doi:10.6041/j.issn.1000-1298.2025.01.047

2 - PRU - PRRPa 并联机构运动学分析与性能优化

张伟中[1,2]　冯邵江[3]　袁鑫宏[2]　孙　鹏[3]　杨　超[4]　鹿业波[4]

(1. 浙江理工大学机械工程学院, 杭州 310018; 2. 浙江机电职业技术大学自动化学院, 杭州 310053;
3. 浙江工业大学机械工程学院, 杭州 310032; 4. 嘉兴大学机械工程学院, 嘉兴 314001)

摘要: 两转一移三自由度并联机构在五轴混联加工装备上应用广泛。受到具有优异性能的商用 Exechon 并联机构设计的启发,本文提出了一种具有平行四边形子闭环结构分支的 2 - PRU - PRRPa 并联机构。采用螺旋理论分析自由度,求解得到该机构具有 2 个转动和 1 个移动自由度。基于闭环矢量法建立了 2 - PRU - PRRPa 并联机构运动学模型,建立驱动关节输入与动平台末端输出之间的映射关系。考虑驱动行程以及奇异位形,采用搜索法对 2 - PRU - PRRPa 并联机构工作空间进行求解。对并联机构运动学方程进行微分得到了机构速度方程,并且基于速度雅可比矩阵分析机构输入、输出与混合奇异位型。根据运动/力传递指标对机构性能进行评价,得到了机构传递性能分布图谱。以优质传递空间优化为目标,基于空间模型法对 2 - PRU - PRRPa 并联机构进行尺度综合。研究结果对五轴混联加工装备研制具有参考价值。

关键词: 并联机构; 运动学分析; 性能优化; 尺度综合

中图分类号: TH122　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1000-1298(2025)01-0497-10　　**OSID**:

Kinematic Analysis and Optimization Design of 2 - PRU - PRRPa Parallel Mechanism

ZHANG Weizhong[1,2]　FENG Shaojiang[3]　YUAN Xinhong[2]　SUN Peng[3]　YANG Chao[4]　LU Yebo[4]

(1. *School of Mechanical Engineering*, *Zhejiang Sci-Tech University*, *Hangzhou* 310018, *China*
2. *School of Automation*, *Zhejiang Polytechnic University of Mechanical and Electrical Engineering*, *Hangzhou* 310053, *China*
3. *School of Mechanical Engineering*, *Zhejiang University of Technology*, *Hangzhou* 310032, *China*
4. *School of Mechanical and Electrical Engineering*, *Jiaxing University*, *Jiaxing* 314001, *China*)

Abstract: In view of the extensive research and application status of the two-rotation-one-translation three-DOF (degrees of freedom) parallel mechanism in five-axis hybrid machining equipment, and inspired by the excellent performance design of the commercial Exechon parallel manipulator, a 2 - PRU - PRRPa parallel manipulator with a parallelogram sub-loop structure in its branches was proposed. Firstly, using screw theory for the analysis of the DOF, it was determined that the mechanism possessed two rotational and one translational degrees of freedom. Secondly, based on the closed-loop vector method, the inverse kinematics analysis of the mechanism was carried out, establishing the mapping relationship between the input of the driving joint and the output of the moving platform's end. Thirdly, considering the drive range and singular configurations, the workspace of the 2 - PRU - PRRPa parallel mechanism was computed by using a search method. Subsequently, by differentiating the kinematic equations of the parallel mechanism, the velocity equations were derived. Additionally, based on the velocity Jacobian matrix, the input, output, and mixture singular configurations of the manipulator were analyzed. Furthermore, the mechanism's performance was evaluated based on motion/force transmission indices, resulting in a transmission performance distribution map. Aiming for an optimal transmission space, the 2 - PRU - PRRPa parallel manipulator was optimized by using spatial modeling methods. The kinematic analysis and performance optimization of the 2 - PRU - PRRPa parallel manipulator offered critical insights for the advancement of five-axis hybrid machining systems.

Key words: parallel mechanism; kinematics analysis; performance optimize; dimensional synthesis

收稿日期: 2024 - 07 - 31　修回日期: 2024 - 09 - 10

基金项目: 国家自然科学基金项目(52105037)、浙江省自然科学基金项目(ZCLTGY24E0502)和浙江机电职业技术大学科教融合项目(A027121103、A027122203)

作者简介: 张伟中(1978—),男,博士生,浙江机电职业技术大学教授,主要从事并联机器人研究,E-mail: zhangweizhong@zime.edu.cn

通信作者: 杨超(1982—),男,副教授,博士,主要从事并联机器人研究,E-mail: yangchaox@163.com

0 引言

Exechon 混联机床已被成功商用,其具有并联拓扑结构简单、各支链被动关节数目少以及刚度和动力学性能优异等优点[1-2],为精密机械加工,尤其是为大型航空结构件外壳曲面加工提供了一种新的解决途径[3-4]。但因其受专利保护,价格较为昂贵,设计性能与 Exechon 机床性能相仿、具有自主产权的"类 Exechon"混联机床有重要意义[5-7]。

以机构拓扑学理论分析,Exechon 混联机床由拓扑 2-UPR-SPR 并联机构和末端二自由度 RR 串联头组成[8]。当前,针对 Exechon 混联机床研究主要集中在被用于主定位模块的 2-UPR-SPR 并联拓扑构型,LÓPEZ-CUSTODIO 等[9]建立了考虑关节偏移量情况下的 Exechon 并联模块运动学方程,王飞博等[10]基于运动/力传递性能指标对 2-UPR-SPR 并联机构进行了性能优化设计。受 UPR-SPR 并联拓扑构型优异的性能启发,又因该机构为内副驱动,即机构在运动过程中,P 副导轨也会随之发生位置改变,会造成运动质量大。为解决该问题,在保证机构自由度不变情况下,学者开展了类 Exechon 并联机构研究。文献[11-12]提出了五自由度混联机床 TriMule 并联机构(R(2-RPS-RP)-UPS 并联机构),并与 Exechon 并联机构性能分析对比,文献[13-14]利用螺旋理论对 2R1T 类并联机构进行构型设计,提出了 T3 机构(2-PUR-PRU 并联机构)并设计制造了五轴混联机床,文献[15-16]受 Exechon 启发基于可重构概念设计提出了两种类 Exechon 并联机构——Exe-Ⅰ和 Exe-Ⅱ(2-UPR-RPS 并联机构),并对其进行了运动学性能分析。平行四边形闭环支链并联机构在刚度、转动性能等均有优势,已在很多场合得到广泛应用,过约束子闭环平行四边形作为 2R1T 并联机构 1 条支链不仅能提升机构刚度性能、转动性能,还可提高整个系统运动学性能特性[17-18]。SAN 等[19]提出一种含双平行四边闭环支链的 SCARA 并联机构,该机构具有工作空间较大、刚度高和承载力强等特点。ZHANG 等[20]对一种具有平行四边形闭环支链的 3-CR(Pa)(Pa)R 并联机构进行了运动学分析和工作空间求解,梁栋等[21]分别用图解法和蒙特卡罗法研究了一种具有平行四边形连杆机构的三自由度平移并联机构工作空间。

依据 Exechon 并联拓扑结构优异特性,本文提出一种 3 自由度的 2-PRU-PRRPa 并联机构,其驱动器均置于机架导轨上,减小机构运动部分质量。采用螺旋理论分析机构自由度基础上,开展机构运动学分析与性能优化,以期为工程应用提供理论依据。

1 机构描述与坐标系建立

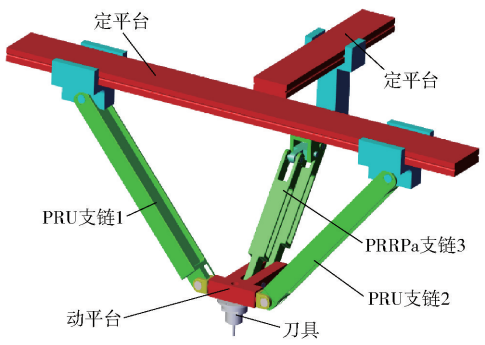
图 1a 为 2-PRU-PRRPa 并联机构三维模型,由动平台、定平台以及连接它们的 3 条分支组成,其中分支 1、2 表示 PRU 支链,分支 3 表示 PRRPa 闭环平行四边形支链,整个机构关于分支 3 呈对称分布。分支 PRU 中,定平台与 P 副(移动副)相连,动平台与 U 副(虎克副)相连,两条分支中 P 副与 R 副(转动副)轴线垂直,动平台两侧 U 副转动轴线互相平行,因此在运动过程中,P 副一直处于 R 副和 U 副轴线垂直平面内。在 PRRPa 分支中,定平台与 P 副相连,P 副轴线平行于 PRU 分支 1、2 中两个 R 副转动轴线;4 个 R 副轴线方向与 P 副轴线始终垂直,在连接 4 根连杆后构成闭环平形四边形机构,平行四边形中一条短边通过 2 个 R 副与 P 副连接,另一条短边为动平台一部分。

图 1b 为 2-PRU-PRRPa 并联机构的定/动坐标系。机构定坐标系 $Oxyz$ 建立在定平台上,定坐标系中心点 O 位于 B_1B_2 中点,x、y 轴方向分别与 OB_3、OB_2 方向相同,z 轴方向垂直向下;在机构动平台上建立动坐标系 $ouvw$,其中坐标系原点 o 位于 A_1A_2 连线中点,u、v 轴方向分别与 oA_3、oA_2 方向相同,w 轴方向垂直向下;$\triangle A_1A_2A_3$、$\triangle B_1B_2B_3$ 为等腰直角三角形,且两三角形相似,其结构参数定义为 $l_{A_1B_1}=l_{A_2B_2}=L$、$l_{oA_1}=l_{oA_2}=d$、$l_{CC'}=l_{oA_3}=h$。机构 PRRPa 分支中 B_3E 长度为 b,ED 长度为 f,CD 长度为 c,l_{CA_3} 长度为 K。A_i、$B_i(i=1,2,3)$ 分别为分支 1、2、3 上各个运动副中心点。图 1c 为 2-PRU-PRRPa 并联机构验证原理样机实物图。

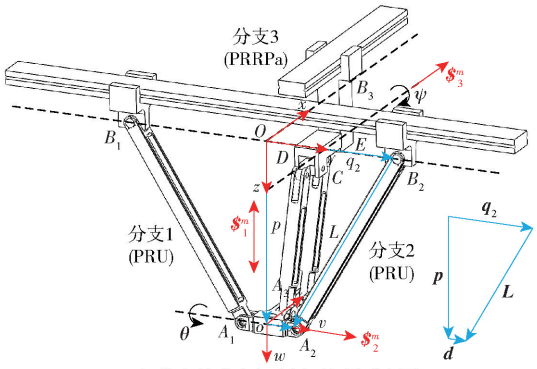
2 自由度分析

螺旋理论在自由度分析中被广泛应用,刚体瞬时运动的螺旋称为运动螺旋;刚体所受约束的螺旋称为约束螺旋[22]。$\$_{ij}$ 表示机构中第 i 个分支的第 j 个运动副所对应的运动螺旋,$\$_{ij}^{r}$ 表示机构中第 i 分支施加给动平台的第 j 个约束螺旋。图 2 为初始位型下机构各分支对应的运动螺旋与约束螺旋以及动平台运动螺旋。且为便于运动学分析,在支链末端运动不变的前提下将 PRRPa 分支中平行四边形支链等效为 RR 支链。

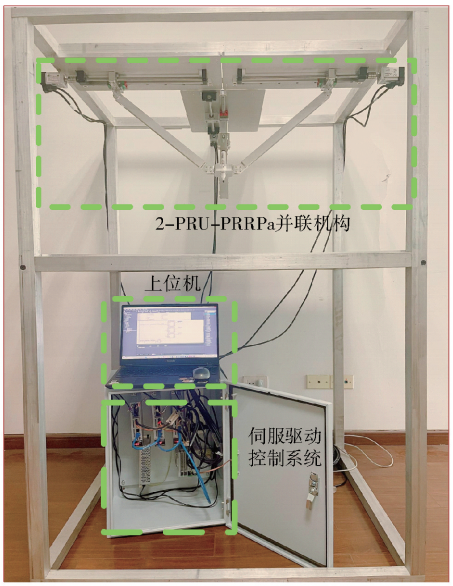
定义 $A_i(i=1,2,3)$ 在坐标系 $Oxyz$ 位置坐标分别表示为 $(x_{A_1},y_{A_1},z_{A_1})$、$(x_{A_2},y_{A_2},z_{A_2})$ 及 $(x_{A_3},y_{A_3},$



(a) 机构三维模型



(b) 机构坐标系建立及闭环矢量示意图



(c) 机构验证原理样机

图 1　2－PRU－PRRPa 并联机构

Fig. 1　2－PRU－PRRPa PM

z_{A_3})，x、y、z 均包含正负号。点 B_1 坐标为(0，$-q_1$，0)、点 B_2 坐标为($0,q_2,0$)、点 B_3 坐标为($q_3,0,0$)。

如图 3 所示，分支 1 运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{11}=(0 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad 1 \quad 0) \\ \$_{12}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad 0 \quad q_1) \\ \$_{13}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad z_{A_1} \quad -y_{A_1}) \\ \$_{14}=(0 \quad c_\psi \quad s_\psi;\quad y_{A_1}s_\psi-z_{A_1}c_\psi \quad -x_{A_1}s_\psi \quad x_{A_1}c_\psi) \end{cases} \tag{1}$$

式中，c 表示余弦函数；s 表示正弦函数。

对式(1)求反螺旋可得约束螺旋系为

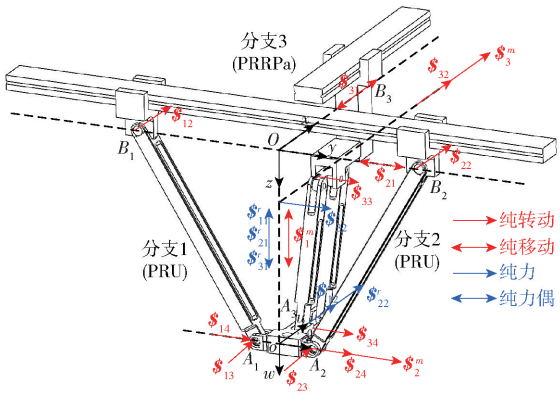


图 2　机构初始位型下运动螺旋与约束螺旋示意图

Fig. 2　Initial position configuration of PM of kinematic strew and constraint strew

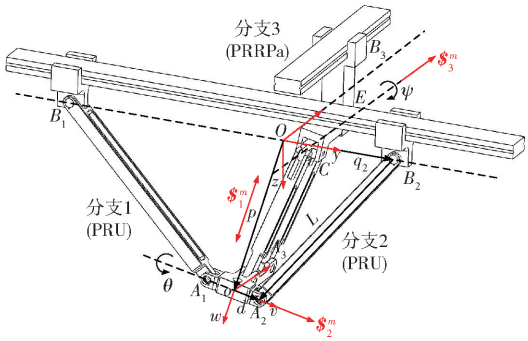


图 3　绕 u 轴、x 轴发生连续转动后的机构位形

Fig. 3　Configuration of PM after continuous rotation around u-axis and x-axis

$$\begin{cases} \$^r_{11}=(0 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad -s_\psi \quad c_\psi) \\ \$^r_{12}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad (z_{A_1}c_\psi-y_{A_1}s_\psi)/c_\psi \quad 0) \end{cases} \tag{2}$$

分支 2 运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{21}=(0 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad 1 \quad 0) \\ \$_{22}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad 0 \quad -q_2) \\ \$_{23}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad z_{A_2} \quad -y_{A_2}) \\ \$_{24}=(0 \quad c_\psi \quad s_\psi;\quad y_{A_2}s_\psi-z_{A_2}c_\psi \quad -x_{A_2}s_\psi \quad x_{A_2}c_\psi) \end{cases} \tag{3}$$

对式(3)求反螺旋可得约束螺旋系为

$$\begin{cases} \$^r_{21}=(0 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad -s_\psi \quad c_\psi) \\ \$^r_{22}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad (z_{A_2}c_\psi-y_{A_2}s_\psi)/c_\psi \quad 0) \end{cases} \tag{4}$$

分支 3 运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{31}=(0 \quad 0 \quad 0;\quad 1 \quad 0 \quad 0) \\ \$_{32}=(1 \quad 0 \quad 0;\quad 0 \quad b \quad 0) \\ \$_{33}=(0 \quad c_\psi \quad s_\psi;\quad -c_\psi(b+c) \quad -s_\psi(q_3-f) \quad c_\psi(q_3-f)) \\ \$_{34}=(0 \quad c_\psi \quad s_\psi;\quad y_{A_3}s_\psi-z_{A_3}c_\psi \quad -x_{A_3}s_\psi \quad x_{A_3}c_\psi) \end{cases} \tag{5}$$

对式(5)求反螺旋可得约束螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{31}^{r}=(0\quad 0\quad 0;\quad 0\quad -s_\psi\quad c_\psi) \\ \$_{32}^{r}=(0\quad c_\psi\quad s_\psi;\quad -bc_\psi\quad 0\quad 0) \end{cases} \tag{6}$$

机构约束螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{11}^{r}=(0\quad 0\quad 0;\quad 0\quad -s_\psi\quad c_\psi) \\ \$_{12}^{r}=(1\quad 0\quad 0;\quad 0\quad (z_{A_1}c_\psi-y_{A_1}s_\psi)/c_\psi\quad 0) \\ \$_{21}^{r}=(0\quad 0\quad 0;\quad 0\quad -s_\psi\quad c_\psi) \\ \$_{22}^{r}=(1\quad 0\quad 0;\quad 0\quad (z_{A_2}c_\psi-y_{A_2}s_\psi)/c_\psi\quad 0) \\ \$_{31}^{r}=(0\quad 0\quad 0;\quad 0\quad -s_\psi\quad c_\psi) \\ \$_{32}^{r}=(0\quad c_\psi\quad s_\psi;\quad -bc_\psi\quad 0\quad 0) \end{cases} \tag{7}$$

对式(7)求解互易积,机构动平台运动螺旋系为

$$\begin{cases} \$_{1}^{m}=(0\quad 0\quad 0;\quad 0\quad -s_\psi\quad c_\psi) \\ \$_{2}^{m}=(1\quad 0\quad 0;\quad 0\quad b\quad 0) \\ \$_{3}^{m}=(0\quad c_\psi\quad s_\psi;\quad y_{A_1}s_\psi-z_{A_1}c_\psi\quad 0\quad 0) \end{cases} \tag{8}$$

式(8)表示机构在一般位形下具有 3 个自由度,分别为沿着动平台法线方向移动 $\$_1^m$,绕 *ED* 轴转动 $\$_3^m$,绕 v 轴转动 $\$_2^m$。

2 – PRU – PRRPa 并联机构具有 2 个转动和 1 个移动的 3 个自由度,与 Exechon 混联机床并联模块 2 – UPR – SPR 机构一致。

3 位置分析

选取关节 B_1、B_2、B_3为机构驱动关节,为了给定机构动平台输出参数(ψ,θ,z_0),求解机构输入驱动关节参数(q_1,q_2,q_3)的过程,建立驱动关节参数与输出参数间的映射,这一过程为位置逆解。该机构具有 3 个自由度,需要引入 3 个独立参数描述动平台位姿,由于机构各分支始终位于某一平面内,位置逆解可转换为平面几何问题。在 2 – PRU – PRRPa 并联机构中,动坐标系 *ouvw* 相对于定坐标系 *Oxyz* 的转换矩阵可表示为

$$\boldsymbol{R}_A^B=\boldsymbol{R}_{Xu}(\psi,\theta)=\boldsymbol{R}_X(\psi)\boldsymbol{R}_u(\theta)=\begin{bmatrix} c_\theta & s_\theta s_\psi & s_\theta c_\psi \\ 0 & c_\psi & -s_\psi \\ -s_\theta & c_\theta s_\psi & c_\theta c_\psi \end{bmatrix} \tag{9}$$

如图 1b 所示,动平台上点 $A_i(i=1,2,3)$在动坐标系、定坐标系中位置矢量分别用 $\boldsymbol{l}_{oA_i}$、$\boldsymbol{l}_{OA_i}$表示,则有

$$\begin{cases} \boldsymbol{l}_{oA_1}=[0\quad -d\quad 0]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{l}_{oA_2}=[0\quad d\quad 0]^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{l}_{oA_3}=[h\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{10}$$

通过转换矩阵 $\boldsymbol{R}_A^B$ 可将动坐标系中矢量 $\boldsymbol{l}_{oA_i}$转换到定坐标系中,得 $\boldsymbol{l}_{OA_i}$为

$$\begin{cases} \boldsymbol{l}_{OA_1}=\boldsymbol{R}_A^B\boldsymbol{l}_{oA_1}+\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{l}_{OA_2}=\boldsymbol{R}_A^B\boldsymbol{l}_{oA_2}+\boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{l}_{OA_3}=\boldsymbol{R}_A^B\boldsymbol{l}_{oA_3}+\boldsymbol{p} \end{cases} \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{p}=[x_0\quad y_0\quad z_0]^{\mathrm{T}}$

式中 $\boldsymbol{p}$——动平台坐标系中心点 o 在定坐标系中的位置矢量

又由一般位形下机构运动螺旋系可知

$$\begin{cases} x_0\equiv 0 \\ y_0=(b-z_0)t_\psi \\ z_0=z_0 \end{cases} \tag{12}$$

式中 t 表示正切函数。

令动平台上点 $A_i(i=1,2,3)$在定坐标系下坐标为$(x_{A_i},y_{A_i},z_{A_i})(i=1,2,3)$,则由式(9)~(12)可得

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{A_1}=-ds_\psi s_\theta \\ y_{A_1}=(b-z_0)t_\psi-dc_\psi \\ z_{A_1}=z_0-ds_\psi s_\theta \end{cases} \\ \begin{cases} x_{A_2}=ds_\psi s_\theta \\ y_{A_2}=(b-z_0)t_\psi+dc_\psi \\ z_{A_2}=z_0+ds_\psi s_\theta \end{cases} \\ \begin{cases} x_{A_3}=hc_\theta \\ y_{A_3}=(b-z_0)t_\psi \\ z_{A_3}=z_0-hs_\theta \end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

又已知各支链杆长满足:$l_{B_iA_i}=l_{OA_i}-l_{OB_i}(i=1,2)$、$l_{CA_3}=l_{OA_3}-l_{OC}$,可得

$$\begin{cases} l_{B_1A_1}=x_{A_1}^2+(y_{A_1}+q_1)^2+z_{A_1}^2 \\ l_{B_2A_2}=x_{A_2}^2+(y_{A_2}-q_2)^2+z_{A_2}^2 \\ l_{CA_3}=x_{A_3}^2-(q_3-f)^2+y_{A_3}^2+(z_{A_3}-b-c)^2 \end{cases} \tag{14}$$

其中 $l_{B_1A_1}=l_{B_2A_2}=L\qquad l_{CA_3}=K$

联立式(13)、(14),并经模型验证,机构位置逆解为

$$\begin{cases} q_1=dc_\psi-(b-z)t_\psi+\sqrt{L^2-z_0^2-d^2c_\theta^2s_\psi^2-d^2s_\psi^2s_\theta^2+2dzc_\theta s_\psi} \\ q_2=dc_\psi+(b-z)t_\psi+\sqrt{L^2-z_0^2-d^2c_\theta^2s_\psi^2-d^2s_\psi^2s_\theta^2-2dzc_\theta s_\psi} \\ q_3=f+\sqrt{2bz-2bc+2cz-b^2t_\psi^2-h^2s_\theta^2-z^2t_\psi^2+K^2-b^2-c^2-z^2-2bhs_\theta-2chs_\theta+2hzs_\theta+2bzt_\psi^2}+hc_\theta \end{cases} \tag{15}$$

4　工作空间求解

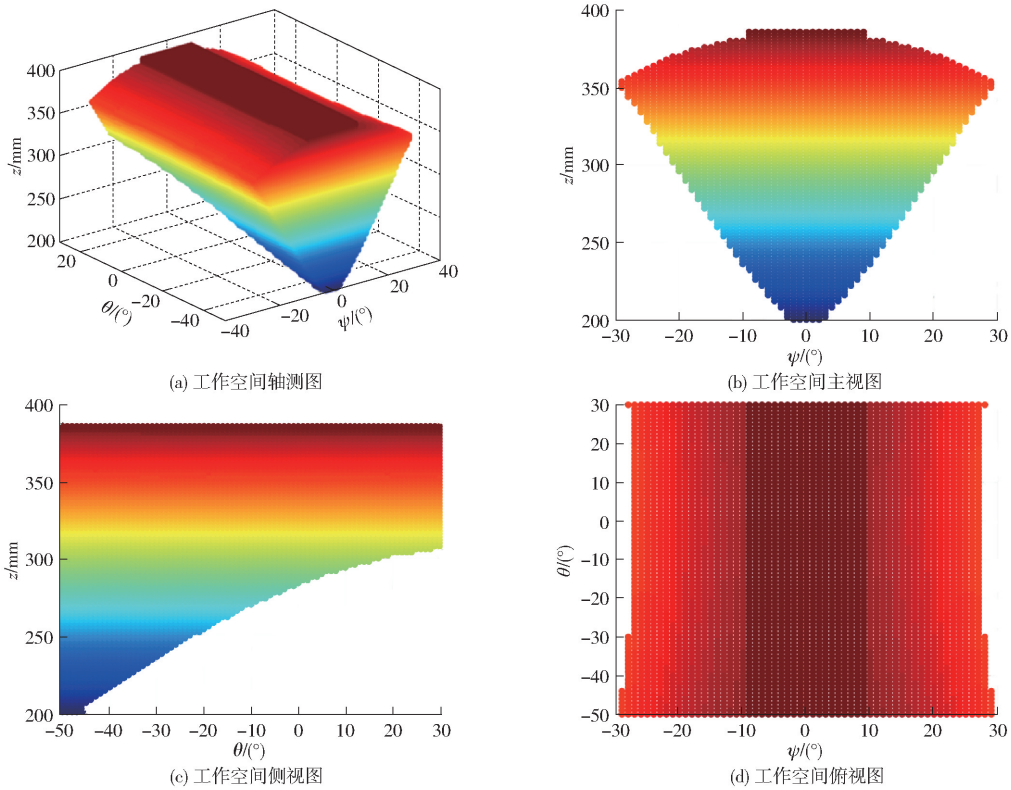
并联机构工作空间一般较小，由于多分支约束复杂性，工作空间形状无法直观得到[23-24]。综合考虑实际工程应用过程中，关节转动范围、驱动行程、杆件干涉等约束关系，采用搜索法确定机构工作空间[25]。

机构尺度参数如表 1 所示，限定驱动行程 $q_{i\min} \leqslant q_i \leqslant q_{i\max}$，PRU 和 PRRPa 分支行程为 $q_{1\min} = q_{2\min} = q_{3\min} = 0$ mm，$q_{3\max} = 320$ mm；动平台 3 个自由度方向运动范围为 106 mm $\leqslant z \leqslant$ 387 mm，$-90° \leqslant \psi \leqslant 90°$，$-50° \leqslant \theta \leqslant 30°$，雅可比矩阵行列式 $\det(\boldsymbol{J}) \neq 0$。仿真计算对满足条件的工作点进行搜索计算并记录，可得到所有满足条件工作点集合，即机构整体工作空间，图 4a 为机构执行器末端工作空间图谱。

表 1　机构尺度参数

Tab. 1　Dimension parameters of PM　　mm

参数	数值	参数	数值
L	400	b	80
K	240	f	80
d	50	c	30
h	90	z	130



(a) 工作空间轴测图　(b) 工作空间主视图

(c) 工作空间侧视图　(d) 工作空间俯视图

图 4　2－PRU－PRRPa 并联机构的工作空间

Fig. 4　Workspace of 2－PRU－PRRPa PM

图 4b、4c 为该机构工作空间关于 x 轴、z 轴所在平面对称；图 4d 中机构关于 v 轴正方向的旋转角 θ 随机构沿 z 轴方向高度的增大而增加，机构关于 x 轴旋转角 ψ 随机构沿 z 轴方向高度增大呈先增加后减小趋势。

由机构自由度分析及可达工作空间可得，机构动平台原点在基坐标 x 轴方向位移始终为零，即动平台 v 轴始终在 y 轴、z 轴所在平面内运动，且绕 v 轴转角取值范围较大，由上述特性可见，该机构适用存在加工空间限制的一般曲面结构件内外壁的加工。

可得机构关于 x 轴转角 ψ 和关于 v 轴转角 θ 的活动范围随 z 变化的特性是由两个 PRU 分支对动平台的约束引起的，故在实际应用中可考虑通过在机构下方加移动加工台或是在动平台中心处增加串联机构等方式来弥补这一不足。

5　奇异性分析

基于各驱动关节和被动关节雅可比矩阵分析机构的奇异性[26]。对式(15)两边求解全微分，可得 2－PRU－PRRPa并联机构速度方程为

$$\boldsymbol{J}_a [\dot{q}_1 \quad \dot{q}_2 \quad \dot{q}_3]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}_p [\dot{z} \quad \dot{\psi} \quad \dot{\theta}]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

式中　$\boldsymbol{J}_a$——驱动关节雅可比矩阵

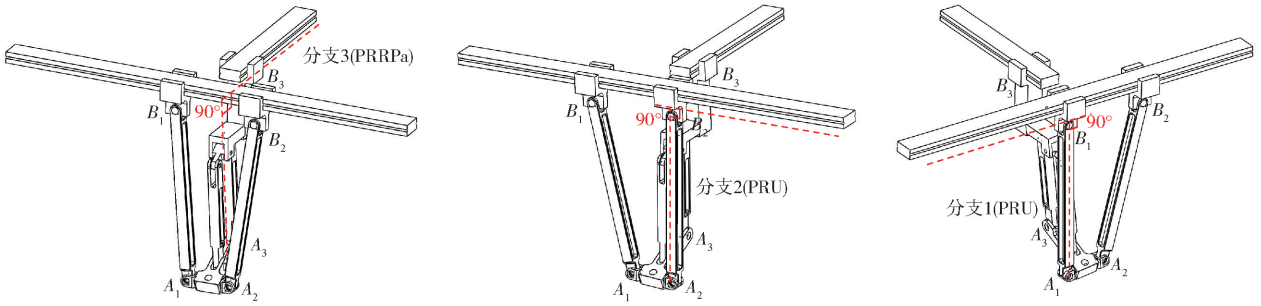
$\boldsymbol{J}_p$——驱动关节都锁定后被动关节雅可比矩阵

$\dot{q}_1$、$\dot{q}_2$、$\dot{q}_3$——各驱动关节速度

$\dot{z}$、$\dot{\psi}$、$\dot{\theta}$——动平台各自由度方向上速度

当 $|\boldsymbol{J}_a| \neq 0$，$|\boldsymbol{J}_p| = 0$ 时，机构发生输入传递奇

异,即机构在该位形下,驱动件有输入,但机构动平台不能在某些方向上运动,此时机构失去若干自由度,使得动平台在失去自由度方向上出现运动不可控情况。图 5 为机构输入传递奇异位形。



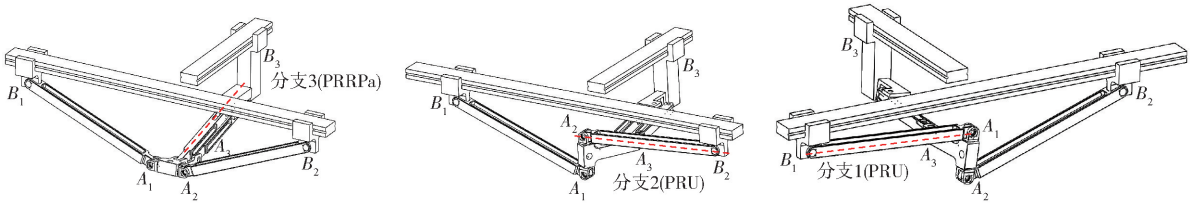
(a) 奇异位形1 (b) 奇异位形2 (c) 奇异位形3

图 5 2 - PRU - PRRPa 机构的输入传递奇异情况

Fig. 5 Input transmission singularity of 2 - PRU - PRRPa PM

当$|\boldsymbol{J}_a|=0$,$|\boldsymbol{J}_p|\neq 0$ 时,机构发生输出传递奇异,即机构在该位形下,驱动件没有输入,但机构动平台仍能在某些方向上运动,此时机构获得额外的自由度,在该自由度方向上的刚度和承载能力大大降低。图 6 为机构输出传递奇异位形。

当$|\boldsymbol{J}_a|=0$,$|\boldsymbol{J}_p|=0$ 时,机构处于混合传递奇异,机构出现混合奇异意味着其同时满足逆解奇异和正解奇异,由上述两种奇异位形可知,不存在同时满足情况,故此机构不存在混合奇异。



(a) 奇异位形1 (b) 奇异位形2 (c) 奇异位形3

图 6 2 - PRU - PRRPa 机构的输出传递奇异情况

Fig. 6 Output transmission singularity of 2 - PRU - PRRPa PM

6 性能分析与优化

由于机构设计尺寸参数的合理性会直接影响机构整体性能,因此,性能评价是设计并联机构几何参数不可或缺的组成部分[27-28]。由于运动/力传递和约束特性反映并联机构本质特性,而机构性能分析是优化设计基础[29],为此,采用局部传递指标(Local transmission index, LTI)来衡量机构运动性能。

6.1 局部传递性能指标

在运动/力传递性能指标中,输入传递性能和输出传递性能表达式为

$$\lambda_i=\frac{|\$_{A_i}\circ\$_{T_i}|}{|\$_{A_i}\circ\$_{T_i}|_{\max}} \tag{17}$$

$$\eta_i=\frac{|\$_{O_i}\circ\$_{T_i}|}{|\$_{O_i}\circ\$_{T_i}|_{\max}} \tag{18}$$

式中 λ_i、η_i——分支 i 输入传递指标和输出传递指标

$\$_{A_i}$——分支 i 输入运动螺旋

$\$_{O_i}$——分支 i 输出运动螺旋

$\$_{T_i}$——分支 i 传递力螺旋

λ_i 和 η_i 均为 0 ~ 1,且值越接近于 1,机构运动/力传递性能越优异,将 LTI 定义为

$$\Gamma=\min\{\lambda_i,\eta_i(i=1,2,\cdots,n)\} \tag{19}$$

因此 Γ 为 0 ~ 1,是一个与坐标系无关的无量纲指标,其值越接近 1,表示能量从输入到输出的传递效率越高。将各支链中输入运动旋量所对应运动副锁住,可得出各支链传递力螺旋系 $\$_{T_i}(i=1,2,3)$ 为

$$\begin{cases}\$_{T_1}=(0 \quad (q_1+y_{A_1}) \quad z_{A_1};\ -q_1z_{A_1} \quad (x_{A_1}q_1s_\psi-z_{A_1}c_\psi+y_{A_1}s_\psi)/c_\psi \quad 0)\\ \$_{T_2}=(0 \quad -(q_2-y_{A_2}) \quad z_{A_2};\ q_2z_{A_2} \quad -(x_{A_2}z_{A_2}c_\psi+q_2s_\psi-y_{A_2}s_\psi)/c_\psi \quad 0)\\ \$_{T_3}=(x_{A3}-q_3 \quad y_{A_3} \quad z_{A_3};\ 0 \quad -x_{A_3}z_{A_3}-z_{A_3}(q_3-x_{A_3}) \quad x_{A_3}y_{A_3}+y_{A_3}(q_3-x_{A_3}))\end{cases} \tag{20}$$

2 - PRU - PRR(Pa)并联机构分析时,将上述求得的分支输入运动螺旋、输出运动螺旋和传递力螺旋代入式(17) ~ (20),可得到机构 LTI 指标,如图 7 所示,其中空白部分为机构不能达到区域,机构性能

分布完全关于 ψ 角对称，即该机构绕 ED 轴正反转动运动/力传递性能相同，绕动平台 v 轴正反转动时运动/力传递性能存在较大不同，在 $\theta\approx30°$时机构达到奇异位形，当 θ 为负值时机构姿态未出现奇异位形，当 $\psi=0°$，$\theta\approx-5°$时整体运动/力传递性能最佳，随着姿态空间的扩大而递减。

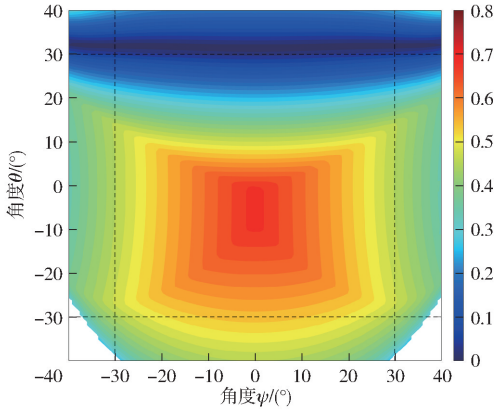


图 7　2－PRU－PRRPa 并联机构的局部传递性能分布图谱

Fig. 7　LTI distribution map of 2－PRU－PRRPa PM

6.2　全域传递指标

由于 LTI 指标只能反映机构在某个位形下的运动/力传递性能，不能对机构整体性能进行分析评价，为弥补 LTI 指标不足，引入全域传递性能指标[30]。根据传递角[31-32]的定义，将运动过程中 $\Gamma>0.7$ 的区域定义为优质传递空间（Good transmission workspace，GTW）。全域优质运动/力传递空间比指标可表示为

$$\sigma=\frac{\int_{\psi}\int_{\theta}\Gamma\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi}{\int_{\psi}\int_{\theta}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\psi} \tag{21}$$

式中，$\theta\in[-30°,30°]$，$\psi\in[-30°,30°]$，可以看出：该指标为机构 Γ 在机构姿态工作空间内平均值，显然 $\sigma\in[0,1]$，其值越接近 1，则表示在姿态工作空间优质运动/力传递空间占用比越大。从图 8 可以发现，2－PRU－PRRPa 并联机构在此尺寸参数下的优质运动/力传递空间占用比较小，为此，需要进一步优化。

6.3　尺度优化设计

将 σ 作为 2－PRU－PRRPa 并联机构运动学优化设计性能指标，且 σ 与机构各尺度参数有关，为确保在优化过程中机构转动范围保持一致，根据局部性能传递图谱和机构可达空间对机构绕 x 轴和绕 v 轴旋转角进行限制，避免在优化过程中可能出现的奇异位型或超过关节限制，将 ψ 和 θ 限定为：$\theta\in[-30°,30°]$，$\psi\in[-30°,30°]$。基于空间模型法[31]，δ_1、δ_2、δ_3 被定义为设计参数，$\delta_1=d$、$\delta_2=h$、

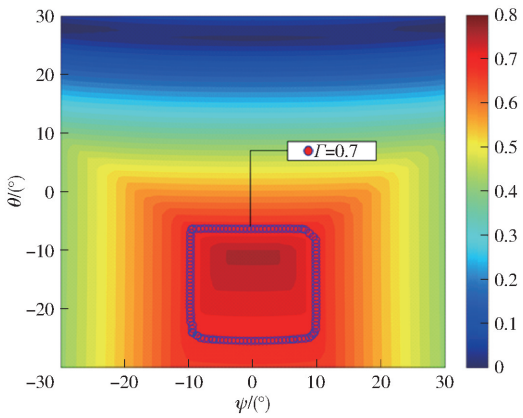


图 8　2－PRU－PRRPa 并联机构的全域传递性能分布图谱

Fig. 8　GTW distribution map of 2－PRU－PRRPa PM

$K=0.692\delta_4$、$f=b=0.334K$、$c=0.334$，$\delta_3=L$、$\delta_4=hL/d$、$z=0.667\min\{\delta_3,\delta_4\}$，且满足

$$\begin{cases}\delta_1\delta_4=\delta_2\delta_3\\ D=\dfrac{\delta_1+\delta_2+\delta_3}{3}\end{cases} \tag{22}$$

式中　D——标准化因子

无量纲参数可表示为

$$r_i=\frac{\delta_i}{D}\quad(i=1,2,3) \tag{23}$$

考虑到机构实际应用情况，3 个无量纲参数需满足

$$\begin{cases}0<r_1、r_2、r_3<3\\ r_1+r_2+r_3=3\\ r_1<r_3、r_2<r_3\end{cases} \tag{24}$$

根据式(24)可得如图 9 所示的参数设计空间，阴影面积表示所有尺度参数情况。图 9a 中三维空间参数(r_1,r_2,r_3)和图 9b 二维平面参数(s,t)之间关系为

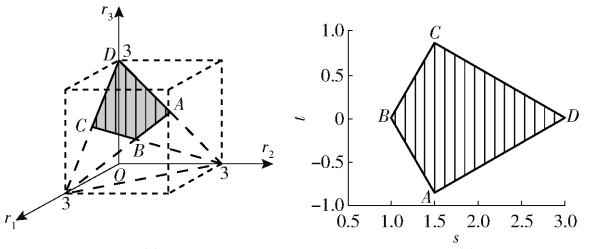
$$\begin{cases}r_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{s}{2}\\ r_2=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t-\dfrac{s}{2}\\ r_3=s\end{cases} \tag{25}$$

或

$$\begin{cases}s=r_3\\ t=\dfrac{r_1-r_2}{\sqrt{3}}\end{cases} \tag{26}$$

同时，2－PRU－PRRPa 并联机构尺度优化步骤为：

(1)确定优化区域。2－PRU－PRRPa 并联机构的 σ 值分布情况如图 10a 所示，为比较不同区域下机构的性能分布情况，定义 3 个优化设计区域，如图 10b 所示。其中，区域Ⅰ($\sigma\in[0.1,0.3)$)，性能较差；区域Ⅱ($\sigma\in[0.3,0.5)$)，性能中等；区域Ⅲ



(a) 三维视图 (b) 二维视图

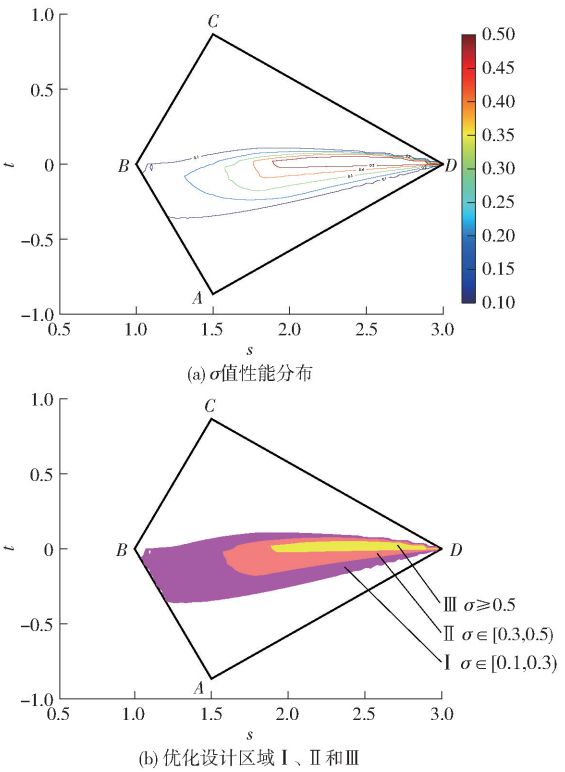
图 9 2 − PRU − PRRPa 并联机构的参数设计空间

Fig. 9 Parameter design space of 2 − PRU − PRRPa PM

$\sigma \geqslant 0.5$,性能较好。

(2)从每个优化设计区域中任意选取 3 组数据,共生成 9 组数据,如表 2 所示。考虑实际加工中存在制造误差,参数选取时应尽量远离优化区域边界。根据式(23)可得到无量纲参数(r_1,r_2,r_3)。根据式(26)可得到二维平面内 s 和 t。

(3)确定标准化因子 D 和尺寸参数 δ_1、δ_2、δ_3。根据机构所处的实际工况,令 $D = 100$ mm。以表 2 第 7 组数据为例,其中 $s = 2.08$,$t = 0.04$ s。因此,根据式(23)、(25)和标准化因子 D 可得 $\delta_1 = 49.46$ mm,$\delta_2 = 42.54$ mm,$\delta_3 = 208$ mm。



(a) σ值性能分布

(b) 优化设计区域Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ

图 10 2 − PRU − PRRPa 并联机构的 GTW 性能图谱

Fig. 10 GTW performance maps of 2 − PRU − PRRPa PM

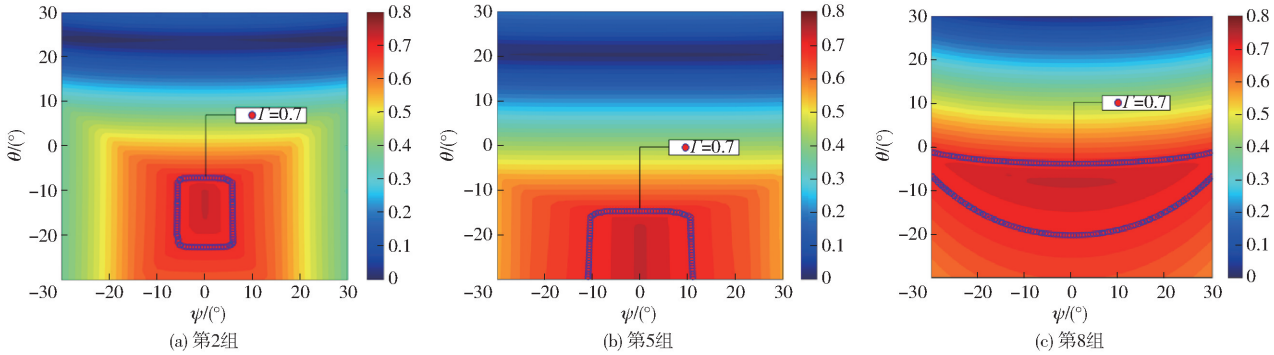
表 2 优化设计区域中的 GTW 结果

Tab. 2 Optimized GTW results in design area

优化设计区域	序号	设计参数								
		s	t	r_1	r_2	r_3	δ_1/mm	δ_2/mm	δ_3/mm	σ
Ⅰ	1	1.68	0.06	0.71	0.61	1.68	71.20	60.80	168	0.18
	2	1.46	−0.06	0.72	0.82	1.46	71.80	82.20	146	0.26
	3	1.56	−0.04	0.69	0.75	1.56	68.54	75.46	156	0.29
Ⅱ	4	2.26	−0.06	0.32	0.42	2.26	31.80	42.20	226	0.39
	5	1.80	−0.14	0.48	0.72	1.80	47.88	72.12	180	0.35
	6	2.50	−0.04	0.22	0.28	2.50	21.54	28.46	250	0.38
Ⅲ	7	2.08	0.04	0.49	0.43	2.08	49.46	42.54	208	0.50
	8	2.42	0.02	0.31	0.27	2.42	30.73	27.27	242	0.55
	9	2.94	0.00	0.03	0.03	2.94	3.00	3.00	294	0.56

(4)得到机构尺度参数后,检查是否满足实际使用情况。若满足,则优化步骤结束;反之,则需返回步骤(2)重新选取优化数据。

表 2 中的第 2、5、8 组数据对应的运动/力传递性能分布情况如图 11 所示。如图 11c 所示,第 8 组数据优质传递空间占比明显高于其余两组。因此,



(a) 第2组 (b) 第5组 (c) 第8组

图 11 不同尺寸参数下的运动/力传递性能对比情况

Fig. 11 Comparison of motion/force transmission performance of 2 − PRU − PRRPa PM under different size parameters

可将第 8 组数据作为运动学设计的参考结果。

7　结论

(1)提出了一种具有平行四边形子闭环结构分支的 2 - PUR - PRRPa 并联机构,其驱动器均置于机架导轨上,减小了机构运动部分质量。基于螺旋理论对机构自由度进行分析,得到 2 - PRU - PRRPa 并联机构具备输出 2 个转动和 1 个移动自由度能力。利用搜索法分析了机构工作空间,结果表明机构可适合研制曲面结构件内外壁的加工装备。

(2)通过运动学分析得到位置逆解方程,建立了机构速度雅可比矩阵,并以此探究了 2 - PRU - PRRPa 并联机构奇异位形,结果表明机构存在输入传递奇异、输出传递奇异和混合传递奇异。

(3)以优质运动/力传递工作空间占用比作为性能评价指标对 2 - PRU - PRRPa 并联机构进行尺度综合,确定了优化设计空间。在 $\sigma \geqslant 0.5$ 的优质区域优选尺寸参数设计样机,验证了机构具有工程应用的可行性,为开发“类 Exechon”混联机床提供了理论依据。

参　考　文　献

[1] LÓPEZ-CUSTODIO P C, FU R, DAI J S, et al. Compliance model of Exechon manipulators with an offset wrist[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 167:104558.

[2] KONG Xiangyu, WANG Liping, YU Guang, et al. Research on servo matching of a five axis hybrid machine tool[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2023,29:983 - 997.

[3] NAGAO K, FUJIKI N, TANAKA H, et al. Machining performance of robot-type machine tool consisted of parallel and serial links based on calibration of kinematics parameters[J]. International Journal of Automation Technology, 2021(5):611 - 620.

[4] BI Z M, JIN Yan. Kinematic modeling of Exechon parallel kinematic machine[J]. Robotics and Computer Integrated Manufacturing,2011,27(1):186 - 193.

[5] TANG Tengfei, LUO Haiwei, SONG Yaqing, et al. Chebyshev inclusion function based interval kinetostatic modeling and parameter sensitivity analysis for Exechon-like parallel kinematic machines with parameter uncertainties[J]. Mechanism and Machine Theory, 2021, 157:104209.

[6] 路曼,赵艳芹. 类 Exechon 并联模块的结构设计与刚度建模[J]. 农业机械学报,2016,47(3):367 - 372.
LU Man,ZHAO Yanqin. Structural design and stiffness modeling for Exe-variant parallel kinematic machine[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2016,47(3):367 - 372. (in Chinese)

[7] SHEN Nanyan, LIANG Geng, JING Lifei, et al. Improved stiffness modeling for an Exechon-like parallel kinematic machine (PKM) and its application[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2020,33(3):138 - 149.

[8] LI Yangmin, XU Qingsong. Modeling and performance evaluation of a flexure-based XY parallel micromanipulator[J]. Mechanism and Machine Theory,2009,44(12):2127 - 2152.

[9] LÓPEZ-CUSTODIO P C, FU R, DAI J S, et al. Kinematics and constraints of the Exechon robot accounting offsets due to errors in the base joint axes[J]. Journal of Mechanisms and Robotics: Transactions of the ASME, 2020,12(2):1 - 14.

[10] 王飞博,陈巧红,武传宇,等. 2 - UPR - SPR 并联机构尺度综合[J]. 机械工程学报,2015,51(21):24 - 32.
WANG Feibo, CHEN Qiaohong, WU Chuanyu, et al. Dimensional synthesis of a 2 - UPR - SPR parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2015,51(21):24 - 32. (in Chinese)

[11] HUANG Tian, DONG Chenglin, LIU Haitao, et al. Five-degree-of-freedom hybrid robot with rotational supports: US9943967[P]. 2018 - 04 - 17.

[12] 董成林,李锦涛,刘海涛,等. TriMule 与 Exechon 机器人的切向运动传递特性同性条件及运动学性能分析[J]. 机械工程学报, 2021, 57(15):23 - 32.
DONG Chenglin, LI Jintao, LIU Haitao, et al. Isotropy of tangential motion transmissibility and kinematic performance analysis of TriMule and Exechon robots[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(15):23 - 32. (in Chinese)

[13] LI Q C, HERVÉ J M. Type synthesis of 3-DOF RPR-equivalent parallel mechanisms[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2014, 30(6): 1333 - 1343.

[14] 徐灵敏,叶伟,李秦川. 并联机器人逆动力学建模的几何代数方法[J]. 机械工程学报,2022,58(7):1 - 11.
XU Lingmin, YE Wei, LI Qinchuan. Geometric algebra-based method for inverse dynamic modeling of parallel robots[J] Journal of Mechanical Engineering,2022,58(7):1 - 11. (in Chinese)

[15] ZHANG Jun, ZHAO Yanqin, LUO Haiwei. Hybrid model-based stiffness analysis of a 3 - RPS parallel kinematic machine[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2014(4):703 - 713.

[16] 汤腾飞,方汉良,张俊. 类 Exechon 并联机构模块可重构概念设计与运动学分析[J]. 天津大学学报,2019,52(7):733 - 744.
TANG Tengfei, FANG Hanliang, ZHANG Jun. Conceptual reconfigurable design and kinematic analysis of the Exechon-like parallel kinematic machine[J]. Journal of Tianjin University, 2019,52(7):733 - 744. (in Chinese)

[17] LIU Xinjun, XIE Fugui. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform[J]. Journal of Mechanisms & Robotics Transactions of the ASME, 2015,7: 041015.

[18] WANG Dongbao, ZHANG Jing, GUO Hongwei, et al. Design of a 2T1R-type parallel mechanism: performance analysis and size optimization[J]. Actuators, 2022, 11(9):262.

[19] SAN H J, LEI J S, CHEN J P, et al. Kinematics and workspace analysis of a 3 degree of freedom parallel mechanism with parallelogram linkage[J]. Transactions-Canadian Society for Mechanical Engineering, 2017, 41(5):922 - 935.

[20] ZHANG Shuai, LI Wei, ZHOU Songlin, et al. Kinematics and workspace analysis of a 3 - CR(Pa)(Pa)R parallel mechanism with an orthogonal layout[J]. Mechanism and Machine Theory, 2024,195:105616.

[21] 梁栋,张赵建,畅博彦,等. 含双平行四边形结构支链的 SCARA 并联机构研究[J1. 农业机械学报,2022,53(7):422 - 434.
LIANG Dong, ZHANG Zhaojian, CHANG Boyan, et al. Novel SCARA parallel mechanism with double paralelogram branches [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(7):422 - 434. (in Chinese)

[22] CHEN C, LI T, TANG Y. Configuration synthesis of generalized mechanism based on screw theory[J]. Iranian Journal of Science and Technology Transactions of Mechanical Engineering, 2019, 43(7):1013 - 1021.

[23] ZHANG Z, HOU Z, LI L, et al. Design and implementation of a 2 - DOF 5R parallel mechanism with a coaxial-driven layout [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2024, 238(13):6598 - 6613.

[24] 柴馨雪,李翔毅,汤陈昕,等. 基于共形几何代数的并联机器人逆运动学分析方法[J]. 农业机械学报, 2024, 55(3): 421 - 430.
CHAI Xinxue, LI Xiangyi, TANG Chenxin, et al. Inverse kinematics analysis method of parallel robot based on conformal geometry algebra[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2024,55(3):421 - 430. (in Chinese)

[25] KIM S, JOE S, NARDIN A B, et al. A design of 2 - DoFs spherical parallel manipulator with adjustable workspace[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2024,238(8): 3404 - 3414.

[26] DEND Zhizhong, ZHANG Yuling, YAN Shaoze. Type synthesis of metamorphic and axisymmetric parallel mechanisms using singularity for deployment and latch[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023,189:105441.

[27] HAN M, CHE J, LIU J, et al. Performance evaluation and dimensional optimization design of planar 6R redundant actuation parallel mechanism[J]. Robotica,2024,42(5):1649 - 1675.

[28] WU Zhen, CHAI Xinxue, YE Wei. Kinematic and stiffness modelling and performance evaluation of a new PRS - PRU - PUR overconstrained parallel mechanism[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2023,37(10):5377 - 5389.

[29] GUO Xinzhao, ZHOU Zhihao, WANG Qining. Multi-objective optimization and performance analysis of 3 - RPR parallel mechanism in robotic brace[J]. Mechatronics, 2023,95:103055.

[30] CHAI Chao, LI Ruiqin, NING Fengping, et al. Motion branch transformation of 3(Rc)PU parallel mechanism with reconfigurable joint and kinematic performance index[J]. Applied Sciences, 2024,14(13):5569.

[31] ZHU Gaohan, GUO Weizhong, HAN Youcheng, et al. A comprehensive evaluation framework for kinematic performance of parallel mechanisms based on joint transmissibility and multi-attribute decision making methods[J]. Mechanism and Machine Theory, 2023,181:105217.

[32] JIANG Bingshan, FANG Hairong, ZHANG Haiqiang. Type synthesis and kinematics performance analysis of a class of 3T2R parallel mechanisms with large output rotational angles[J]. International Journal of Automation and Computing, 2019,16(6): 775 - 785.