

# 单回路空间两平移并联机构拓扑设计与尺度优化

李菊 余俊杰 沈惠平 杜中秋

(常州大学现代机构学研究中心, 常州 213016)

**摘要:** 针对狭小空间内工作机器的需求,根据基于方位特征集的并联机构拓扑设计理论和方法,设计了12个移动副驱动的单回路空间两平移并联机构,并对其进行了自由度计算;对其中8个机构进行运动学建模,分别推导出其一元八次方程(封闭解)和符号式反解,并进行数值算例验证;运用差分进化算法以限定尺度约束下的可达工作空间最大为优化目标,分别对其中8个机构进行尺度优化,并求得其对应的可达工作空间,对比分析后优选出2个具有最大可达工作空间的两平移并联机构;为刚度分析、动力学分析及结构设计奠定了基础。

**关键词:** 并联机构; 单回路空间; 两平移; 尺度优化

中图分类号: TH112

文献标识码: A

文章编号: 1000-1298(2024)09-0470-11

OSID:



## Topology Design, Dimension Optimization and Workspace Analysis of Spatial Single-loop Two-translation Parallel Mechanisms

LI Ju SHE Junjie SHEN Huiping DU Zhongqiu

(Research Center for Advanced Mechanisms Theory, Changzhou University, Changzhou 213016, China)

**Abstract:** For the needs of the mechanical components not limited by space when machines working in narrow spaces, according to the topology design theory and method of parallel mechanism (PM) based on position and orientation characteristic (POC) equations, a set of 12 spatial single-loop two-translation PMs, each propelled by two actuated prismatic joints, was designed and the degrees of freedom of each PM were calculated. A comprehensive kinematic modeling effort was undertaken, focusing on eight select PM configurations. Through meticulous analysis and computation, the univariate eighth-degree polynomial equations (i. e., closed-form solution) were derived for each configuration. Symbolic inverse solutions were also derived respectively. Additionally, numerical examples were employed to validate the accuracy and efficacy of these solutions. Leveraging the differential evolution algorithm, an exhaustive effort was made to maximize the working space of the eight PM configurations under consideration. Through iterative refinement and optimization, the maximal operational envelopes of these PMs were meticulously determined, offering insights into their potential operational capabilities within varied working environments. Following a comprehensive comparative analysis of the maximal working spaces achieved by each PM configuration, two configurations boasting the largest working spaces were selected, which served as the foundational basis for subsequent endeavors, including the stiffness analysis, dynamic analysis and structural design of these PMs.

**Key words:** parallel mechanism; single loop space; two translations; dimension optimization

## 0 引言

少自由度并联机构因结构紧凑、成本低、控制简单等优点,在工业生产中应用广泛。LIU等<sup>[1]</sup>提出一种由滑块驱动的两支链两自由度平动机构,并将其应用于大型龙门机床。HUANG等<sup>[2]</sup>提出了包含平行四

边形机构(4R机构)的两平移机械手,并将之应用于电池检测设备中。CHEN等<sup>[3]</sup>提出了一种具有运动解耦性的RRR+PRRR机构。彭斌彬等<sup>[4]</sup>提出了一种具有良好侧向刚度的2-DOF平动并联机构;LIN等<sup>[5]</sup>设计了一种用于汉字书写或物品分类的2PC-CPR机构;沈惠平等<sup>[6]</sup>提出了一种4-DOF的3T1R并

收稿日期: 2023-12-09 修回日期: 2024-02-20

基金项目: 国家自然科学基金项目(52375007)和江苏省产业前瞻与关键核心技术重点项目(BE2021016-2)

作者简介: 李菊(1981—),女,副教授,主要从事机器人机构设计和自动控制研究,E-mail: wangju209@163.com

联机构,该机构所含的1条空间混合支链为两平移空间并联机构。WANG等<sup>[7]</sup>将4R机构作为模块设计了一类模拟肢体运动的伸缩机构;LÓPEZ等<sup>[8]</sup>采用神经网络模型求解了5R机构2种构型的运动学逆解。上述机构大都采用移动副驱动。相比于转动副驱动,在通常情况下,移动副驱动能实现更大的工作空间,更易于控制。为了获得更好的刚度或动力学性能,设计并联机构时往往添加至少1个混合支链。但通常混合支链的使用也使机构结构复杂、体积更大。在较低负载、慢速、空间狭小的应用场景下,采用简单支链组成的单回路并联机构更佳。

针对狭小空间内工作机器的需求,本文根据基于方位特征集的并联机构拓扑设计理论和方法<sup>[9-10]</sup>,设计12个由移动副驱动、两平移输出的单回路空间并联机构<sup>[11]</sup>;同时,选取其中8个机构,对其进行位置正反解分析,分别得到这8个机构位置正解的一元八次非线性方程(封闭解<sup>[12]</sup>)和符号式反解,通过数值算例进行验证;运用差分进化(Differential evolution, DE)算法<sup>[13-14]</sup>,以限定尺度约束下的最大可达工作空间为目标对这些机构进行尺度优化<sup>[15-17]</sup>,通过分析对比,筛选出具有最大可达工作空间的优化机构,以期为其动力学分析及结构设计奠定基础。

## 1 机构拓扑设计

### 1.1 基本方程

机构支链末端串联 POC 集( $M_{bi}$ )与机构动平台并联 POC 集( $M_{pa}$ )方程分别为<sup>[9-10]</sup>

$$M_{bi} = \bigcup_{k=1}^m M_{J_k} \quad (1)$$

$$M_{pa} = \bigcap_{i=1}^n M_{bi} \quad (2)$$

式中  $M_{J_k}$ ——第  $i$  个运动副 POC 集  
 $M_{bi}$ ——第  $i$  条支链末端 POC 集  
 $M_{pa}$ ——机构动平台 POC 集  
 $m$ ——运动副数  $n$ ——构件数

### 1.2 支链设计

根据式(2)可知,单回路空间两平移机构至少应有2条支链,而每条支链至少应包含两平移(2T)运动元素,据此,支链设计如下:

#### 1.2.1 支链 I

由式(1)可知,根据移动副与静平台0、动平台1的连接关系,支链 I 可有6种形式,如图1所示,它们均由1个移动副  $P_{11}$  和2个转动副组  $\{-R_{12} \parallel R_{13} -\}$ 、 $\{-R_{14} \parallel R_{15} -\}$  串联而成,但2个转动副组的轴线相互垂直<sup>[18-19]</sup>。

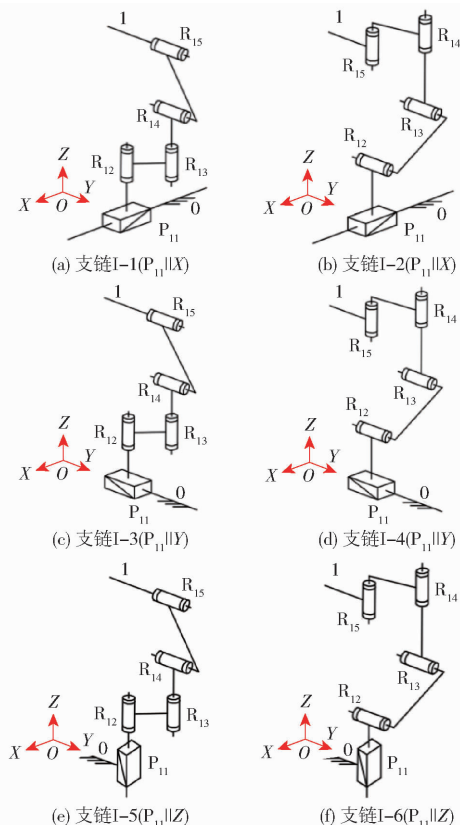


图1 支链 I 6种拓扑结构

Fig. 1 Six kinds of topological structure of chain I

为方便阐述,在静平台0上建立坐标系  $OXYZ$ ,  $X$ 、 $Y$ 轴在水平面上,其中,图1a、1b中移动副  $P_{11}$  的轴线平行于  $X$ 轴,图1c、1d中移动副  $P_{11}$  的轴线平行于  $Y$ 轴,图1e、1f中移动副  $P_{11}$  的轴线平行于  $Z$ 轴。图1a、1b、1c、1f的拓扑结构可记为  $\{-P_{11} \perp R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{14} \parallel R_{15} -\}$ ,图1d、1e可记为  $\{-P_{11} \parallel R_{12} \parallel R_{13} \perp R_{14} \parallel R_{15} -\}$ 。

由式(1)可知,2个转动副组的 POC 集(含寄生运动元素)分别为

$$M_1 = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{15}) \\ r^1(\parallel R_{15}) \end{bmatrix}$$

因此,6种形式支链 I 末端构件 POC 集,由式(1)可得

$$M_{b1} = M_p \cup M_1 \cup M_2 = \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_{11}) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{12}) \\ r^1(\parallel R_{12}) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\perp R_{15}) \\ r^1(\parallel R_{15}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond (R_{11}, R_{15})) \end{bmatrix}$$

因此,支链 I 末端输出运动为 3T2R,包含所要设计的 2T 并联机构动平台的二维平动输出。

#### 1.2.2 支链 II

由于支链 I 中 2 个转动副组的轴线方向均与  $X$

轴垂直,因此支链 II 中的转动副轴线须平行于  $X$  轴,这样才能消除所有的转动量而仅剩平移量。

由式(2)易知,支链 II 至少包含 2 个移动元素。为使结构简单,采用最简易的由 1 个移动副  $P$  与 2 个轴线相互平行的转动副垂直串联<sup>[20]</sup>组成的方式,它有 3 种形式,即移动副  $P_{21}$  的轴线分别平行于  $X$ 、 $Y$ 、 $Z$  轴,如图 2 所示。其中,图 2a 的拓扑结构可记为:支链 II  $\{-P_{21} \parallel R_{22} \parallel R_{23} -\}$ ,图 2b、2c 的拓扑结构可记为:支链 II  $\{-P_{21} \perp R_{22} \parallel R_{23} -\}$ 。

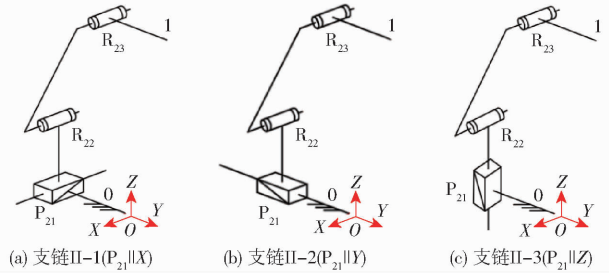


图 2 支链 II 3 种拓扑结构

Fig. 2 Three kinds of topological structure of chain II

由式(1)可得支链 II-1 POC 集为

$$M'_{b2} = \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ \{r^1(\parallel R_{23})\} \end{array} \right]$$

即支链 II-1 的末端可视为有 3 个独立的平移元素,而支链 I 中已包含 3 个独立的平移元素,因

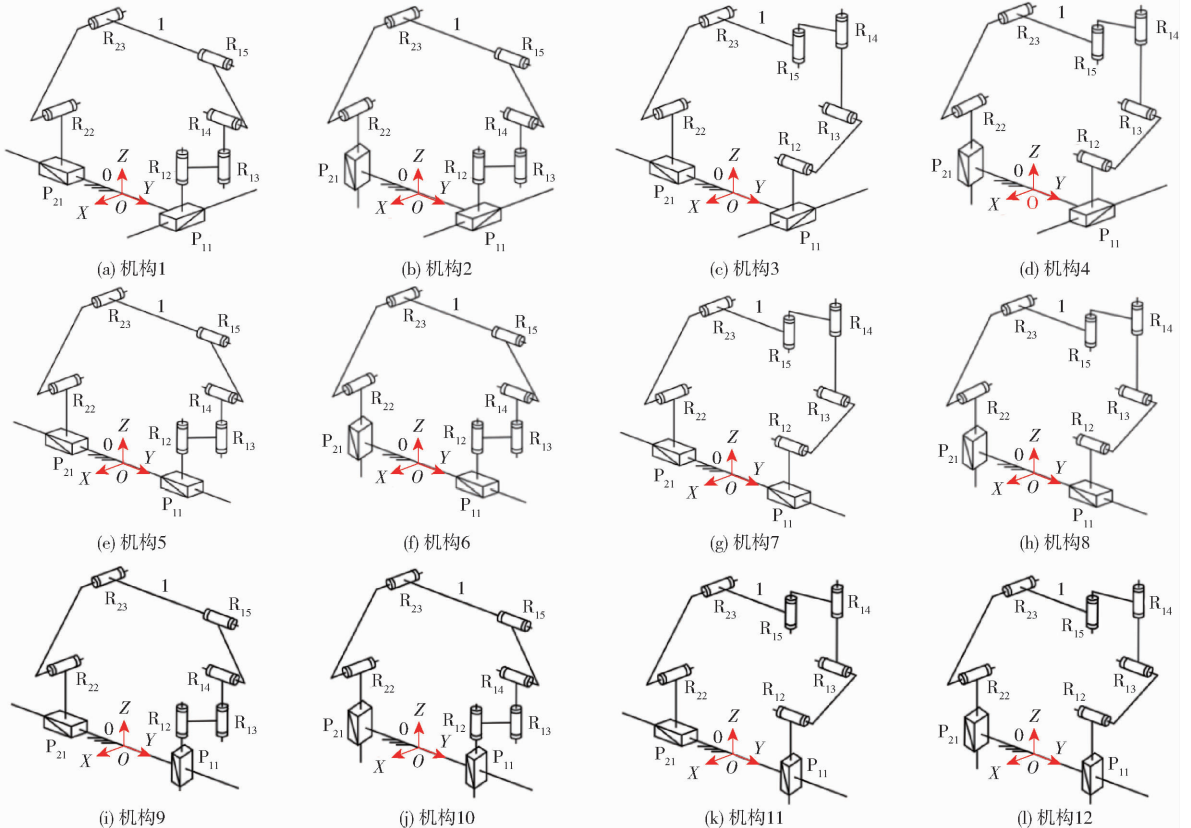


图 3 机构设计过程

Fig. 3 Mechanism design process

此,由式(2)知,支链 II-1 与支链 I 将并联构成 3 平移机构而非两平移机构,因此,本文不予考虑支链 II-1 的参与。

而支链 II-2 和支链 II-3 的 POC 集由式(1)可得

$$M_{b2} = \left[ \begin{array}{c} t^2(\perp R_{23}) \\ r^1(\parallel R_{23}) \end{array} \right]$$

支链 II-2 和支链 II-3 末端输出运动均含独立的 2T1R 元素,且其转动副轴线平行于  $X$  轴,它与支链 I 组合后能消除全部转动元素而仅剩 2 个独立平移。图 2 中的支链 II-2、II-3 为选取的两种有用支链 II。

### 1.3 机构设计

为设计两平移(2T)并联机构,须消除支链 I、II 中各自存在的转动元素。将支链 I 中  $R_{13}$ 、 $R_{15}$  副轴线与支链 II 中  $R_{23}$  副轴线均作垂直布置。根据这一原则,可以组成 12 种单回路空间并联机构<sup>[8]</sup>,如图 3 所示。

其中,支链 II-2 分别与支链 I 的 6 种形式组成机构 1、3、5、7、9、11;而支链 II-3 分别与支链 I 的 6 种形式组成机构 2、4、6、8、10、12。

这 12 个机构动平台的 POC 集,由式(2)可知均为

$$M_{Pa} = M_{b1} \cap M_{b2} =$$

$$\left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^2(\parallel \diamond (\mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{15})) \end{array} \right] \cap \left[ \begin{array}{c} t^2(\perp \mathbf{R}_{23}) \\ r^1(\parallel \mathbf{R}_{23}) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} t^2(\perp \mathbf{R}_{23}) \\ r^0 \end{array} \right]$$

因此, 动平台 1 只能在  $YOZ$  平面内进行两维平动。

#### 1.4 自由度计算

非瞬时自由度(亦称全周自由度)计算式为<sup>[9-10]</sup>

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (3)$$

$$\text{其中 } \xi_{L_j} = \dim. \left\{ \left( \bigcap_{i=1}^j M_{bi} \right) \cup M_{b(j+1)} \right\} \quad (4)$$

式中  $F$ ——机构自由度

$f_i$ ——第  $i$  个运动副自由度

$v$ ——独立回路数

$\xi_{L_j}$ ——第  $j$  个回路独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{bi}$ ——由前  $i$  条支链组成的子并联机构

POC 集

$M_{b(j+1)}$ ——第  $j+1$  条支链末端构件的 POC 集

上述 12 个机构具有相同的独立位移方程数, 由式(4)可得

$$\xi_{L_1} = \dim. \{ M_{b1} \cup M_{b2} \} = \dim. \left\{ \left[ \begin{array}{c} t^3 \\ r^3 \end{array} \right] \right\} = 6$$

由式(3)求得这 12 个机构自由度均为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = 8 - 6 = 2$$

取静平台 0 上的 2 个移动副  $P_{11}$ 、 $P_{21}$  为驱动副时, 输出杆 1 产生  $YOZ$  平面内的两维移动。

限于篇幅, 对机构 1、2 进行运动学建模与分析, 而对机构 3~8 仅给出位置分析结果。

## 2 位置正解

机构 1 运动学建模如图 4 所示。以静平台 0 导轨上点  $O$  为原点建立笛卡尔静坐标系  $OXYZ$ ,  $X$  轴垂直于  $P_{21}$  轴线方向,  $Y$  轴与  $P_{21}$  轴线方向重合,  $Z$  轴方向由右手定则确定; 动坐标系  $oxyz$  原点位于动平台几何中心  $o$ ,  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴分别平行于  $X$  轴、 $Y$

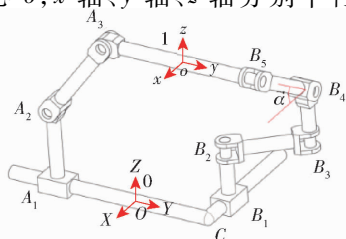


图 4 机构 1 运动学建模

Fig. 4 Kinematic modeling of mechanism 1

轴、 $Z$  轴。

### 2.1 机构 1 位置

设  $l_{OC} = a/2$ ,  $l_{A1A2} = l_1$ ,  $l_{A2A3} = l_2$ ,  $l_{A3B5} = b$ ,  $l_{B4B5} = l_3$ ,  $l_{B3B4} = l_4$ ,  $l_{B2B3} = l_5$ ,  $l_{B1B2} = l_6$ 。

#### 2.1.1 位置正解

设  $l_{A1O} = y_1$ ,  $l_{B1C} = x_1$ , 直线  $B_4B_5$  与  $x$  轴正向夹角为  $\alpha$ 。由于动平台 1 在  $YOZ$  平面内的两平移特性, 该机构位置正解归结为: 已知静平台上  $A_1O$ 、 $B_1C$  的位移距离  $y_1$ 、 $x_1$ , 求动平台 1 上基点  $o$  的坐标  $(0, y, z)$ 。

在静坐标系  $OXYZ$  中, 易知:  $A_1 = (0, y_1, 0)$ ,  $A_2 = (0, y_1, l_1)$ ,  $B_1 = (x_1, a/2, 0)$ ,  $B_2 = (x_1, a/2, l_6)$ 。

由动平台基点  $o = (0, y, z)$  得  $A_3 = (0, y - b/2, z)$ ,  $B_5 = (0, y + b/2, z)$ , 进一步, 点  $B_4$ 、 $B_3$  坐标  $B_4 = (-l_3 \cos \alpha, y + b/2, z - l_3 \sin \alpha)$ ,  $B_3 = (-l_3 \cos \alpha, y + b/2, z - l_3 \sin \alpha - l_4)$ 。

因杆  $B_2B_3$  在运动过程中始终平行于水平面, 则有

$$l_6 = z - l_3 \sin \alpha - l_4 \quad (5)$$

由几何约束  $l_{A2A3} = l_2$ ,  $l_{B2B3} = l_5$ , 建立位置方程为

$$\left( y_1 - y + \frac{b}{2} \right)^2 + (l_1 - z)^2 = l_2^2 \quad (6)$$

$$(x_1 + l_3 \cos \alpha)^2 + \left( \frac{a}{2} - y - \frac{b}{2} \right)^2 = l_5^2 \quad (7)$$

由式(7)得

$$y = \pm \sqrt{l_5^2 - (x_1 + l_3 \cos \alpha)^2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \quad (8)$$

将式(5)、(8)代入式(6), 化简可得

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & l_3^4 \cos^4 \alpha + l_3^4 \sin^4 \alpha - 2l_3^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\ & 4Bl_3^3 \sin^3 \alpha + 4x_1 l_3^3 \cos^3 \alpha + 4Bl_3^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - \\ & 4x_1 l_3^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + (4B^2 l_3^2 - 2Cl_3^2) \sin^2 \alpha + \\ & (4x_1^2 l_3^2 + 2Cl_3^2 + 4A^2 l_3^2) \cos^2 \alpha + 8Bx_1 l_3^2 \sin \alpha \cos \alpha + \\ & 4BCl_3 \sin \alpha + (4Cx_1 l_3 + 8A^2 x_1 l_3) \cos \alpha + C^2 + \\ & 4A^2 x_1^2 - 4A^2 l_5^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $A = y_1 - \frac{a}{2} + b$   $B = l_1 - l_4 - l_6$

$$C = l_2^2 - l_5^2 - A^2 - B^2 + x_1^2$$

进一步, 化简得

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & n_1 \cos^4 \alpha + n_2 \sin^4 \alpha + n_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\ & n_4 \sin^3 \alpha + n_5 \cos^3 \alpha + n_6 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \\ & n_7 \sin^2 \alpha \cos \alpha + n_8 \sin^2 \alpha + n_9 \cos^2 \alpha + \\ & n_{10} \sin \alpha \cos \alpha + n_{11} \sin \alpha + n_{12} \cos \alpha + n_{13} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $n_1 = n_2 = l_3^4$   $n_3 = -2l_3^4$   $n_4 = -4Bl_3^3$

$$n_5 = 4x_1 l_3^3$$

$$n_6 = 4Bl_3^3$$

$$n_7 = -4x_1 l_3^3$$

$$\begin{aligned} n_8 &= 4B^2l_3^2 - 2Cl_3^2 & n_9 &= 4x_1l_3^2 + 2Cl_3^2 + 4A^2l_3^2 \\ n_{10} &= 8Bx_1l_3^2 & n_{11} &= 4BCl_3 \\ n_{12} &= 4Cx_1l_3 + 8A^2x_1l_3 & n_{13} &= C^2 + 4A^2x_1^2 - 4A^2l_5^2 \end{aligned}$$

令  $u = \tan(\alpha/2)$ , 代入式(10), 整理得

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i / (1+u^2)^4 = 0 \quad (11)$$

因  $(1+u^2)^4 \neq 0$ , 于是有

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (12)$$

其中

$$T_0 = n_1 + n_5 + n_9 + n_{12} + n_{13}$$

$$T_1 = 2n_6 + 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 - 2n_5 + 4n_7 + 4n_8 + 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_3 = 8n_4 - 2n_6 + 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_8 - 2n_9 + 6n_{13}$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_6 - 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 2n_5 - 4n_7 + 4n_8 - 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_7 = 2n_6 - 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_8 = n_1 - n_5 + n_9 - n_{12} + n_{13}$$

式(12)为一元八次非线性方程, 可利用迭代法或二分法等求解所有实数解, 再由  $u = \tan(\alpha/2)$  求解变量  $\alpha$ , 故正解为

$$\begin{cases} z = l_3 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_5^2 - (x_1 + l_3 \cos \alpha)^2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (13)$$

### 2.1.2 位置逆解

机构1位置逆解归结为: 已知动平台1质心  $o$  坐标为  $(0, y, z)$ , 求驱动副  $P_{11}$ 、 $P_{21}$  的输入位置  $y_1$ 、 $x_1$ 。

化简式(6)可得

$$y_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - (l_1 - z)^2} + y - \frac{b}{2} \quad (14)$$

由式(5)易知

$$\alpha = \arcsin \frac{z - l_6 - l_4}{l_3} \quad (15)$$

将式(15)代入式(7)并化简, 可得

$$x_1 = \pm \sqrt{l_5^2 - \left(\frac{a}{2} - y - \frac{b}{2}\right)^2} \pm \sqrt{l_3^2 - (z - l_6 - l_4)^2} \quad (16)$$

式(14)、(16)即为机构1逆解。

### 2.1.3 正逆运动学验证

设机构1尺寸参数为:  $a = 30$  mm,  $b = 60$  cm,  $l_1 = 30$  cm,  $l_2 = 40$  cm,  $l_3 = 40$  cm,  $l_4 = 20$  cm,  $l_5 = 30$  cm,  $l_6 = 20$  cm。

为此, 在 ADAMS 中建立机构1虚拟样机, 对样机2个驱动副  $P_{11}$ 、 $P_{21}$  添加直线驱动, 驱动函数为

$$\begin{cases} y_1 = -28.6975 + 10 \sin t \\ x_1 = -19.7266 - 10 \sin(0.6t) \end{cases}$$

### (1) 逆解验证

仿真后得两驱动副位置  $y_1$ 、 $x_1$  的仿真曲线; 在 Matlab 中, 对机构1的逆解模型添加相同的驱动函数, 得到两驱动副理论曲线如图5所示。

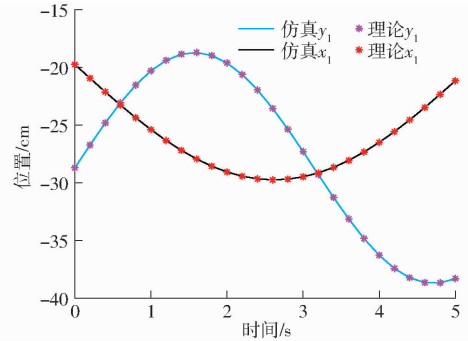


图5 机构1逆解验证

Fig. 5 Inverse solution verification of mechanism 1

由图5可知, 在给定驱动函数下, 依据推导的逆解计算的理论曲线与虚拟样机得出的仿真曲线数值与趋势基本吻合, 可以证明该机构位置逆解推导正确。

### (2) 正解验证

动平台仿真位移曲线可以在 ADAMS 虚拟样机中测得, 如图6所示。

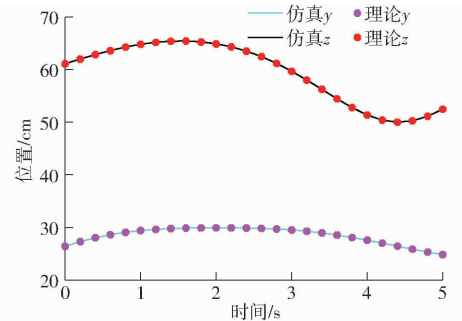


图6 机构1正解验证

Fig. 6 Positive solution verification of mechanism 1

在 Matlab 中, 利用二分法对  $f(u)$  进行迭代求解得到  $u$ , 再将其中实数解  $u$  代入  $u = \tan(\alpha/2)$  对应的  $\alpha$ ; 最后, 将  $\alpha$  代入正解式(13)即可得到动平台理论位移曲线, 如图6所示。

由图6可知, 由封闭式正解得到的动平台理论位移曲线与虚拟样机中得出的仿真曲线吻合, 因此证明该机构位置正解推导正确。

## 2.2 机构2位置

机构2运动学建模如图7所示。静坐标系  $OXYZ$  与动坐标系  $oxyz$  的建立与2.1节所述相似, 如图7所示; 进一步, 设  $l_{A1A2} = l_1$ ,  $l_{A2A3} = l_2$ ,  $l_{A3B5} = b$ ,  $l_{B5B4} = l_3$ ,  $l_{B4B3} = l_4$ ,  $l_{B3B2} = l_5$ ,  $l_{B2B1} = l_6$ 。



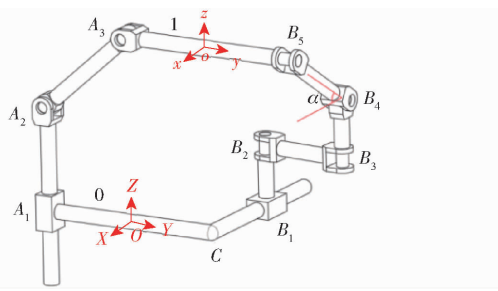


图7 机构2运动学建模

Fig.7 Kinematic modeling of mechanism 2

### 2.2.1 位置正解

设  $l_{A_1A_2} = z_1$ ,  $l_{B_1C} = x_1$ , 直线  $B_4B_5$  与  $x$  轴正向的夹角为  $\alpha$ 。由于动平台 1 在  $YOZ$  平面内的两平移特性, 因此该机构位置正解归结为: 已知静平台上  $A_1A_2, B_1C$  位移距离  $z_1, x_1$ , 求动平台 1 上基点  $o$  坐标  $(0, y, z)$ 。

在静坐标系  $OXYZ$  中, 易知:  $A_1 = (0, -a, 0)$ ,  $A_2 = (0, -a, z_1)$ ,  $B_1 = (x_1, a/2, 0)$ ,  $B_2 = (x_1, a/2, l_6)$ 。

由动平台基点  $o = (0, y, z)$  得  $A_3 = (0, y - b/2, z)$ ,  $B_5 = (0, y + b/2, z)$ , 进一步, 点  $B_4, B_3$  坐标  $B_4 = (-l_3 \cos \alpha, y + b/2, z - l_3 \sin \alpha)$ ,  $B_3 = (-l_3 \cos \alpha, y + b/2, z - l_3 \sin \alpha - l_4)$ 。

因杆  $B_2B_3$  在运动过程中始终平行于水平面, 则有

$$l_6 = z - l_3 \sin \alpha - l_4 \quad (17)$$

由几何约束  $l_{A_2A_3} = l_2$ ,  $l_{B_2B_3} = l_5$ , 建立方程得

$$\left(y - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 + (z - z_1)^2 = l_2^2 \quad (18)$$

$$(x_1 + l_3 \cos \alpha)^2 + \left(\frac{a}{2} - y - \frac{b}{2}\right)^2 = l_5^2 \quad (19)$$

由式(19)可得

$$y = \pm \sqrt{l_5^2 - (x_1 + l_3 \cos \alpha)^2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \quad (20)$$

将式(17)、(19)代入式(18), 化简可得

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & l_3^4 \cos^4 \alpha + l_3^4 \sin^4 \alpha - 2l_3^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \\ & 4Bl_3^3 \sin^3 \alpha + 4x_1 l_3^3 \cos^3 \alpha + \\ & 4Bl_3^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha - 4x_1 l_3^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ & (4B^2 l_3^2 - 2Cl_3^2) \sin^2 \alpha + \\ & (4x_1^2 l_3^2 + 2Cl_3^2 + 4A^2 l_3^2) \cos^2 \alpha + \\ & 8Bx_1 l_3^2 \sin \alpha \cos \alpha + 4BCl_3 \sin \alpha + \\ & (4Cx_1 l_3 + 8A^2 x_1 l_3) \cos \alpha + C^2 + \\ & 4A^2 x_1^2 - 4A^2 l_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

其中  $A = a - b$   $B = l_4 + l_6 - z$

$$C = l_2^2 - l_5^2 - A^2 - B^2 + x_1^2$$

进一步, 化简得

$$\begin{aligned} f(\alpha) = & n_1 \cos^4 \alpha + n_2 \sin^4 \alpha + n_3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \\ & n_4 \sin^3 \alpha + n_5 \cos^3 \alpha + n_6 \cos^2 \alpha \sin \alpha + \\ & n_7 \sin^2 \alpha \cos \alpha + n_8 \sin^2 \alpha + n_9 \cos^2 \alpha + \\ & n_{10} \sin \alpha \cos \alpha + n_{11} \sin \alpha + \\ & n_{12} \cos \alpha + n_{13} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $n_1 = n_2 = l_3^4$   $n_3 = -2l_3^4$   $n_4 = -4Bl_3^3$

$$n_5 = 4x_1 l_3^3$$
  $n_6 = 4Bl_3^3$   $n_7 = -4x_1 l_3^3$

$$n_8 = 4B^2 l_3^2 - 2Cl_3^2$$
  $n_9 = 4x_1 l_3^2 + 2Cl_3^2 + 4A^2 l_3^2$

$$n_{10} = 8Bx_1 l_3^2$$
  $n_{11} = 4BCl_3$

$$n_{12} = 4Cx_1 l_3 + 8A^2 x_1 l_3$$
  $n_{13} = C^2 + 4A^2 x_1^2 - 4A^2 l_3^2$

令  $u = \tan(\alpha/2)$ , 代入式(22), 整理得

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i / (1+u^2)^4 = 0 \quad (23)$$

因  $(1+u^2)^4 \neq 0$ , 于是有

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (24)$$

其中

$$T_0 = n_1 + n_5 + n_9 + n_{12} + n_{13}$$

$$T_1 = 2n_6 + 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 - 2n_5 + 4n_7 + 4n_8 + 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_3 = 8n_4 - 2n_6 + 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_8 - 2n_9 + 6n_{13}$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_6 - 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 2n_5 - 4n_7 + 4n_8 - 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_7 = 2n_6 - 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_8 = n_1 - n_5 + n_9 - n_{12} + n_{13}$$

式(24)为一元八次非线性方程, 可利用迭代法或二分法等求解所有实数解, 再由  $u = \tan(\alpha/2)$  求解变量  $\alpha$ , 故正解为

$$\begin{cases} z = l_3 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_5^2 - (x_1 + l_3 \cos \alpha)^2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (25)$$

### 2.2.2 位置逆解

机构2位置逆解归结为: 已知动平台1质心  $o$  坐标  $(0, y, z)$ , 求驱动副  $P_{11}, P_{21}$  的输入位置  $x_1, z_1$ 。

化简式(18)可得

$$z_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - \left(y - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} + z \quad (26)$$

由式(17)易知

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{z - l_6 - l_4}{l_3}\right) \quad (27)$$

将式(27)代入式(19)并化简, 可得

$$x_1 = \pm \sqrt{l_5^2 - \left(\frac{a}{2} - y - \frac{b}{2}\right)^2} \pm \sqrt{l_3^2 - (z - l_6 - l_4)^2} \quad (28)$$

式(26)、(28)即为机构2逆解。

### 2.2.3 正逆运动学验证

设机构2尺寸参数为: $a=30\text{ cm}$ , $b=60\text{ cm}$ , $l_1=30\text{ cm}$ , $l_2=40\text{ cm}$ , $l_3=40\text{ cm}$ , $l_4=20\text{ cm}$ , $l_5=30\text{ cm}$ , $l_6=20\text{ cm}$ 。

为此,在ADAMS中建立机构2虚拟样机,对样机2个驱动副 $P_{11}$ 、 $P_{21}$ 添加直线驱动,驱动函数为

$$\begin{cases} z_1 = 35.4549 + 8\sin t \\ x_1 = -35.5781 + 10\sin(0.8t) \end{cases}$$

#### (1) 逆解验证

仿真后得出两驱动副位置 $z_1$ 、 $x_1$ 的仿真曲线;在Matlab中,对机构2的逆解模型添加相同的驱动函数,得到两驱动副理论曲线如图8所示。

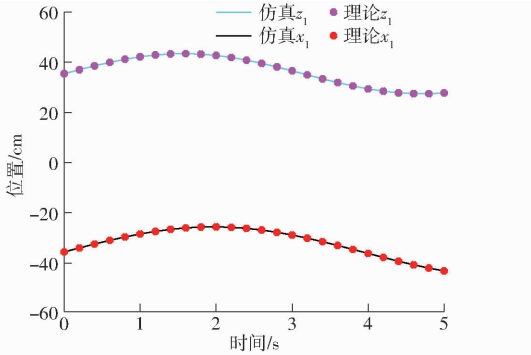


图8 机构2逆解验证

Fig.8 Inverse solution verification of mechanism 2

由图8可知,在给定驱动函数下,依据推导的逆解计算理论曲线与虚拟样机得出的仿真曲线数值与趋势吻合,可以证明该机构位置逆解推导正确。

#### (2) 正解验证

动平台仿真位移曲线可以在ADAMS虚拟样机中测得,如图9所示。

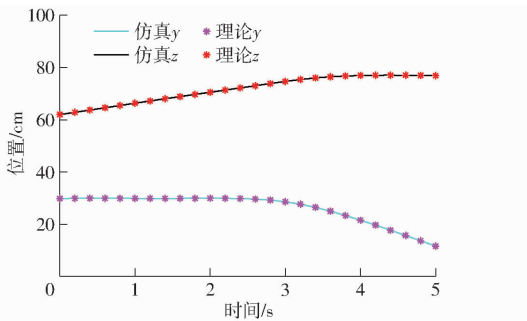


图9 机构2正解验证

Fig.9 Positive solution verification of mechanism 2

在Matlab中,利用二分法对 $f(u)$ 进行迭代求解得到 $u$ ,再将其中实数解 $u$ 代入 $u = \tan(\alpha/2)$ 对应的 $\alpha$ ;最后,将 $\alpha$ 代入正解式(25)即可得到动平台理论位移曲线,如图9所示。

由图9可知,由封闭式正解得到的动平台理论位移曲线与虚拟样机中得出的仿真曲线吻合,因此证明该机构位置正解推导正确。

### 2.3 机构3~8的位置

求解余下的第3~12共10个机构位置正反解的过程方法,与机构1、2相同;限于篇幅,略去求解过程,直接列出机构3~8正反解公式,进一步,这些公式均已经过数值算例验证正确。

#### 2.3.1 机构3

机构3正解公式为

$$\begin{cases} z = l_5 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_3^2 - (x_1 - l_5 \cos \alpha)^2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (29)$$

其中

$$\alpha = 2 \arctan(u)$$

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (30)$$

$$T_0 = n_1 + n_5 + n_9 + n_{12} + n_{13}$$

$$T_1 = 2n_6 + 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 - 2n_5 + 4n_7 + 4n_8 + 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_3 = 8n_4 - 2n_6 + 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_8 - 2n_9 + 6n_{13}$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_6 - 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 2n_5 - 4n_7 + 4n_8 - 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_7 = 2n_6 - 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_8 = n_1 - n_5 + n_9 - n_{12} + n_{13}$$

机构3逆解公式为

$$\begin{cases} y_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - (l_1 - z)^2} + y - \frac{b}{2} \\ x_1 = \pm \sqrt{l_3^2 - \left(\frac{a}{2} - y - \frac{b}{2}\right)^2} \pm \sqrt{l_5^2 - (z - l_6 - l_4)^2} \end{cases} \quad (31)$$

#### 2.3.2 机构4

机构4正解公式为

$$\begin{cases} z = l_5 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_3^2 - (x_1 - l_5 \cos \alpha)^2} + \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (32)$$

其中

$$\alpha = 2 \arctan(u)$$

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (33)$$

$$T_0 = n_1 + n_5 + n_9 + n_{12} + n_{13}$$

$$T_1 = 2n_6 + 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 - 2n_5 + 4n_7 + 4n_8 + 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_3 = 8n_4 - 2n_6 + 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_8 - 2n_9 + 6n_{13}$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_6 - 2n_{10} + 6n_{11}$$

$$T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 2n_5 - 4n_7 + 4n_8 - 2n_{12} + 4n_{13}$$

$$T_7 = 2n_6 - 2n_{10} + 2n_{11}$$

$$T_8 = n_1 - n_5 + n_9 - n_{12} + n_{13}$$

机构4逆解公式为

$$\begin{cases} z_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - \left(y - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} + z \\ x_1 = \pm \sqrt{l_3^2 - \left(\frac{a}{2} - y - \frac{b}{2}\right)^2} \pm \sqrt{l_5^2 - (z - l_6 - l_4)^2} \end{cases} \quad (34)$$

### 2.3.3 机构5

机构5正解公式为

$$\begin{cases} z = l_3 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_5^2 - (l_3 \cos \alpha)^2} + y_2 - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (35)$$

其中

$$\alpha = 2 \arctan(u) \quad f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (36)$$

$$T_0 = n_1 + n_7 + n_9 \quad T_1 = 2n_5 + 2n_8$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9 \quad T_3 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_6 - 2n_7 + 6n_9$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8 \quad T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9$$

$$T_7 = 2n_5 + 2n_8 \quad T_8 = n_1 + n_7 + n_9$$

机构5逆解公式为

$$\begin{cases} y_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - (l_1 - z)^2} + y - \frac{b}{2} \\ y_2 = \pm \sqrt{l_5^2 - l_3^2 + (z - l_4 - l_6)^2} + y + \frac{b}{2} \end{cases} \quad (37)$$

### 2.3.4 机构6

机构6正解公式为

$$\begin{cases} z = l_3 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_5^2 - (l_3 \cos \alpha)^2} + y_1 - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (38)$$

其中

$$\alpha = 2 \arctan(u) \quad f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (39)$$

$$T_0 = n_1 + n_7 + n_9 \quad T_1 = 2n_5 + 2n_8$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9 \quad T_3 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_6 - 2n_7 + 6n_9$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8 \quad T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9$$

$$T_7 = 2n_5 + 2n_8 \quad T_8 = n_1 + n_7 + n_9$$

机构6逆解公式为

$$\begin{cases} z_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - \left(y - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} + z \\ y_1 = \pm \sqrt{l_5^2 - l_3^2 + (z - l_6 - l_4)^2} + y + \frac{b}{2} \end{cases} \quad (40)$$

### 2.3.5 机构7

机构7正解公式为

$$\begin{cases} z = l_5 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_3^2 - (l_5 \cos \alpha)^2} + y_2 - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (41)$$

其中

$$\alpha = 2 \arctan(u)$$

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (42)$$

$$T_0 = n_1 + n_7 + n_9 \quad T_1 = 2n_5 + 2n_8$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9 \quad T_3 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_6 - 2n_7 + 6n_9$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8 \quad T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9$$

$$T_7 = 2n_5 + 2n_8 \quad T_8 = n_1 + n_7 + n_9$$

机构7逆解公式为

$$\begin{cases} y_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - (l_1 - z)^2} + y - \frac{b}{2} \\ y_2 = \pm \sqrt{l_3^2 - l_5^2 + (z - l_4 - l_6)^2} + y + \frac{b}{2} \end{cases} \quad (43)$$

### 2.3.6 机构8

机构8正解公式为

$$\begin{cases} z = l_5 \sin \alpha + l_4 + l_6 \\ y = \pm \sqrt{l_3^2 - (l_5 \cos \alpha)^2} + y_1 - \frac{b}{2} \end{cases} \quad (44)$$

其中

$$\alpha = 2 \arctan(u)$$

$$f(u) = \sum_{i=0}^8 T_i u^i = 0 \quad (45)$$

$$T_0 = n_1 + n_7 + n_9 \quad T_1 = 2n_5 + 2n_8$$

$$T_2 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9 \quad T_3 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8$$

$$T_4 = 6n_1 + 16n_2 - 8n_3 + 8n_6 - 2n_7 + 6n_9$$

$$T_5 = 8n_4 - 2n_5 + 6n_8 \quad T_6 = 4n_3 - 4n_1 + 4n_6 + 4n_9$$

$$T_7 = 2n_5 + 2n_8 \quad T_8 = n_1 + n_7 + n_9$$

机构8逆解公式为

$$\begin{cases} z_1 = \pm \sqrt{l_2^2 - \left(y - \frac{b}{2} + \frac{a}{2}\right)^2} + z \\ y_1 = \pm \sqrt{l_3^2 - l_5^2 + (z - l_6 - l_4)^2} + y + \frac{b}{2} \end{cases} \quad (46)$$

## 3 工作空间优化

工作空间是反映并联机构工作性能的一个重要指标,它对机构工作范围、应用场景及灵活程度有重要影响<sup>[21-22]</sup>。由于12个机构的拓扑结构不尽完全相同,以机构1为例进行分析。先以限定尺度约束下的可达工作空间最大为目标,使用差分进化(DE)算法对各机构的尺度参数进行优化<sup>[13-17]</sup>;然后,再求得其工作空间<sup>[23-24]</sup>。

### 3.1 设计变量

将静、动平台长度 $a$ 、 $b$ ,以及杆件长度 $l_1$ 、 $l_2$ 、 $l_3$ 、 $l_4$ 、 $l_5$ 、 $l_6$ 作为设计变量 $\mathbf{X}$ ,即

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)^T = (a, b, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6)^T \quad (47)$$

### 3.2 目标函数

机构工作空间 $f(\mathbf{X}) = [Y_{\min}, Y_{\max}][Z_{\min}, Z_{\max}]$



尽可能大。于是,机构优化设计数学模型转换为在约束条件下求  $\max(f(\mathbf{X}))$ , 即

$$\max(f(\mathbf{X})) = \max([Y_{\max} - Y_{\min}][Z_{\max} - Z_{\min}]) \quad (48)$$

### 3.3 约束条件

根据机构 1 位置符号反解, 可得机构 1 自身杆长约束条件为

$$\begin{cases} g_1(\mathbf{X}) = l_2^2 - (l_1 - z)^2 \geq 0 \\ g_2(\mathbf{X}) = l_5^2 - \left(\frac{a}{2} - y - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0 \\ g_3(\mathbf{X}) = l_3^2 - (z - l_6 - l_4)^2 \geq 0 \end{cases} \quad (49)$$

考虑到工程应用中, 动、静平台与连杆最大(最小)尺寸对机构的占用空间有较大影响, 将机构 1 各杆件长度作约束

$$\begin{cases} g_4(\mathbf{X}) : 40 \text{ cm} \leq a, b \leq 80 \text{ cm} \\ g_5(\mathbf{X}) : 40 \text{ cm} \leq l_i \leq 80 \text{ cm} \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \end{cases} \quad (50)$$

模拟一些狭窄场景: 没有足够的空间使杆件能自由地移动, 将机构各杆件运动位置限制在矩形底座(定平台)上方的空间中, 具体到机构 1, 其约束条件为

$$g_6(\mathbf{X}) = y + \frac{b}{2} \leq \frac{a}{2} \quad (51)$$

### 3.4 优化结果

对机构 1 进行优化时, 搜索范围取:  $-50 \text{ cm} \leq y \leq 50 \text{ cm}$ ,  $-10 \text{ cm} \leq z \leq 80 \text{ cm}$ 。DE 算法的控制参数设置为: 种群规模  $N_p = 40$ , 缩放因子  $Z = 0.5$ , 交叉因子  $C_R = 0.9$ , 最大进化数  $T = 100$ 。于是, 得到最优解为  $\mathbf{X}_{\text{best}} = (49.854 \ 1, 47.513 \ 6, 39.819 \ 7, 39.667 \ 2, 39.821 \ 6, 20.221 \ 9, 39.644 \ 2, 20.587 \ 3)^T$ , 最优目标函数  $f(\mathbf{X}_{\text{best}}) = 3 \ 160$ 。机构 1 最优尺度下对应可达工作空间, 如图 10a 所示。

机构 2 ~ 12 的优化模型与机构 1 类似。其中, 前 8 个机构设计变量最优解与最优目标函数值如表 1 所示; 其最优尺度工作空间如图 10b ~ 10h 所示。

由表 1 及图 10 可知, 机构 1 ~ 8 的工作空间均为规则矩形; 其中, 机构 5、7 由于两个移动副排列是相同方向(与  $y$  轴平行), 工作空间最大; 理论上, 这两个机构在  $y$  轴方向上的工作空间可无限长, 其工作空间受静平台范围选择影响; 其余 6 个机构工作空间面积均相差不足 1%。

综上所述, 机构 1 ~ 8 均具有规则、较大的工作空间。其中, 机构 5、7 在杆件无法伸出底座上方之外的狭小空间工作时, 其工作空间面积能占到底座内空间的约 70%, 空间利用率较高; 同

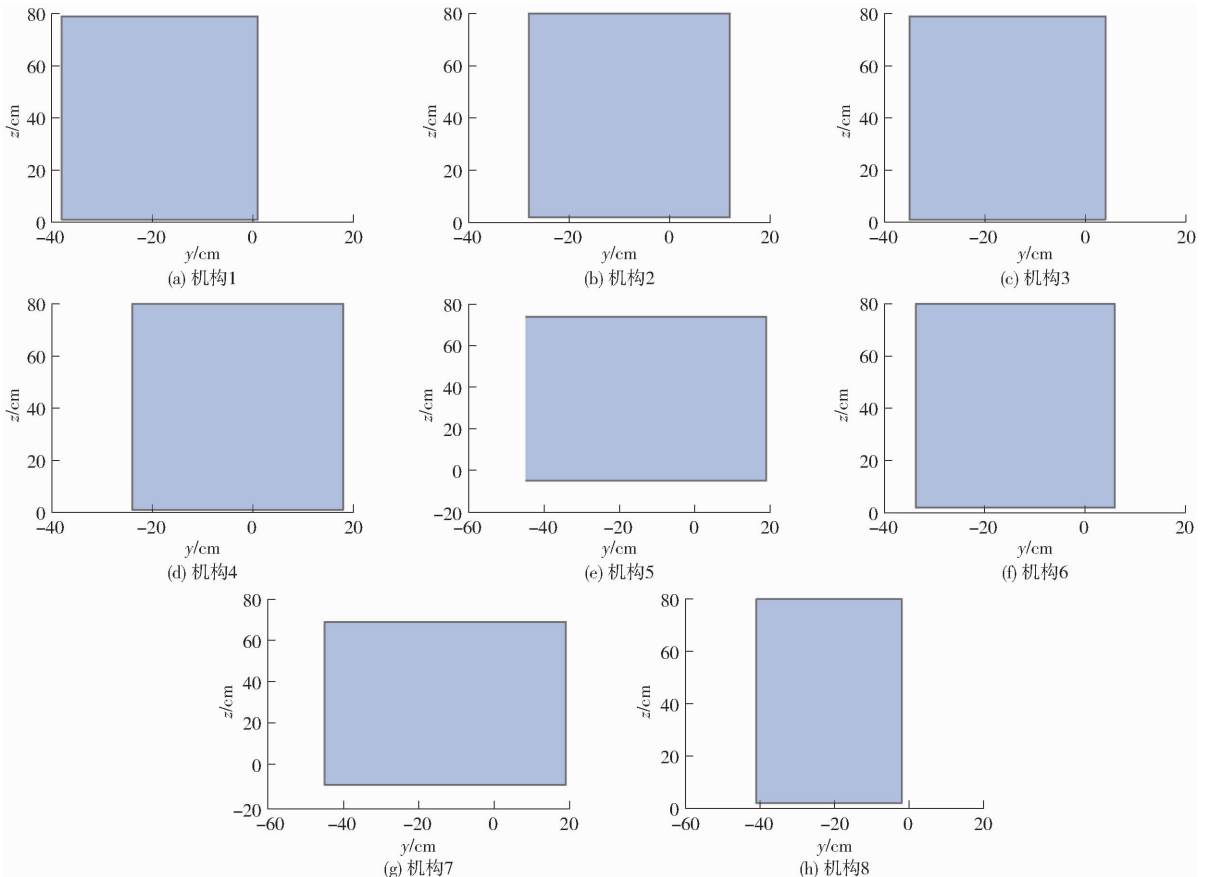


图 10 机构 1 ~ 8 工作空间

Fig. 10 Working space of mechanism 1 ~ 8

表1 机构1~8尺度优化结果

Tab.1 Mechanism 1~8 scale optimization results

机构	$a/mm$	$b/mm$	$l_1/mm$	$l_2/mm$	$l_3/mm$	$l_4/mm$	$l_5/mm$	$l_6/mm$	$f(X_{best})$
1	49.854 1	47.513 6	39.819 7	39.667 2	39.821 6	20.221 9	39.644 2	20.587 3	3 160
2	65.970 4	45.418 4	30.554 7	24.026 4	39.873 8	20.134 8	39.928 6	20.371 8	3 200
3	50.081 2	41.198 3	39.596 2	39.416 1	39.760 9	20.178 5	39.602 9	20.390 8	3 160
4	72.809 5	41.402 2	29.839 5	34.458 5	39.934 1	20.053 1	39.702 4	20.451 6	3 200
5	79.584 9	40.814 9	34.555 4	39.584 2	21.563 1	27.381 5	25.008 3	24.089 1	5 600
6	42.129 6	54.046 5	27.629 3	39.691 7	23.848 7	39.104 7	32.508 8	21.148 6	3 160
7	41.589 4	79.873 8	29.332 7	39.795 4	29.340 9	29.856 4	23.401 8	20.938 1	5 600
8	51.642 2	48.571 3	21.800 2	39.658 5	30.253 5	30.640 6	26.431 2	34.969 7	3 160

时,机构5、7还拥有在一个水平方向上不受限制运动的特性,这种特性在工业生产线、物流和仓储等需要在狭窄空间内长距离移动的场景下具有很大优势<sup>[25]</sup>。

#### 4 结束语

基于方位特征集的并联机构拓扑设计理论,设

计了12种移动驱动的两平移单回路空间并联机构,对这12个机构进行了自由度分析。选取其中8个机构进行了运动学建模,得到了这些机构的一元八次非线性方程(封闭解)及其符号式位置反解,并进行了验证。采用差分进化算法,求得了8个机构限定尺度约束下最大可达工作空间,从中优选出最适合在狭小空间下工作的机构5、7。

#### 参 考 文 献

- [1] LIU Xinjun, WANG Qiming, WANG Jinsong. Kinematics, dynamics and dimensional synthesis of a novel 2-DOF translational manipulator[J]. Journal of Intelligent and Robotic Systems, 2004, 41(4): 205 - 224.
- [2] HUANG Tian, LI Zhanxian, LI Meng, et al. Conceptual design and dimensional synthesis of a novel 2-DOF translational parallel robot for pick-and-place operations[J]. Journal of Mechanical Design, 2004, 126(3): 449 - 455.
- [3] CHEN Chao, ANGELES J. Generalized transmission index and transmission quality for spatial linkages[J]. Mechanism and Machine Theory, 2006, 42(9): 1225 - 1237.
- [4] 彭斌彬,肖杰,陈小岗,等. 新型2自由度并联平动机构构型及运动性能[J]. 机械设计与研究, 2010, 26(1): 36 - 39, 47. PENG Binbin, XIAO Jie, CHEN Xiaogang, et al. Synthesis and kinematics performance of a novel 2-DOF parallel translating mechanism[J]. Machine Design and Research, 2006, 42(9): 36 - 39, 47. (in Chinese)
- [5] LIN Sheng, WANG Shuilan, WANG Chun, et al. Kinematics and dynamics analysis of a novel 2PC - CPR parallel mechanism[J]. International Journal of Advanced Robotic Systems, 2016, 13(5): 1 - 10.
- [6] 沈惠平,许正骁,许可,等. 零耦合度且部分解耦的3T1R并联机构设计与运动分析[J]. 农业机械学报, 2019, 50(4): 382 - 392. SHEN Huiping, XU Zhengyao, XU Ke, et al. Design and kinematic analysis of zero coupling and partially decoupled 3T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019, 50(4): 382 - 392. (in Chinese)
- [7] WANG Hongzhou, YANG Ru, KANG Xi, et al. A novel family of parallel mechanisms with synchronous telescopic parallelograms[J]. IEEE Access, 2019, 7: 184802 - 184824.
- [8] LÓPEZ E J, DE LA MORA-PULIDO D, DE LA MORA-PULIDO R, et al. Modeling in two configurations of a 5R 2-DOF planar parallel mechanism and solution to the inverse kinematic modeling using artificial neural network[J]. IEEE Access, 2021, 9: 68583 - 68594.
- [9] 杨廷力. 机器人机构拓扑结构学[M]. 北京:机械工业出版社, 2004.
- [10] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社, 2012.
- [11] 李菊,余俊杰,孔祥超,等. 具有位置封闭解的单回路两平移并联机构:2023116317171[P]. 2023 - 12 - 5.
- [12] 郭宗和,朱松松,崔荣江,等. 3 - PRPS 并联机构的位置正解及应用研究[J]. 中国机械工程, 2013, 24(23): 3220 - 3224. GUO Zonghe, ZHU Songsong, CUI Rongjiang, et al. Research on forward position and application of 3 - PRPS parallel mechanism[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(23): 3220 - 3224. (in Chinese)
- [13] 车林仙,程志红,何兵. 4 - PRUR 并联机构及其位置分析的差分进化算法[J]. 中国机械工程, 2010, 46(23): 36 - 44. CHE Linxian, CHENG Zhihong, HE Bing. 4 - PRUR parallel mechanism and its displacement analysis based on differential evolution algorithm[J]. China Mechanical Engineering, 2010, 46(23): 36 - 44. (in Chinese)
- [14] 杨桂林,吴存存,陈庆盈,等. 3T1R 并联机构运动学分析与优化设计[J]. 农业机械学报, 2017, 48(12): 386 - 394, 420. YANG Guilin, WU Cuncun, CHEN Qingying, et al. Kinematics analysis and design optimization of novel 3T1R parallel manipulator[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2017, 48(12): 386 - 394, 420. (in Chinese)

- [15] 石灿玉, 绍华, 张华, 等. 指定任务空间的并联机构尺度参数多目标优化方法[J]. 武汉科技大学学报, 2024, 47(1): 38–46.  
SHI Canyu, SHAO Hua, ZHANG Hua, et al. A multi-objective optimization method for parallel mechanism dimensional parameters in a specified task space[J]. Journal of Wuhan University of Science and Technology, 2024, 47(1): 38–46. (in Chinese)
- [16] 刘晓飞, 刘洋, 何阳, 等. 2RPU+2UPR+RPR 多冗余驱动并联机构运动学分析与优化[J]. 农业机械学报, 2023, 54(3): 440–450.  
LIU Xiaofei, LIU Yang, HE Yang, et al. Kinematic analysis and dimension optimization of multi-redundantly actuated parallel mechanism 2RPU+2UPR+RPR[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023, 54(3): 440–450. (in Chinese)
- [17] ZHU Wei, XU Zhu, MA Zhiyuan, et al. Performance analysis and optimal design of a novel schöenflies-motion asymmetric parallel mechanism[J]. Journal of Mechanisms Robotics, 2024, 16(2): 021010.
- [18] 杜中秋, 沈惠平, 孟庆梅, 等. 运动解耦且正解符号化的 8R 两平移空间并联机构的设计与性能分析[J]. 中国机械工程, 2023, 34(12): 1425–1435.  
DU Zhongqiu, SHEN Huiping, MENG Qingmei, et al. Design and performance analysis of 8R two-translational spatial parallel mechanism with motion decoupling and symbolic positive solutions[J]. China Mechanical Engineering, 2023, 34(12): 1425–1435. (in Chinese)
- [19] DAVID E F, RAYMOND J C. Assembly configurations of spatial single-loop single-DOF mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2009, 131(10): 101002.
- [20] MEHDI T M, CLÉMENT G. Determination of singularity-free zones in the workspace of planar 3-PRR parallel mechanisms[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(6): 649–652.
- [21] 梁栋, 刘军, 畅博彦, 等. 末端铰接三平动并联机构设计与性能优化[J]. 农业机械学报, 2022, 53(10): 446–458.  
LIANG Dong, LIU Jun, CHANG Boyan, et al. Design and performance optimization of 3-DOF translational parallel mechanism with hinged end structure[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022, 53(10): 446–458. (in Chinese)
- [22] PENG Siyang, CHENG Zhihong, CHE Linxian, et al. Kinematic performance analysis of a parallel mechanism for loading test of hydraulic support[J]. Mechanism and Machine Theory, 2022, 168: 104592.
- [23] 吴昊, 姜运祥, 汤赫男, 等. 2-RRR 并联机构的运动学及工作空间分析[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2024(1): 58–62.  
WU Hao, JIANG Yunxiang, TANG Henan, et al. Analysis on kinematic and workspace of 2-RRR parallel mechanism[J]. Combined Machine Tool and Automatic Machining Technology, 2024(1): 58–62. (in Chinese)
- [24] 沈惠平. 机器人机构拓扑特征运动学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2021.
- [25] 徐冬梅, 刘湘龙, 于思淼, 等. 面向狭长空间的三自由度并联机器人设计与建模[J]. 农业机械学报, 2024, 55(1): 426–435.  
XU Dongmei, LIU Xianglong, YU Simiao, et al. Design and modeling of novel three degree-of-freedom parallel robot for narrow space[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024, 55(1): 426–435. (in Chinese)

~~~~~

(上接第 315 页)

- [25] LI Q, XUE Y. Total leaf area estimation based on the total grid area measured using mobile laser scanning[J]. Computers and Electronics in Agriculture, 2023, 204: 107503.
- [26] 张慧春, 田放飞, 边黎明, 等. 基于多视角图像形态颜色纹理特征融合的生物量获取[J/OL]. 农业机械学报, 2024: 1–16 [2024-07-03]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1964.S.20240618.1749.002.html>.  
ZHANG Huichun, TIAN Qifei, BIAN Liming, et al. Plants biomass acquisition based on morphological, color and texture features of multi-view visible images[J/OL]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2024: 1–16 [2024-07-03]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1964.S.20240618.1749.002.html>. (in Chinese)
- [27] DEL PINO I, VAQUERO V, MASINI B, et al. Low resolution LiDAR-based multi-object tracking for driving applications[C]// Iberian Robotics Conference. Cham: Springer International Publishing, 2017: 287–298.
- [28] LIU T, WANG Y, NIU X, et al. LiDAR odometry by deep learning-based feature points with two-step pose estimation[J]. Remote Sensing, 2022, 14(12): 2764.
- [29] HLOTOV V, PETRYSHYN I. Investigation of the accuracy of determination of coordinates of location points by VLP-16 laser scanner installed on DJI S1000 UAV[J]. Modern Achievements of Geodesic Science and Industry, 2022, 1(43): 101–110.
- [30] 李秋洁, 杨远明, 袁鹏成, 等. 基于饱和度分割的叶面积图像测量方法[J]. 林业工程学报, 2021, 6(4): 147–152.  
LI Qiujie, YANG Yuanming, YUAN Pengcheng, et al. Image measurement method of leaf area based on saturation segmentation[J]. Journal of Forestry Engineering, 2021, 6(4): 147–152. (in Chinese)