doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.04.052

一种特殊位形直线机构图解综合与性能评价

张云文　纪奇研　刘　凯　杨朔飞
（中国农业大学工学院，北京 100083）

摘要：梯形四杆直线机构是一种具有特殊位形的近似直线机构，其过定点时连杆曲线为近似直线、且连杆平行于机架，在多足机器人领域具有较好的应用前景。为了完善和简化此类机构轨迹综合方法，在解析法基础上，研究其图解综合方法。基于无限接近运动几何学理论并结合公式与图解，证明了在一定条件下，梯形四杆直线机构特殊位形和曲率驻点曲线蜕化之间互为充要条件；提出了一种图解综合方法，在给定鲍尔点位置和直线运动方向前提下，各铰链位置和各连杆尺度可通过平面作图确定，并编写 Matlab 程序验证了所提方法。在此基础上提出了机构直线性能评价指标“直线段相位比”，列举了不同条件下机构直线性能，并结合遗传算法探索了该指标下的最优机构，优化得到一种直线段相位比为 0.665 的四杆直线机构。

关键词：四杆机构；近似直线机构；特殊位形；机构综合；轨迹综合；图解法
中图分类号：TH112　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1298(2025)04-0554-09　　**OSID**：

Graphical Synthesis and Performance Evaluation of Straight-line Mechanism with Special Configuration

ZHANG Yunwen　JI Qiyan　LIU Kai　YANG Shuofei
(*College of Engineering*, *China Agricultural University*, *Beijing* 100083, *China*)

Abstract: As an approximate straight-line mechanism, the ladder-shaped four-bar straight-line linkage (ladder-shaped linkage) was named for its special configuration, which connecting-rod paralleled to the frame. Due to the complexity of existing path synthesis theories of ladder-shaped linkages, a graphical synthesis method was presented. Firstly, the research improved the previous research based on analytical computations of the Ball－Burmester point (Ball point) theory, and proved that under certain conditions, the special configuration and the degeneration of circle point curve on the linkage were necessary and sufficient conditions for each other. Secondly, based on this proposition, the geometric feature characteristic-circle was discovered, leading to the possibility of graphical synthesis. A synthesis method was developed. Given the position of Ball point and the direction of linear motion, the position of each hinge and the dimension of each connecting rod can be determined by planimetric plotting. Moreover, two ladder-shaped linkages in different dimensions can be synthesized at once by the same initial condition. The plotting steps were given, and some special cases in the plotting process were discussed. Matlab programs were compiled to verify the synthesis method in three different initial conditions, proving that the mechanism obtained the ability of drawing approximate straight line. Finally, The parameter line-ratio was proposed to measure the length of liner motion time. The line-ratio of linkages under three different initial conditions was listed. By genetic algorithm, the linkage with maximum line-ratio was explored, given a ladder-shaped linkage with a line-ratio of 0.665, which can be applied in quadruped and hexapod robots.

Key words: four-bar linkage; approximate straight-line mechanism; special configuration; mechanism synthesis; path synthesis; graphical method

收稿日期：2024－02－18　修回日期：2024－04－10
基金项目：国家自然科学基金青年科学基金项目(52305042)
作者简介：张云文(1967—)，女，副教授，主要从事机构学与机器人系统研究，E-mail：zyw@cau.edu.cn
通信作者：杨朔飞(1988—)，男，副教授，主要从事空间机构学与移动机器人研究，E-mail：shuofei.yang@cau.edu.cn

0　引言

CHEBYSHEV 提出了将四杆直线机构应用于四足机器人的设想[1]，随后以切比雪夫机构为代表的各类四杆直线机构因构型简单、结构强度大、运动阻力小，可在难以使用滑轨等移动副情况下实现直线运动等优点，在机器人领域得到了广泛应用[2]。至今各类四杆直线步行机构仍为多足机器人领域研究热点[3-5]。

各类四杆直线机构轨迹综合是研究和设计此类机构的关键，其解决方法可分为解析法[6-9]、图解法[10-12]和计算机优化法[13-15]。无限接近运动几何学理论是四杆直线机构综合的基础，该理论具有结合解析法与图解法的特点[16-17]。基于该理论，前苏联学者发表了大量四杆直线机构解析综合成果，提出了连杆曲线接触 3、4、5 个无限接近点时四杆直线机构综合方法[18]。相关研究转向更具实践性的图解法，一些学者通过限制机构位形，令曲率驻点曲线发生蜕化，得到一些可行的综合方法[19-21]。

梯形四杆直线机构特殊位形为连杆与机架平行，是一类具有 4 点接触的四杆直线机构。彭伟斌[22]提出了在几何约束下此类机构解析法，通过推导发现了连杆平行于机架时，曲率驻点曲线会发生 $\frac{1}{N}=0$ 型蜕化。韩建友[23]提出了一类对称四杆直线机构综合方法，展示了梯形机构特殊情况。

目前，四杆直线机构轨迹综合问题已经较为成熟。但面向多足机器人设计时，四杆直线机构直线运动性能仍有待研究。通过研究和证明此类机构几何性质，本文提出较为简便的图解综合方法，并编程验证；同时，针对多足机器人对步态特殊需求，提出性能评价指标，以期为多足机器人设计提供新方法。

1　理论基础

平面无限接近运动几何学理论基础是欧拉-萨弗里方程。在动平面 $\boldsymbol{t}-\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{t}$ 为瞬心线切线方向，$\boldsymbol{n}$ 为法线方向，原点为瞬心 P）上，欧拉-萨弗里方程为

$$\left(\frac{1}{L_{PA}}-\frac{1}{L_{PA0}}\right)\sin\alpha=\frac{1}{D} \tag{1}$$

式中　L_{PA}——点 P 与移动构件上一点 A 之间的距离

L_{PA0}——点 P 与点 A 轨迹曲率中心 A_0 之间的距离

α——线段 PA 与 t 轴之间夹角

D——曲率拐点曲线参数

对欧拉-萨弗里方程求导可再得 1 条动平面上的解集曲线。曲线上动点在该瞬时曲率恒定，该曲线称为曲率驻点曲线，即

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{M\sin\alpha}+\frac{1}{N\cos\alpha} \tag{2}$$

式中　r——曲率驻点与点 P 之间距离

M、N——曲率驻点曲线参数

当式(2)中参数项 $\frac{1}{N}=0$ 时，曲率驻点曲线蜕化为 1 条直线和 1 个过瞬心的圆，如图 1 所示。曲线方程为

$$\begin{cases} r=M\sin\alpha \\ \cos\alpha=0 \end{cases} \tag{3}$$

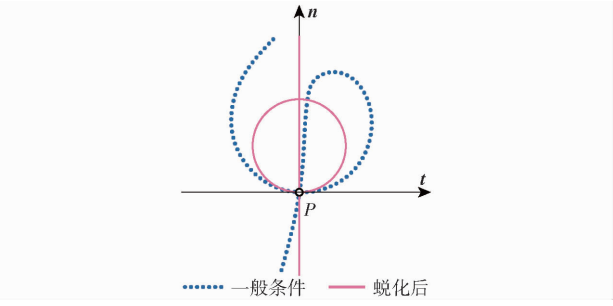

图 1　曲率驻点曲线蜕化

Fig. 1　Degeneration of circle point curve

鲍尔点是曲率驻点曲线上的一个特殊点，为 4 点接触点。连杆曲线过该点时曲率为 0 且曲率变化率为 0；具体表现为速度大小和方向不变，加速度为 0，为近似直线运动。理论基础可参照文献[24]，不再赘述。

2　几何性质证明

为了解决梯形四杆直线机构图解综合问题，首先基于解析综合方法，证明几何性质与解析性质之间互为充要条件。梯形机构解析特征为曲率驻点曲线发生 $\frac{1}{N}=0$ 型蜕化。基于此特征，可证明相关几何性质。

基于鲍尔点的四杆直线机构一般综合方法如图 2 所示，对于四杆机构 A_0ABB_0，当瞬心 P 和鲍尔点 P_1 位置确定后，即可反求出铰链点 A、B 位置。

由图 2 可得

$$\frac{1}{L_{PA}}=\frac{1}{M\sin\alpha_a}+\frac{1}{N\cos\alpha_a} \tag{4}$$

$$\frac{1}{L_{PB}}=\frac{1}{M\sin\alpha_b}+\frac{1}{N\cos\alpha_b} \tag{5}$$

$$\frac{1}{L_{PP1}}=\frac{1}{M\sin\alpha_1}+\frac{1}{N\cos\alpha_1} \tag{6}$$

$$L_{PA}=\frac{L_{PA0}D\sin\alpha_a}{L_{PA0}+D\sin\alpha_a} \tag{7}$$

$$L_{PB}=\frac{L_{PB0}D\sin\alpha_b}{L_{PB0}+D\sin\alpha_b} \tag{8}$$

$$L_{PP1}=D\sin\alpha_1 \tag{9}$$

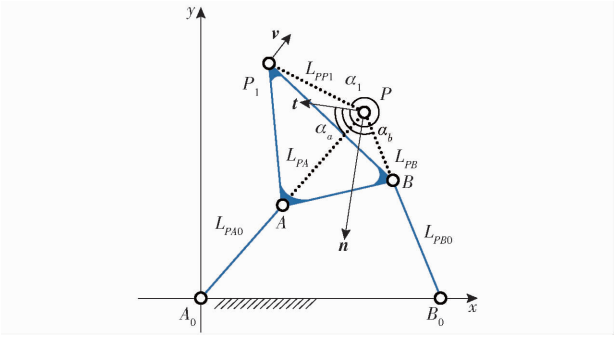

图 2 基于无限接近运动几何学的四杆直线机构综合示意图

Fig. 2 Diagram of four-bar straight-line linkage synthesis in Ball－Burmester point theory

式(4)~(9)中所有 α 均以 $\boldsymbol{t}$ 轴逆时针为正向。

通过式(4)~(9)确定鲍尔点相关参数时,机构位形有唯一解[24]。

取 $\frac{1}{N}=0$,曲率驻点曲线发生蜕化,如图 1 所示。因铰链点 A、B 作圆弧运动,故其始终在驻点曲线上。考虑到驻点曲线由两部分组成,因此点 A、B 分布分 3 种情况:①点 A、B 都在 $\boldsymbol{n}$ 轴上。②只有一点在 $\boldsymbol{n}$ 轴上。③两点都不在 $\boldsymbol{n}$ 轴上。

2.1 铰链点 A、B 都在 $\boldsymbol{n}$ 轴上

此种情况不适用于鲍尔点理论,原因为:点 P 为 $\boldsymbol{n}-\boldsymbol{t}$ 坐标系原点,点 A、B 在 $\boldsymbol{n}$ 轴上时,点 P、A、B 共线。根据三心定理,杆 A_0A 与杆 B_0B 共线。因此,瞬心 P 应位于无穷远处,可得 L_{PA}、L_{PA0} 均为 0,欧拉-萨弗里方程无解。为了使连架杆 A_0A 与 B_0B 不共线,则点 A、B 其中一点与点 P 重合,如图 3 所示。

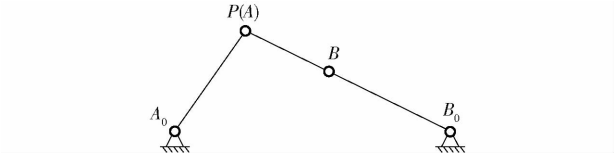

图 3 铰链点 A、B 其中一点与瞬心 P 重合

Fig. 3 Hinges A or B coincides with instant center P

以点 P、A 重合为例,此时 $L_{PA}=0$,根据式(1),不满足欧拉-萨弗里方程的定义域。由于欧拉-萨弗里方程是鲍尔点理论的基础,因此点 A、B 都在 $\boldsymbol{n}$ 轴上的情况不适用于此理论。

2.2 铰链点 A、B 仅有一点在 $\boldsymbol{n}$ 轴上

此种情况的综合方法可参见文献[19],此类机构不具备连杆平行特征,综合方法中也无任何几何平行条件,因而不再赘述。

2.3 铰链点 A、B 均不在 $\boldsymbol{n}$ 轴上

如图 4 所示,在笛卡尔坐标系中作点 A_0、B_0,在有限域内设点 P 和任意方向 $\boldsymbol{t}$ 轴,将 $\boldsymbol{t}$ 轴逆时针方向旋转 90°,得到 $\boldsymbol{n}$ 轴。

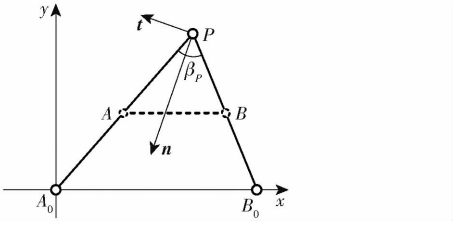

图 4 证明示意图

Fig. 4 Diagram of following proof

因点 A、B 均不在 $\boldsymbol{n}$ 轴上,故两点只能在圆周段上(不包括 $\boldsymbol{n}$ 轴与圆周段的两个交点),即

$$\begin{cases} L_{PA}=M\sin\alpha_a & \left(\alpha_a\neq\dfrac{\pi}{2}+i\pi\right) \\ L_{PB}=M\sin\alpha_b & \left(\alpha_b\neq\dfrac{\pi}{2}+i\pi\right) \end{cases} \tag{10}$$

代入式(7)~(8),解得

$$\begin{cases} M\sin\alpha_a=\dfrac{L_{PA0}D\sin\alpha_a}{L_{PA0}+D\sin\alpha_a} \\ M\sin\alpha_b=\dfrac{L_{PB0}D\sin\alpha_b}{L_{PB0}+D\sin\alpha_b} \end{cases} \tag{11}$$

联立式(10)、(11),可得

$$\frac{L_{PA0}}{\sin\alpha_a}=\frac{L_{PB0}}{\sin\alpha_b} \tag{12}$$

将式(12)中 $\frac{L_{PA0}}{\sin\alpha_a}$ 比值设为 C,代入式(11),可得

$$C=\frac{MD}{D-M} \tag{13}$$

由式(12)可知,在点 P 确定后,C 为与待定 L_{PA}、L_{PB} 无关的参数。对式(12)变形可得

$$\begin{cases} L_{PA0}=C\sin\alpha_a \\ L_{PB0}=C\sin\alpha_b \end{cases} \tag{14}$$

用式(10)除以式(14),将 $\frac{M}{C}$ 比值设为 k,解得

$$\frac{L_{PA}}{L_{PA0}}=\frac{L_{PB}}{L_{PB0}}=\frac{M}{C}=k \tag{15}$$

由于铰链点 A、B 不能与瞬心 P 重合,且任意杆长不能为 0,因此 k 不能取 0 和 1。

$\triangle A_0PB_0$ 与 $\triangle APB$ 共用夹角 β_P,且两侧边长比例相等,因此 $\triangle A_0PB_0\backsim\triangle APB$,$AB/\!/A_0B_0$,即连杆与机架平行(连杆平行于机架)。

综上,当铰链点 A、B 均不在 $\boldsymbol{n}$ 轴上、且点 P 位于有限域内时,连杆平行于机架是曲率驻点曲线发生 $\frac{1}{N}=0$ 型蜕化的必要条件。结合文献[22]可得,在此条件下,连杆平行于机架与 $\frac{1}{N}=0$ 互为充要条件。这说明梯形机构几何性质与其解析特征等价,保证了后续推导的严谨性。

3　综合方法

3.1　图解法原理

在图 4 的基础上过点 A_0，作 PA_0 垂线，交 $\boldsymbol{n}$ 轴于 C_A；过点 B_0 作 PB_0 的垂线，交 $\boldsymbol{n}$ 轴于 C_B，如图 5 所示。由于点 A、B 都不在 $\boldsymbol{n}$ 轴上，所以垂足 C_A、C_B 一定存在。

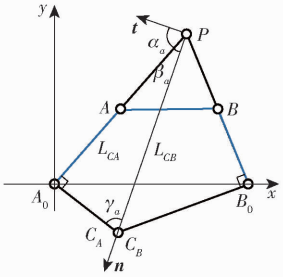

图 5　几何推导示意图

Fig. 5　Diagram of geometric derivation

图中存在几何关系

$$\gamma_a = \alpha_a \tag{16}$$

代入式(14)，可得

$$\sin\gamma_a = \frac{L_{PA0}}{C} = \frac{L_{PA0}}{L_{CA}} \tag{17}$$

故存在

$$L_{CA} = C \tag{18}$$

由于点 A、B 等效，同理可得 $L_{CB} = C$，因而有 $L_{CA} = L_{CB}$。又因点 C_A、C_B 都在 $\boldsymbol{n}$ 轴上，所以两点重合。将重合点定义为 C_0，线段 PC_0 长度即为 C。由于 $\triangle PA_0C_0$ 和 $\triangle PB_0C_0$ 是共享斜边的直角三角形，根据圆周角定理，有 P、A_0、B_0、C_0 在以线段 PC_0 为直径的圆上，直径为 C。该圆可称为梯形四杆直线机构特征圆，如图 6 所示。

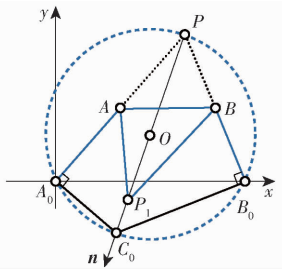

图 6　特征圆(蓝色虚线)

Fig. 6　Characteristic-circle (presented in blue dashed curves)

特征圆为式(12)的几何含义。过点 A_0、B_0 和瞬心 P 作圆，即可确定 $\boldsymbol{n}$ 轴方向和参数 C，进而通过式(15)求出 M。

同铰链点 A、B 一样，点 P_1 也存在是否位于 $\boldsymbol{n}$ 轴上两种情况。如果 P_1 不在 $\boldsymbol{n}$ 轴上，则有

$$L_{PP1} = M\sin\alpha_1 \quad \left(\alpha_1 \neq \frac{\pi}{2} + i\pi\right) \tag{19}$$

将式(19)代入式(9)，得 $M = D$；再代入式(13)，得 $C \to +\infty$，瞬心点 P 相对于机架位于无穷远处，不满足欧拉-萨弗里方程适用条件。故鲍尔点只能位于 $\boldsymbol{n}$ 轴上。根据式(9)可得

$$L_{PP1} = D \tag{20}$$

将式(15)代入式(13)，可得

$$D = \frac{kC}{1-k} \quad (k \neq 0 \cup k \neq 1) \tag{21}$$

3.2　特征圆和两个可行瞬心求解

综上，在给定指定机架 A_0B_0，鲍尔点 P_1 及其运动方向后，可反求铰链点 A、B，瞬心点 P 及比例系数 k。结合几何性质，可得一种图解综合方法。

如图 7 所示，作点 A_0、B_0，在有限域上取一点 $P_1(x,y)$ 作为直线轨迹输出点，指定鲍尔点运动方向 $\boldsymbol{a}$。过点 P_1 作 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{a}$。

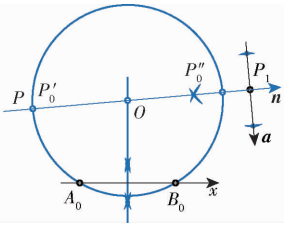

图 7　特征圆和两个可行瞬心

Fig. 7　Solution of characteristic-circle and two possible instant center

点 A_0、B_0 在特征圆上，且 $\boldsymbol{n}$ 轴过特征圆圆心。因此，如图 7 所示，作 A_0B_0 的垂直平分线交 $\boldsymbol{n}$ 轴于点 O，O 即为特征圆圆心。以 O 为圆心、线段 OA_0 为半径作圆，即为特征圆。

量取特征圆直径为 C，定义为正值。特征圆与 $\boldsymbol{n}$ 轴有两个交点，为两个可行的瞬心 P_0' 和 P_0''。选取其中一个定义为点 P，将向量 $\boldsymbol{PO}$ 方向定义为 $\boldsymbol{n}$ 轴正方向。根据式(20)取 L_{PP1} 为 D。若向量 $\boldsymbol{PP}_1$ 与 $\boldsymbol{n}$ 轴方向相同，则 $D>0$，若方向相反，则 $D<0$。通过向量点乘定义 D 为

$$D = \boldsymbol{PP}_1 \cdot \frac{\boldsymbol{PO}}{|\boldsymbol{PO}|} \tag{22}$$

根据式(21)可得 $D \neq 0$，因此 P、P_1 不能重合。对式(21)变形可得

$$kC = \frac{DC}{C+D} = M \tag{23}$$

可得 $C \neq -D$。

3.3　参数 M 求解

根据式(23)求参数 M，如图 8 所示。

在 $\boldsymbol{n}$ 轴上作 C'，令 $L_{PC'} = C$；在向量 $\boldsymbol{a}$ 正方向上作 P_1'，令 $L_{P1P1'} = D$。此时直角三角形 $\triangle P_1'P_1C'$ 的直角边长度分别为 D 和 $C+D$。过点 P 作 $\boldsymbol{n}$ 轴的垂线，交斜边于点 P'。可图解得

$$L_{PP'} = C\tan\beta_C = \frac{CD}{C+D} = M \tag{24}$$

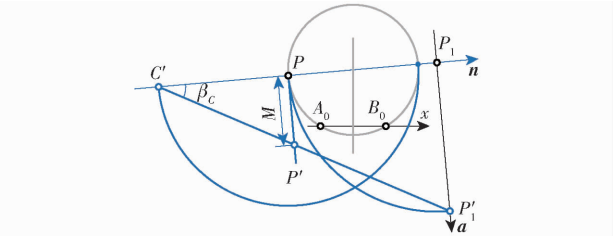

图 8 求解参数 M

Fig. 8 Solution of parameter M

式中 β_C——三角形 $\triangle P_1'P_1C'$ 顶点 C' 所对夹角

以点 P 为圆心，线段 PP' 为半径作圆，与 $\boldsymbol{n}$ 轴正方向或负方向交点为 C_k。具体选择哪个交点取决于 M 符号。D 存在负值解，因而 M 也可能取负值，故作图分为 3 种情况：

(1) $D>0$，一定有 $M>0$，如图 9 所示，向 $\boldsymbol{n}$ 轴正方向作 C_k。

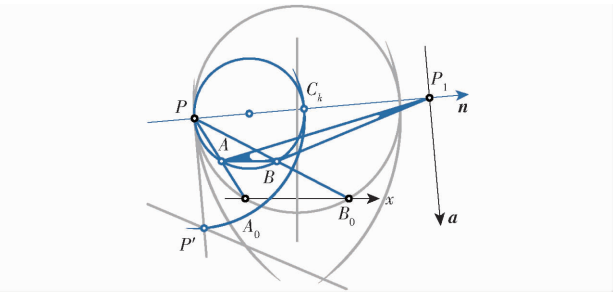

图 9 求铰链点 A、B 的位置

Fig. 9 Solution of hinges A and B

(2) $D<0$，$C>-D$，作图时表现为 C' 在 P_1 的外侧，$M<0$，如图 10a 向 $\boldsymbol{n}$ 轴负方向作 C_k。

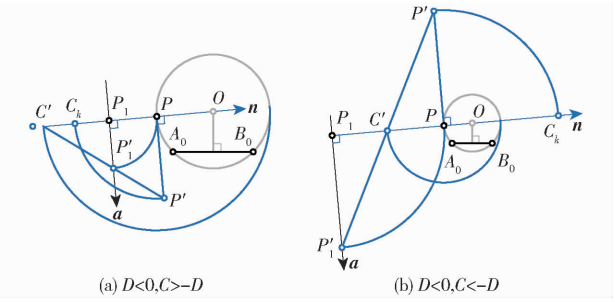

图 10 D 小于 0 时 C_k 的构造方法

Fig. 10 Plotting of C_k while $D<0$

(3) $D<0$，$C<-D$，作图时表现为 C' 在 P_1 的内侧，$M>0$，如图 10b 向 $\boldsymbol{n}$ 轴正方向作 C_k。

3.4 铰链点 A、B 位置解

如图 9 所示，连接线段 PA_0、PB_0，以线段 PC_k 为直径作圆，与 PA_0 和 PB_0 的交点即为点 A、B。最后连接线段 P_1A 和 P_1B，得到尺度满足画直线需求的梯形四杆直线机构。

根据相似三角形定律解得

$$\frac{L_{PA}}{L_{PA0}}=\frac{L_{PB}}{L_{PB0}}=\frac{L_{PP'}}{C}=\frac{M}{C}=k \tag{25}$$

式(25)符合式(15)对点 A、B 的定义，同时也得到最后 1 个所求参数 k。可通过验证杆 AB 与机架 A_0B_0 是否平行来判断作图是否正确。

3.5 失效与特殊情况探讨

在选择点 P_1 位置与运动方向时，除了需满足上述提到的“P、P_1 不能重合”和“$C\neq -D$”之外，还需要考虑失效情况，如图 11 所示。

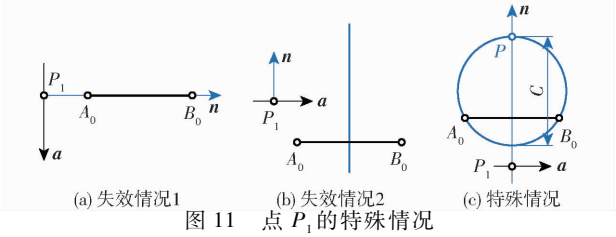

图 11 点 P_1 的特殊情况

Fig. 11 Exceptional cases of plotting P_1

若点 P_1 在机架 A_0B_0 的延长线上，则 $\boldsymbol{a}$ 不得垂直于 A_0B_0，否则会使四杆机构蜕化为 4 条重合的线段，如图 11a 所示。

若点 P_1 不在 A_0B_0 垂直平分线上，则 $\boldsymbol{a}$ 不得平行于 A_0B_0，否则 $\boldsymbol{n}$ 轴与垂直平分线无交点，特征圆无解，如图 11b 所示。

若点 P_1 在 A_0B_0 的垂直平分线上，且 $\boldsymbol{a}\parallel A_0B_0$，则 $\boldsymbol{n}$ 轴与垂直平分线重合，C 可取有限域内的任何值。换言之，点 P 可在垂直平分线上自行选取。后续综合方法与一般情况相同，如图 11c 所示。

综上，综合方法主要步骤为：

(1) 指定机架 A_0B_0、鲍尔点 P_1 和运动方向 $\boldsymbol{a}$。判断初始条件是否有解。如有解，则判断是否存在特殊情况。根据具体情况图解点 P，并判断是否有解；或指定点 P。

(2) 如点 P 有解，则图解参数 M，根据参数 C、D 判断 M 是否有解。如 M 有解，则根据参数 C、D 的关系判断 C_k 的构造方法。

(3) 求解铰链点 A、B 位置及其他参数。

梯形四杆直线机构图解综合方法流程如图 12 所示。

3.6 综合方法验证

将作图过程转换为代码，在 Matlab 中编写验证程序。具体的编程方法可参考单环机构运动空间求解[25-26]。随机设置 P_1 与方向 $\boldsymbol{a}$，求解 P 在两个可行位置时两种机构尺度。若机构可整转，则令整转副相对机架匀速转动，并绘制连杆曲线与点 P_1 加速度曲线。机架长度 L_{A0B0} 设为 1 m，$\boldsymbol{a}$ 设为单位向量，不设量纲，整转副角速度设为 1 rad/s。如图 13～15 所示。

可见，不同初始条件下均有鲍尔点 P_1 速度大小与方向不变，且加速度小于计算误差，证明其具有画直线能力。

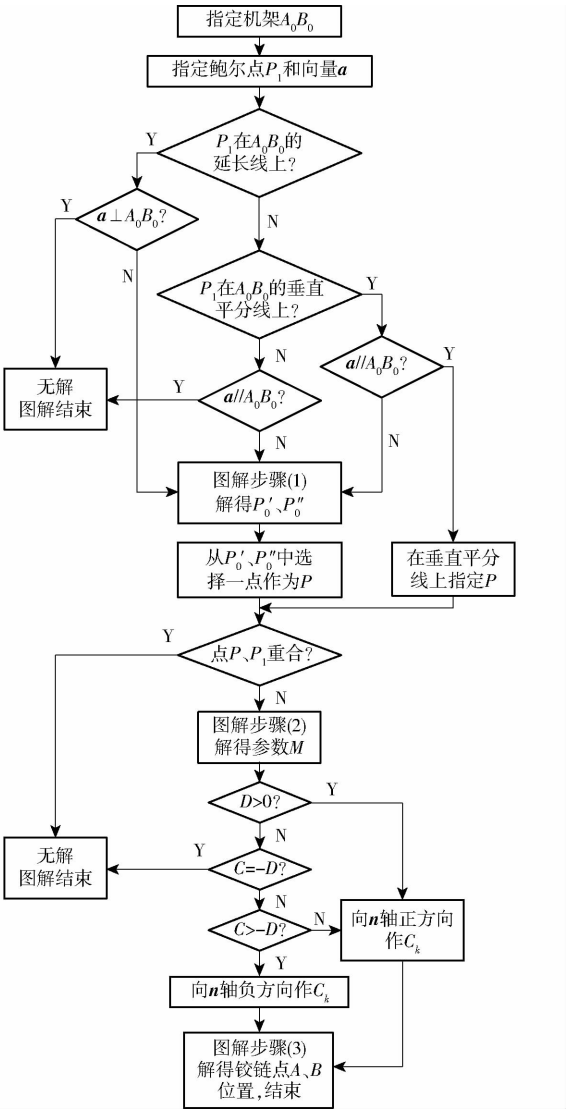

图 12　图解综合方法梯形机构流程图

Fig. 12　Flowchart of ladder-shaped linkage graphical synthesis

4　直线性能评价指标

理想的近似直线机构需要较高的直线度，可使用近似直线段长度[27]或者实际曲线与理想曲线之间的近似度[28]来评价。然而，除空间上直线程度，机构也会遇到对直线运动时间有要求的情况。这一方面仍有待研究。

以四足机器人为例。在行走步态下，四足机器人每条腿在存在接触地面的“支撑相”与不接触地面的“摆动相”。支撑相时长与步态周期长度比值称为占地系数β[29]，计算式为

$$\beta=\frac{t_S}{T_S} \tag{26}$$

式中　t_S——支撑相占用时间

T_S——步态周期长度

在特定步态下，β 与机器人稳定性相关。如 β 过小，机器人有可能发生后腿拖地、侧翻等故障。

四杆直线机构可通过与其他平面杆组串联或并联从而应用于多足机器人[30-31]。此时，直线段对应支撑相，曲线段对应摆动相，如图 16 所示。

为了维持机器人行走稳定性，四杆直线机构需要较长直线运动时间。对于此类应用情况，可作如下假设：①四杆直线机构具有整转副。②只在机架上设有驱动副。驱动副运动规律为匀速转动，转动周期为 T。③如果整转副不在机架上，则令其驱动杆件相对机架匀速转动。

当以上 3 个假设成立时，为了兼顾直线运动时间属性，可定义直线段相位比 φ_l 作为评价指标。计算式为

$$\varphi_l=\frac{t_1-t_0}{T} \tag{27}$$

式中　t_0——连杆曲线进入直线段时刻

t_1——连杆曲线离开直线段时刻

直线段相位比 φ_l 是直线段工作时间与工作循环周期之比。若上述 3 个假设不成立，则 φ_l 无解。

当四杆直线机构的连杆曲线与足端轨迹一一对应时，直线段相位比 φ_l 与占地系数 β 等效。

直线段可通过一个范围定义：向量 $\boldsymbol{a}$ 两侧宽度 d 分别为连杆曲线沿 $\boldsymbol{n}$ 轴方向总宽度 H 5% 的区域，如图 17 所示，计算式为

$$d=0.05H \tag{28}$$

连杆曲线是六次曲线，φ_l 解析解比较复杂，因而采用数值解近似计算。将连杆曲线按时间均匀离散，将 t_0 与 t_1 之间离散点数量 N_φ 与离散点总数 N_T 之比作为直线段相位比近似值。计算式为

$$\varphi_l\approx\frac{N_\varphi}{N_T} \tag{29}$$

其中　$N_\varphi\approx\dfrac{t_1-t_0}{\Delta t}$　　$N_T=\dfrac{T}{\Delta t}$

式中　Δt——相邻两个离散点的时间差

以图 18 的连杆曲线为例，$N_\varphi=42$，$N_T=72$，即可近似得到 $\varphi_l\approx0.583$。同时，离散点密集程度也可定性反映连杆运动速度。密集处速度较慢，稀疏处速度较快。

在 Matlab 作图程序基础上，利用上述离散方法进一步计算梯形机构连杆曲线直线段相位比。当离散点总数 N_T 为 360 时，取不同点 P_1 与 $\boldsymbol{a}$ 时，所解得的直线段相位比结果如表 1 所示。

直线段相位比越高，作直线运动时间越长，鲍尔点附近直线度越高。若需要较高的相位比，可使用遗传算法优化。使用 Matlab 遗传算法函数“ga( )”作为优化算法。

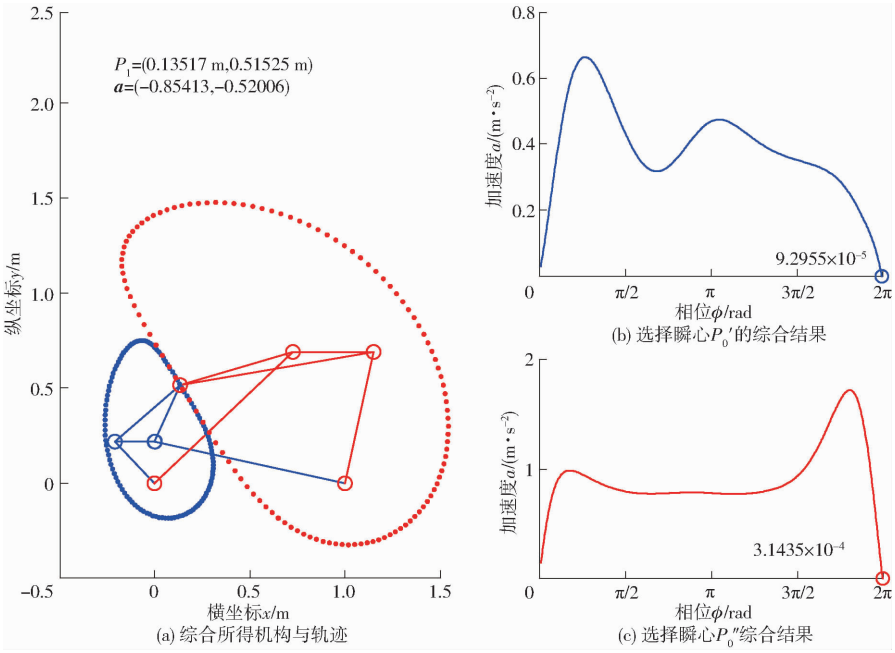

图 13 两个可行瞬心均可生成具有整转副机构(梯形)

Fig. 13 Mechanism with integral rotating pairs can be generated from both instantaneous centers (trapezoid)

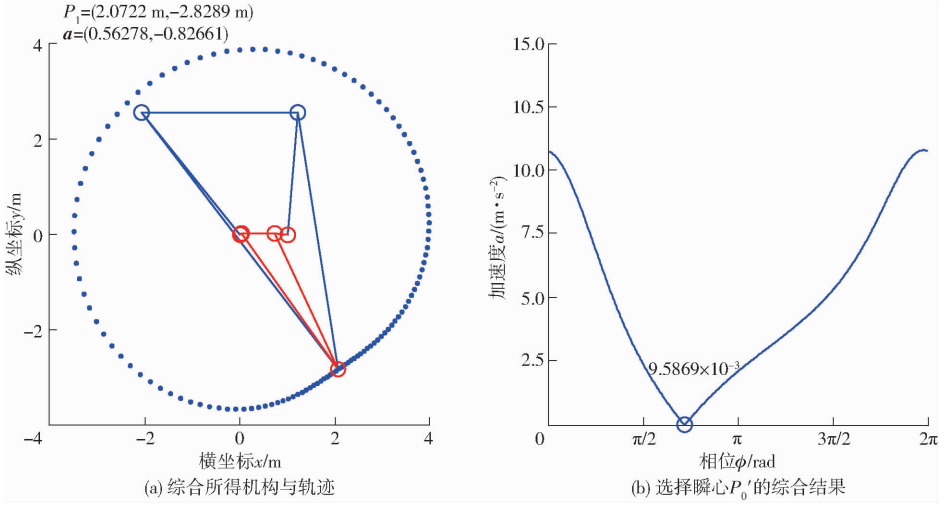

图 14 仅选择 P_0'时可生成具有整转副机构(倒梯形)

Fig. 14 Mechanism with integral rotating pairs can be generated only from P_0' (inverted trapezoid)

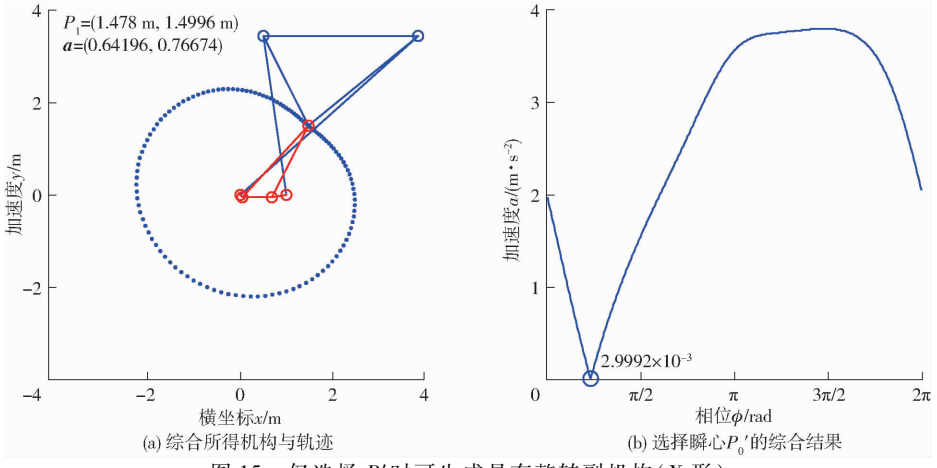

图 15 仅选择 P_0'时可生成具有整转副机构(X 形)

Fig. 15 Mechanism with integral rotating pairs can be generated only from P_0' (X-shaped)

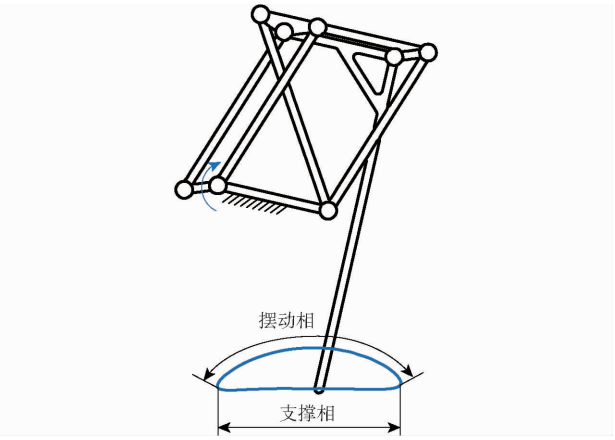

图 16　足端轨迹示意图

Fig. 16　Illustration of foot trajectory

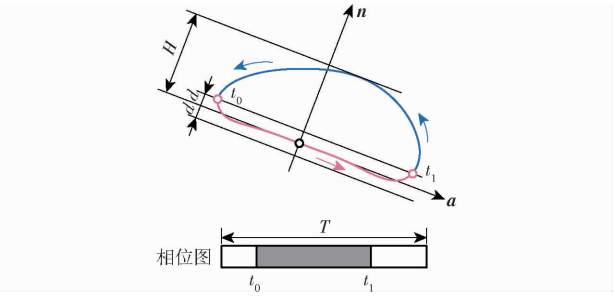

图 17　直线段定义

Fig. 17　Definition of liner motion segment

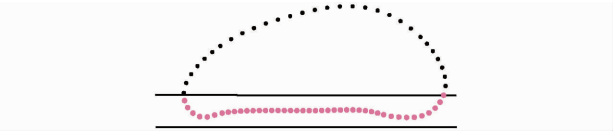

图 18　离散点示意图

Fig. 18　Diagram of discrete points

表 1　一些初始条件下直线段相位比

Tab. 1　Line-ratio under several initial conditions

P_1/m	$\boldsymbol{\alpha}$	瞬心	φ_l
(0.538,1.834)	(0.698,0.716)	P_0'	0.247
		P_0''	0.216
(0.862,0.319)	(0.818,0.575)	P_0'	0.285
		P_0''	无解
(0.725,−0.063)	(0.311,−0.951)	P_0'	无解
		P_0''	0.199

同一组初始条件最多有两个 φ_l，最少为无解。构造罚函数时需要兼顾这些情况：如果两个瞬心均有解，则总罚函数 p 为子罚函数 p_i 中的最小值；如果只有一个解，则子罚函数与总罚函数等效；如果无解，则罚函数设为无限大，令搜索算法避开无解的初始条件。设解数量为 n，罚函数为

$$p=\begin{cases}\min(p_1,p_2) & (n=2)\\ p_i & (n=1)\\ \infty & (n=0)\end{cases} \tag{30}$$

其中

$$p_i=1-\varphi_l \quad (i=1,2) \tag{31}$$

为了避免杆长过于极端，优化时设置点 $P_1(x,y)$ 边界条件为 $x\in[-2\text{ m},3\text{ m}]$，$y\in[-2\text{ m},2\text{ m}]$。设置种群数量为 500，最大代数为 300。设置随机数生成器函数“rng”为默认值(default)。在保持以上参数不变的条件下，在同一 Matlab 软件(版本：2020b)中重复优化 10 次，p 的平均值为 0.335，且标准差小于 0.001。可见，遗传算法已充分收敛。将 p 平均值代入式(30)，解得直线段相位比 φ_l 为 0.665，即为梯形四杆直线机构 φ_l 的最大值。

通过程序导出第 1 次结果对应的初始条件为：$P_1=(0.269\text{ m},1.450\text{ m})$，$\boldsymbol{a}=(0.215,-0.977)$。代入作图程序，瞬心 P_0' 所对应的机构无解，P_0'' 解得 φ_l 为 0.665 的机构，如图 19 所示。其杆长如表 2 所示。

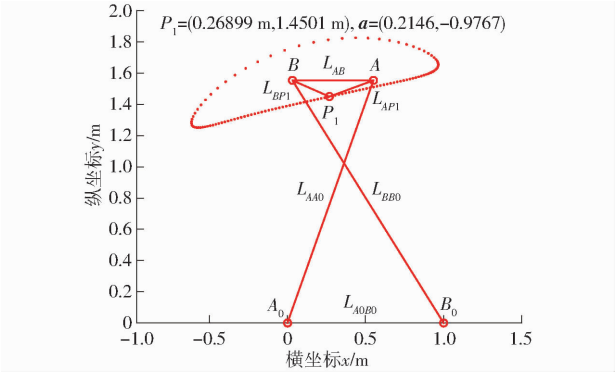

图 19　优化后梯形机构

Fig. 19　Optimized ladder-shaped linkage

表 2　φ_l 取得 0.665 时梯形机构各杆长参数

Tab. 2　Length of each pole in optimized ladder-shaped linkage　　m

参数	L_{A0B0}	L_{AA0}	L_{AB}	L_{BB0}	L_{AP1}	L_{BP1}
数值	1.000	1.649	0.519	1.831	0.301	0.259

该机构 φ_l 低于四足机器人稳定行走所需的最低占地系数 $\beta_4=0.75$，但高于六足机器人所需的最低占地系数 $\beta_6=0.5$。因而可用于六足机器人，或四足机器人的非行走步态。

5　结论

(1)研究梯形四杆直线机构的特殊位形，证明了其解析性质与几何性质之间互为充要条件，为图解法奠定了基础。

(2)基于梯形机构的解析与几何性质，构建了此类机构特征圆，提出了该类直线机构图解综合方法，并用程序验证了方法流程正确性。

(3)针对四足和六足机器人在步态上对占地系数的需求，提出了直线段相位比作为机构直线性能的评价指标，并探讨了提升该指标方法及其最优解。

参 考 文 献

[1] BISWAL P, MOHANTY P K. Development of quadruped walking robots: a review[J]. Ain Shams Engineering Journal, 2021, 12(2): 2017 - 2031.

[2] ZHAO Jingshan, WANG Jianyi, CHU Fulei, et al. Structure synthesis and statics analysis of a foldable stair[J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46(7): 998 - 1015.

[3] 蔡高参, 王忠. Tchebycheff Lambada 直线机构与 4 足机器人运动特性研究[J]. 机械设计, 2010, 27(5): 35 - 38.
CAI Gaocan, WANG Zhong. Research on the kinetic characteristics of Tchebycheff Lambada straight line mechanism and four-legged robot[J]. Journal of Machine Design, 2010, 27(5): 35 - 38. (in Chinese)

[4] BIRGLEN L, RUELLA C. Analysis and optimization of one-degree of freedom robotic legs[J]. Journal of Mechanisms and Robotics-Transactions of the ASME, 2014, 6(4): 041004.

[5] 谭稀岑. 基于单环闭链机构的可变形轮腿式机器人研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2021.
TAN Xicen. Research on deformable wheel-legged robot based on single-loop closed-chain mechanism[D]. Beijing: Beijing Jiaotong University, 2021. (in Chinese)

[6] HAN Jianyou, QIAN Weixiang, ZHAO Huishe. Study on synthesis method of λ-formed 4-bar linkages approximating a straight line[J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(1): 57 - 65.

[7] YIN Lairong, HUANG Long, HUANG Juan, et al. Solution-region-based synthesis approach for selecting optimal four-bar linkages with the Ball-Burmester point[J]. Mechanical Sciences, 2019, 10(1): 25 - 33.

[8] 钱卫香, 杨银烁, 靳智超, 等. 瞬心无穷远直线导向机构通用综合方法研究[J]. 机械设计与研究, 2023, 39(4): 83 - 88.
QIAN Weixiang, YANG Yinshuo, JIN Zhichao, et al. General synthesis method of straight-line mechanism with instant center at infinity[J]. Machine Design and Research, 2023, 39(4): 83 - 88. (in Chinese)

[9] 卢天齐, 王也, 王世光, 等. 含六杆组八杆机构曲柄存在域自动生成方法[J]. 农业机械学报, 2023, 54(11): 440 - 450.
LU Tianqi, WANG Ye, WANG Shiguang, et al. Automatic generation method for determining crank existence region of eight-bar linkage with six-bar group[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(11): 440 - 450. (in Chinese)

[10] BARTON L O. A new graphical technique for solving the Euler-Savary equation[J]. Mechanism and Machine Theory, 1995, 30(8): 1305 - 1309.

[11] DIJKSMAN E A, SMALS A T J M. How to exchange centric inverted slider cranks with λ-formed four-bar linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2000, 35(2): 305 - 327.

[12] 沈惠平, 邹旻, 胡爱萍. 拐点圆在近似直线机构综合上的应用研究[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(4): 554 - 555.
SHEN Huiping, ZOU Min, HU Aiping. An application of inflection circle to synthesis of approximate straight-line linkages[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(4): 554 - 555. (in Chinese)

[13] SÁNCHEZ-MARIN F T, PÉREZ GONZÁLEZ A. Global optimization in path synthesis based on design space reduction[J]. Mechanism and Machine Theory, 2003, 38(6): 579 - 594.

[14] 张国利, 汪永明. 双闭链式步行腿机构的设计与分析[J]. 安徽工业大学学报(自然科学版), 2021, 38(3): 290 - 296.
ZHANG Guoli, WANG Yongming. Design and analysis of double closed chain walking leg mechanism[J]. Journal of Anhui University of Technology (Natural Science), 2021, 38(3): 290 - 296. (in Chinese)

[15] BASKAR A, PLECNIK M, HAUENSTEIN J D. Finding straight line generators through the approximate synthesis of symmetric four-bar coupler curves[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023, 188: 105310.

[16] VIDOSIC J P, TESAR D. Selection of four-bar mechanisms having required approximate straight-line outputs Part I. The general case of the ball-burmester point[J]. Journal of Mechanisms, 1967, 2(1): 23 - 44.

[17] 唐家玮, 杨雁滨. 运动平面无限接近位置机构综合的计算机辅助设计[J]. 机械设计, 1996(2): 29 - 31, 45.
TANG Jiawei, YANG Yanbin. The CAD of mechanism synthesis for the infinite approaching position of a moving plane[J]. Journal of Machine Design, 1996(2): 29 - 31, 45. (in Chinese)

[18] 阿尔托包列夫斯基 ИИ. 平面机构综合(下册)[M]. 北京: 人民教育出版社, 1965.

[19] 彭伟斌. 综合铰链四杆直线机构的一种方法[J]. 机械设计与研究, 1999(4): 42 - 43.

[20] 胡泽保, 彭伟斌. “三角形”铰链四杆直线机构综合方法的研究[J]. 机械科学与技术, 2002, 21(5): 786 - 787.
HU Zebao, PENG Weibin. On the synthesis of Delta four-bar straight-line linkage[J]. Mechanical Science and Technology, 2002, 21(5): 786 - 787. (in Chinese)

[21] YIN Lairong, TIAN Lei, HUANG Long, et al. A solution-region approach for synthesis linkages with coincident instantaneous center and one fixed pivot[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2020, 34(2): 829 - 834.

[22] 彭伟斌. “梯形”四杆直线机构综合方法的研究[J]. 机械科学与技术, 2000, 19(5): 717 - 718.
PENG Weibin. A method for synthesizing “trapezoid” four-bar straight-line linkage[J]. Mechanical Science and Technology, 2000, 19(5): 717 - 718. (in Chinese)

(下转第 570 页)

Wear, 1994, 173(1 - 2):199 - 206.
[10] KOÇ E, NG K, HOOKE C J. An analysis of the lubrication mechanisms of the bush-type bearings in high pressure pumps[J]. Tribology International, 1997, 30(8): 553 - 560.
[11] ZHAN Peng, WEI Liejiang, LIU Rongmin, et al. Flow field modeling and simulation of high-speed gear pump considering optimal radial and end clearance[J]. IEEE Access, 2023, 11: 64725 - 64737.
[12] 陈鼎,张杨,叶绍干,等.配合间隙对直线共轭内啮合齿轮泵流场特性的影响[J]. 农业机械学报, 2024, 55(2): 442 - 449.
CHEN Ding, ZHANG Yang, YE Shaogan, et al. Influence of mating clearance on flow field characteristics of linear conjugate internal gear pump[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(2): 442 - 449. (in Chinese)
[13] LIU Hongru, PAN Mengni, FU Jiangfeng, et al. A new type unloading groove design and simulation for engine fuel gear pump [C]// 13th International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering. IEEE, 2022: 86 - 90.
[14] IVANOV V, KARAIVANOV D, IVANOVA S, et al. Gear mesh geometry effect on performance improvement for external gear pumps[C]// MATEC Web of Conferences, EDP Sciences, 2019: 01007.
[15] ZHAO Xinran, VACCA A. Analysis of continuous-contact helical gear pumps through numerical modeling and experimental validation[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 109: 352 - 378.
[16] 杨国来, 王文宇, 黄付田, 等. 不同吸油口尺寸及转速下齿轮泵空化特性[J]. 液压与气动, 2020,44(1): 74 - 79.
YANG Guolai, WANG Wenyu, HUANG Futian, et al. Cavitation characteristics of gear pumpunder different suction port sizes and speeds[J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2020,44(1): 74 - 79. (in Chinese)
[17] EL-HADJ A A, SHAYFULL Z B A R. Optimization of an external gear pump using response surface method[J]. Journal of Mechanics, 2020, 36(4): 567 - 575.
[18] BÜGENER N, KLECKER J, WEBER J. Analysis and improvement of the suction performance of axial piston pumps in swash plate design[J]. International Journal of Fluid Power, 2014, 15(3): 153 - 167.
[19] FAN Xiaoxuan, ZHAO Dingxuan, ZHAO Xiaolong, et al. Design of shipborne constant pressure pressurized tank and constant pressure control[C]// IEEE 8th International Conference on Fluid Power and Mechatronics. IEEE, 2019: 1042 - 1048.
[20] ROMANENKO I, BILOHUB O. Increasing the efficiency of the operating cycle of a high-pressure fuel gear pump by using a jet pump as a booster stage[J]. Aerospace Technic and Technology, 2023(2): 38 - 45.
[21] 杨胜清, 冀宏, 李晨, 等. 高速运行齿轮泵的吸油空化与抑制[J]. 液压与气动, 2024, 48(8):18 - 28.
YANG Shengqing, JI Hong, LI Chen, et al. Suction cavitation andsuppression of high-speed gear pump[J]. Chinese Hydraulics & Pneumatics, 2024, 48(8):18 - 28. (in Chinese)
[22] 李小平, 冀宏, 张继铭, 等.气隙非浸油式电机叶片泵的主泵吸油配流设计[J].农业工程学报, 2016, 32(10):54 - 59.
LI Xiaoping, JI Hong, ZHANG Jiming, et al. Design of suction flow distributor of main pump in non-oil-immersed air gap type hydraulic electro-motor pump[J]. Transactions of the CSAE, 2016, 32(10):54 - 59. (in Chinese)
[23] SUN Fei, JI Hong, YANG Shengqing, et al. Numerical investigation on pairing solutions of non-positive displacement pumps and internal gear pump for high-speed design[J]. Fluids, 2023, 8(6): 178.
[24] VACCA A, FRANZONI G. Hydraulic fluid power: fundamentals, applications, and circuit design[M]. Hoboken: John Wiley & Sons, 2021.
[25] STRYCZEK J, ANTONIAK P, JAKHNO O, et al. Visualization research of the flow processes in the outlet chamber-outlet bridge-inlet chamber zone of the gear pumps[J]. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 2015, 15(1): 95 - 108.

(上接第 562 页)

[23] 韩建友. 高等机构学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
[24] 韩建友, 杨通, 于靖军. 高等机构学[M]. 2 版. 北京: 机械工业出版社, 2015.
[25] CUI Lei, DAI J S. Posture, workspace, and manipulability of the metamorphic multifingered hand with an articulated palm [J]. Journal of Mechanisms and Robotics-Transactions of the ASME, 2011, 3(2): 021001.
[26] WEI Guowu, DAI J S. A spatial eight-bar linkage and its association with the deployable platonic mechanisms[J]. Journal of Mechanisms and Robotics-Transactions of the ASME, 2014, 6(2): 021010.
[27] 钱卫香. 具有二阶密切直线导路机构最优运动设计[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2013(7): 82 - 85.
QIAN Weixiang. Optimal kinematic design of guidance mechanism with second-order osculating straight line[J]. Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique, 2013(7): 82 - 85. (in Chinese)
[28] 李琦, 李华英. 平面四杆直线机构连杆曲线的直线近似度研究[J]. 轻工机械, 2003(2): 39 - 41.
LI Qi, LI Huaying. Study the approximate extent between the curve and the linear in planar linkage mechanisms[J]. Light Industry Machinery, 2003(2): 39 - 41. (in Chinese)
[29] SONG S M, WALDRON K J, 刘勇, 等. 行走的机器——六足机器人[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2017.
[30] LI Shujun, DAI J S. Structure synthesis of single-driven metamorphic mechanisms based on the augmented Assur groups[J]. Journal of Mechanisms and Robotics-Transactions of the ASME, 2012, 4(3): 031004.
[31] ZHANG Ketao, DAI J S. Screw-system-variation enabled reconfiguration of the Bennett plano-spherical hybrid linkage and its evolved parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Design, 2015, 137(6): 062303.