redundant manipulators with joint limits and its application to redundancy resolution[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2008, 24(5): 1131 – 1142.
[29] GAZ C, COGNETTI M, OLIVA A, et al. Dynamic identification of the franka emika panda robot with retrieval of feasible parameters using penalty-based optimization[J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2019, 4(4): 4147 – 4154.