

基于PCA/PSO的3T1R并联机构性能优化

蒲志新 潘玉奇 郭建伟 程轶 白杨溪

(辽宁工程技术大学机械工程学院, 阜新 123000)

摘要: 根据少自由度并联机构应用广泛的优点,提出了一种3T1R并联机构,该机构具有构型简单、结构对称、定位精度高等特点,可应用于小范围的精密操作,或者是大范围的搬运、分拣以及喷涂等领域。基于方位特征方程的拓扑分析理论,对该并联机构完成了自由度种类以及数目的分析与验证;基于闭环矢量法完成了运动学模型建立,并通过位置正逆解算例验证了运动学的合理性。基于位置逆解方程利用极限边界搜索法分析了3T1R并联机构可达工作空间;通过速度分析建立了速度雅可比矩阵,并根据该矩阵分析机构的定位精度与可操作性性能指标。利用主成分分析(PCA)与粒子群算法(PSO)对3个性能指标进行优化设计,并对优化结果进行了分析,最终优化后可达工作空间体积从 0.2933 m^3 提高到 0.4231 m^3 ,定位精度误差放大因子从15.5044减小至4.4308,可操作性指数从9.7027减小至1.3996。

关键词: 并联机构; 运动学; 主成分分析; 粒子群算法; 性能优化

中图分类号: TH112 文献标识码: A 文章编号: 1000-1298(2024)06-0404-10

OSID:



Performance Optimization of 3T1R Parallel Mechanism Based on PCA/PSO

PU Zhixin PAN Yuqi GUO Jianwei CHENG Yi BAI Yangxi

(School of Mechanical Engineering, Liaoning Technical University, Fuxin 123000, China)

Abstract: Based on the widely used advantages of low degree of freedom parallel mechanisms (PM), a new-type three translation one rotation (3T1R) parallel mechanism was proposed, which had the characteristics of simple configuration, symmetrical structure, and high positioning accuracy. It can be applied to small-scale precision operations, as well as large-scale transportation, sorting, and spraying major industrial fields. Based on the topology analysis theory of orientation characteristic equation, the azimuth feature set of position and orientation characteristic (POC) was obtained, and the type and number of degrees of freedom (DOF) of the parallel mechanism were analyzed and verified. A kinematic model was established based on the closed-loop vector method, and the rationality of kinematics was verified through a positional forward and inverse solution example and the results indicated that the kinematic model was completely correct. The reachable workspace's three-dimensional point cloud picture of the 3T1R parallel mechanism was analyzed by using the limit boundary search method based on the position inverse solution equation. A velocity Jacobian matrix was established through velocity analysis, and based on it, the positioning accuracy and operability performance indicators of the mechanism were analyzed. The PCA/PSO algorithm was used to optimize the design of the reachable workspace, positioning accuracy and operability as three performance indicators, and the optimization results were compared and analyzed. The final optimized reachable workspace volume was increased from 0.2933 m^3 to 0.4231 m^3 , the positioning accuracy error amplification factor was decreased from 15.5044 to 4.4308, and the operability index was decreased from 9.7027 to 1.3996.

Key words: parallel mechanism; kinematics; principal components analysis; particle swarm optimization; performance optimization

0 引言

少自由度尤其是三平移—转动 (3T1R) 并联机构, 具有结构简单、控制方便、定位精度高等优点, 因此被广泛应用于分拣、搬运等工业领域^[1], 因此对于该类并联机构的研究也越来越受到学者关注。早期提出的 H4^[2]、I4^[3]、IR4^[4]、Part4^[5] 等 3T1R 并联机构已广泛应用于高速分拣、食品包装以及医用药物等生产线^[6]。沈惠平等^[7-8] 提出了一种零耦合度的 3T1R 并联机构, 并对其进行了拓扑分析以及运动学分析; 贺磊盈等^[9] 提出了一种 2-(PRR)₂RH 并联机构, 该机构具有整周的回转能力, 通过将雅可比矩阵齐次化后, 进行了灵巧度性能分析, 并证实了该 3T1R 并联机构在其工作空间区域内具有良好的性能且可应用于分拣等行业; KONG 等^[10] 利用螺旋理论设计了一种 3T1R 并联机构, 其各个支链具有相同结构, 共同完成动平台运动; RICHARD 等^[11] 对一种部分解耦的 3T1R 并联机构进行了运动学分析; 孔民秀等^[12] 提出了一种改进的 3T1R 并联机构, 其将第 4 轴的传动机构用支链 RUPU 代替, 进而可以减小在传动过程中的摩擦; AMINE 等^[13] 以一种 3T1R 并联机构为研究对象, 对其奇异位形进行了研究。

合理参数下的 3T1R 并联机构具有较高的性能指标, 因此对其进行性能分析与优化具有重要意义。李菊等^[14] 以两支链三平移并联机构为研究对象, 根据可达工作空间性能指标对杆长进行了优化, 并以动能传递效率为动力学性能指标, 对各个连杆质量进行优化; 沈惠平等^[15] 设计一种零耦合度的三平移并联机构, 对其进行了运动学分析, 并基于螺旋理论进行了运动/力传递性能指标分析; 蒲志新等^[16] 提出一种新型 3T1R 并联机构, 分析了可达工作空间、定位精度、灵巧度性能指标, 并利用粒子群算法对该机构进行了多目标优化, 得到了一组机构性能较高的设计参数。

本文在文献[14]的基础上, 将并联机构一侧中两端为连杆机构组成的混合支链设计成由 2 个平行四边形共同构成的混合支链, 同时对与动平台连接的平行四边形机构, 再增加 2 个转动副分别连接下端混合支链及动平台, 进而设计一种结构对称的 3T1R 并联机构, 对研究对象进行运动学分析, 并以可达工作空间、定位精度和可操作度为优化目标, 利用主成分分析以及粒子群算法对机构参数进行优化。

1 并联机构

1.1 机构构型

本文研究的 3T1R 并联机构结构简图如图 1 所

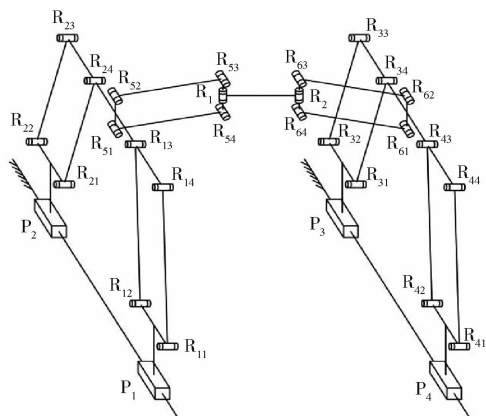


图 1 3T1R 并联机构结构简图

Fig. 1 Structural diagram of 3T1R parallel mechanism

示, 其可看成是 2 条对称的混合支链 I、II 并联连接, 从而共同控制机构动平台完成三平移—转动运动。

由图 1 可知, 混合支链 I (II) 即 HSOC₁ (HSOC₂) 是由机构定平台上 2 个移动副 P₁、P₂ (P₃、P₄) 以及平行四边形运动副 Pa₁、Pa₂ (Pa₃、Pa₄) 组成的子并联机构再串联 Pa₅ 与 R₁ (Pa₆ 与 R₂) 构成。

在混合支链 I 中, 2 个移动副 P₁、P₂ 在定平台同一条导轨的水平线上, 同时平行四边形中各个转动副的转动轴线平行且在水平方向上垂直于移动副 P₁ 的方向, 最后再依次连接平行四边形副 Pa₅ 和动平台。通过分析混合支链 I 可知, 其是由 2 条子链 SOC₁、SOC₂ 末端共线组成的子并联机构再串联 Pa₅ 与 R₁ 组成, 其中 SOC₁ 以及 SOC₂ 是由水平导轨上的移动副 P₁ (P₂) 以及平行四边形副 Pa₁ (Pa₂) 串联构成。同理, 混合支链 II 与支链 I 具有相同且对称的结构, 由 SOC₃、SOC₄ 以及 Pa₆ 与 R₂ 构成。

1.2 基于方位特征方程的拓扑分析

机构末端方位特征方程 (Position and orientation characteristics, POC) 计算公式为^[17-19]

$$M_s = \bigcup_{i=1}^m M_{j_i} \quad (1)$$

式中 M_s——串联机构末端构件 POC 集

m——机构中运动副数目

M_{j_i}——第 i 个运动副相对于末端的 POC 集

$$M_{Pa} = \bigcap_{j=1}^n M_{b_j} \quad (2)$$

式中 M_{Pa}——并联机构末端动平台 POC 集

n——机构中支链数目

M_{b_j}——第 j 条支链末端的 POC 集

HSOC₁ 由 SOC₁ { P₁ - Pa₁^(4R) - } 与 SOC₂ { - P₂ - Pa₂^(4R) - } 组成的子并联机构与 Pa₅、R₁ 串联构成。通过分析子并联机构末端的 POC 集, 再与 { Pa₅ || R₁ } 进行串联分析即可求得 HSOC₁。

SOC₁ 末端 POC 集为

$$\begin{bmatrix} t^1(\parallel P_1) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond a_1 b_1 c_1 d_1) \\ r^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

SOC₂末端 POC 集为

$$\begin{bmatrix} t^1(\parallel P_2) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond a_2 b_2 c_2 d_2) \\ r^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

根据式(1)~(4)可求得 HSOC₁末端 POC 集为

$$M_{b_1} = \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond a_5 b_5 c_5 d_5) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_1) \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \quad (5)$$

同理 HSOC₂具有相同的结构,因此,其末端 POC 集为

$$M_{b_2} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_2) \end{bmatrix}$$

所以,根据式(2)求得并联机构末端 POC 集为

$$\begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \quad (6)$$

1.3 自由度

并联机构全周 DOF 计算式为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} \quad (7)$$

$$\text{其中 } \xi_{L_j} = \dim \left\{ \left(\bigcap_{i=1}^j M_{b_i} \right) \cup M_{b_{(j+1)}} \right\} \quad (8)$$

式中 F ——机构自由度 v ——独立回路数

f_i ——第 i 个运动副自由度

ξ_{L_j} ——第 j 个独立回路独立位移方程数

$\bigcap_{i=1}^j M_{b_i}$ ——前 j 条支链组成子并联机构的末端 POC 集

$M_{b_{(j+1)}}$ ——前 $j+1$ 条支链末端构件 POC 集

根据图 1 可知,独立回路数 v 为 3,其中,第 1 条独立回路为混合支链 I 中 SOC₁与 SOC₂构成的子并联机构 1,根据式(8)可求得其独立位移方程数为

$$\xi_{L_1} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \right\} = 2$$

第 2 条独立回路由子并联机构 1 与平行四边形副 Pa₅、Pa₆ 构成的子并联机构 2 以及混合支链 HSOC₂中的 SOC₃构成,根据式(8)确定其独立位移方程数为

$$\xi_{L_2} = \dim \left\{ \left(\begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond P_1, Pa_1) \\ r^0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond P_2, Pa_2) \\ r^0 \end{bmatrix} \right) \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond Pa_5) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\perp R_1) \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond Pa_6) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \left(\begin{bmatrix} t^1(\parallel \diamond Pa_3) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^1(\parallel P_3) \\ r^0 \end{bmatrix} \right) \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \right\} = 4$$

第 3 条独立回路由子并联机构 2 与混合支链 HSOC₂中的 SOC₃构成的子并联机构 3,以及混合支链 HSOC₂中的 SOC₄构成,因此根据式(8)确定其独立位移方程数为

$$\xi_{L_3} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^3 \\ r^1(\parallel R_1) \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond P_3, Pa_3) \\ r^0 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} t^2(\parallel \diamond P_4, Pa_4) \\ r^0 \end{bmatrix} \right\} = \dim \left\{ \begin{bmatrix} t^2 \\ r^0 \end{bmatrix} \right\} = 2$$

求得并联机构的自由度为

$$F = \sum_{i=1}^m f_i - \sum_{j=1}^v \xi_{L_j} = 12 - (2 + 4 + 2) = 4$$

根据式(6)可以看出,当以 4 个移动副 P₁、P₂、P₃、P₄为驱动副时,末端动平台能够完成 3 个方向平移以及绕竖直方向转动的运动。

1.4 耦合度

由基于序单开链(Single open chain, SOC)的机构组成原理可知^[20-21],机构均可划分为若干个独立最小子运动链单元(Sub-kinematics chain, SKC),而 SKC 又可分解为若干单开链(SOC),第 j 个 SOC _{j} 的约束度为

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m_j} f_i - I_j - \xi_{L_j} = \begin{cases} \Delta_j^- = -5, -4, -3, -2, -1 \\ \Delta_j^0 = 0 \\ \Delta_j^+ = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (9)$$

式中 m_j ——第 j 条有序单开链运动副数目

I_j ——第 j 条有序单开链驱动副数目

则机构耦合度为

$$\kappa = \Delta_j^+ = |\Delta_j^-| = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} \quad (10)$$

耦合度 κ 的意义在于揭示机构回路变量之间的关联与依赖程度, κ 越大表示机构运动学与动力学分析越复杂。

根据 1.3 节已经确定 3 个独立位移方程数分别为 2、4、2。由式(9)确定各个独立回路约束度分别为

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{m_1} f_i - I_1 - \xi_{L_1} = 4 - 2 - 2 = 0$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{m_2} f_i - I_2 - \xi_{L_2} = 6 - 1 - 4 = 1$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{m_3} f_i - I_3 - \xi_{L_3} = 2 - 1 - 2 = -1$$

最终根据式(10)得到并联机构耦合度为

$$\kappa = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{j=1}^v |\Delta_j| \right\} = \frac{1}{2} (0 + 1 + 1) = 1$$

根据文献[8]可知,研究的 3T1R 并联机构动平

台的方位变量均需要用 4 个驱动副输入来表示,因此其运动输入-输出变量之间不存在运动解耦性。

2 运动学分析

并联机构运动学分析主要包括位置正逆解的分析,其目的是确定动平台位姿与主动关节位移之间的关系方程^[22]。

2.1 坐标系建立以及相关参数定义

在运动学分析前需建立定坐标系以及动坐标系,如图 2 所示。

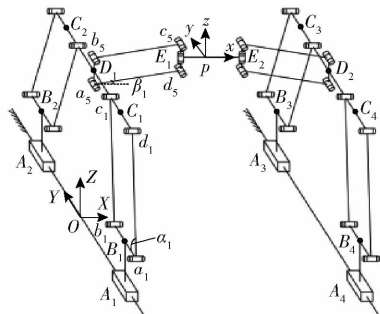


图 2 并联机构运动学简图

Fig. 2 Kinematic diagram of parallel mechanism

在定平台上导轨中,以 A_1 和 A_2 中心为原点 O 建立定坐标系 XYZ ,其中 X 轴垂直于导轨且指向 A_3 、 A_4 中点, Y 轴平行于导轨且指向移动副 A_2 , Z 轴正方向为竖直向上;以动平台中心点 p 为原点建立动坐标系 $pxyz$,在初始姿态下,动平台坐标轴各个方向与定坐标系相同,机构杆件以及动平台尺寸参数如表 1 所示。

表 1 并联机构相关参数

Tab. 1 Relevant parameters of parallel mechanisms

参数	数值
连杆 $A_i B_i (i=1,2,3,4)$ 长度 l_1/m	0.30
平行四边形 $Pa_i (i=1,2,3,4)$ 中连杆 $B_i C_i$ 长度 l_2/m	0.65
平行四边形 $Pa_i (i=1,2,3,4)$ 中 $a_i b_i$ 边长一半 a/m	0.15
连杆 $C_1 D_1$ 长度 b/m	0.55
平行四边形 $Pa_i (i=5,6)$ 中连杆 $D_i E_i$ 长度 l_3/m	0.50
动平台尺寸($E_1 E_2$ 长度)一半 r/m	0.15
两导轨之间距离 c/m	0.80

2.2 正解分析

已知在定坐标系中动平台坐标为 (x, y, z, θ) ,因此根据图 2 可以确定动坐标系 $pxyz$ 相对于定坐标系 $OXYZ$ 的方向位移为 $\mathbf{p} = (x, y, z)^T$,基于其末端绕 z 轴旋转的运动特性,可以确定旋转变换矩阵为

$$\mathbf{M}_O^p = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 θ ——动平台转角

根据图 2 可知, $C_1、C_2、C_3、C_4$ 在定坐标系以及 $E_1、E_2$ 在动坐标系中的坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1^O = \left(0, \frac{P_1 + P_2}{2} - b, l_1 + l_2 \sin\alpha_1 \right) \\ \mathbf{C}_2^O = \left(0, \frac{P_1 + P_2}{2} + b, l_1 + l_2 \sin\alpha_1 \right) \\ \mathbf{C}_3^O = \left(c, \frac{P_3 + P_4}{2} + b, l_1 + l_2 \sin\alpha_3 \right) \\ \mathbf{C}_4^O = \left(c, \frac{P_3 + P_4}{2} - b, l_1 + l_2 \sin\alpha_3 \right) \\ \mathbf{E}_1^p = (-r, 0, 0) \\ \mathbf{E}_2^p = (r, 0, 0) \end{cases} \quad (12)$$

$P_i (i=1,2,3,4)$ 为移动副 P_i 长度。 $\alpha_i (i=1,2,3,4)$ 为 4 个连接于定平台上方 4 个连杆的平行四边形转角,其可根据机构侧面视图进行分析计算,如图 3 所示。

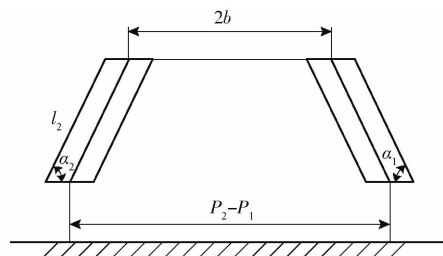


图 3 并联机构侧视图

Fig. 3 Side view of parallel mechanism

根据并联机构对称特性可得

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \arccos((P_2 - P_1 - 2b)/(2l_2)) \\ \alpha_3 = \alpha_4 = \arccos((P_3 - P_4 - 2b)/(2l_2)) \end{cases} \quad (13)$$

由式(11)和式(12)可得, $D_1、D_2、E_1、E_2$ 在定坐标系中的坐标为

$$\begin{cases} \mathbf{D}_1^O = (0, (P_1 + P_2)/2, l_1 + l_2 \sin\alpha_1) \\ \mathbf{D}_2^O = (c, (P_3 + P_4)/2, l_1 + l_2 \sin\alpha_3) \\ \mathbf{E}_1^O = \mathbf{p} + \mathbf{M}_O^p \mathbf{E}_1^p \\ \mathbf{E}_2^O = \mathbf{p} + \mathbf{M}_O^p \mathbf{E}_2^p \end{cases} \quad (14)$$

当并联机构确定时,其特定约束条件为

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1^O [Y] = \mathbf{D}_1^O [Y] \\ \mathbf{E}_2^O [Y] = \mathbf{D}_2^O [Y] \\ \|\mathbf{D}_1 E_1\|^2 = \|\mathbf{D}_2 E_2\|^2 = l_3^2 \end{cases} \quad (15)$$

由式(14)、(15)得到位置正解关系式为

$$\begin{cases} y - r \sin\theta = (P_1 + P_2)/2 \\ y + r \sin\theta = (P_3 + P_4)/2 \\ (x - r \cos\theta)^2 + (z - l_1 - l_2 \sin\alpha_1)^2 = l_3^2 \\ (x + r \cos\theta - c)^2 + (z - l_1 - l_2 \sin\alpha_3)^2 = l_3^2 \end{cases} \quad (16)$$

位置正解为已知驱动副位移 (P_1, P_2, P_3, P_4) ,

求解该机构动平台的坐标 (x, y, z, θ) 。根据约束关系式(16)直接进行解方程组,进而可以得到位置正解方程为

$$x = \begin{cases} -\frac{2M_2\sigma_1 - 2M_4\sigma_1 - M_1^2 - M_2^2 + M_3^2 + M_4^2}{2M_1 + 2M_3} \\ -\frac{2M_2\sigma_2 - 2M_4\sigma_2 - M_1^2 - M_2^2 + M_3^2 + M_4^2}{2M_1 + 2M_3} \end{cases}$$

$$y = \frac{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{P_3 + P_4 - P_1 - P_2}{4r}$$

$$z = \frac{M_2 + M_4 \pm (M_1\sigma_3 + M_3\sigma_3)}{2}$$

其中

$$M_1 = r\cos\theta \quad M_2 = l_1 + l_2\sin\alpha_1$$

$$M_3 = r\cos\theta - c \quad M_4 = l_1 + l_2\sin\alpha_2$$

$$\sigma_1 = \frac{M_2 + M_4 + M_1\sigma_3 + M_3\sigma_3}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_2 + M_4 - (M_1\sigma_3 + M_3\sigma_3)}{2}$$

$$\sigma_3 = \sqrt{-\frac{(M_1 + M_3)^2 + (M_2 + M_4)^2 - 4l_3^2}{(M_1 + M_3)^2 + (M_2 + M_4)^2}}$$

2.3 逆解分析

位置逆解为已知动平台坐标 (x, y, z, θ) ,求解驱动副位移 (P_1, P_2, P_3, P_4) 。将式(13)代入式(16)

表2 位置逆解算例

Tab.2 Example of position inverse solution

逆解算例	x/m	y/m	z/m	θ/rad	P_1/m	P_2/m	P_3/m	P_4/m
1	0.400 0	0.200 0	0.400 0	0.523 6	-0.990 3	1.240 3	1.390 3	-0.840 3
					-0.814 0	1.064 0	1.390 3	-0.840 3
					-0.990 3	1.240 3	1.214 0	-0.664 0
					-0.814 0	1.064 0	1.214 0	-0.664 0
2	0.500 0	0	1.100 0	0	-1.025 7	1.025 7	1.114 0	-1.114 0

表3 位置正解算例

Tab.3 Example of positive position solution

正解算例	P_1/m	P_2/m	P_3/m	P_4/m	x/m	y/m	z/m	θ/rad
1	-0.814 0	1.064 0	1.214 0	-0.664 0	0.400 0	0.200 0	0.400 1	0.523 6
					0.400 0	0.200 0	1.241 5	0.523 6
					0.400 0	0.200 0	0.400 1	2.618 0
					0.400 0	0.200 0	1.241 5	2.618 0
2	-1.025 7	1.025 7	1.114 0	-1.114 0	0.300 0	0	0.266 0	0
					0.500 0	0	1.100 1	0
					0.300 0	0	1.100 1	3.141 6
					0.500 0	0	0.266 0	3.141 6

从表3可看出,其正解算例1中的第1组数据与设定的动平台初始位姿 $x=0.4\text{ m}, y=0.2\text{ m}, z=0.4\text{ m}, \theta=30^\circ$ 相吻合,正解算例2中的第2组数据与初始位姿 $x=0.5\text{ m}, y=0\text{ m}, z=1.1\text{ m}, \theta=0^\circ$ 相吻合,因此完成了机构运动学验证。

中,进而求得机构的位置逆解方程为

$$\begin{cases} P_1 = N_1 - b - \sqrt{l_2^2 - M_5^2} \\ P_2 = N_1 + b + \sqrt{l_2^2 - M_5^2} \\ P_3 = N_2 + b + \sqrt{l_2^2 - M_6^2} \\ P_4 = N_2 - b - \sqrt{l_2^2 - M_6^2} \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$N_1 = y - r\sin\theta \quad N_2 = y + r\sin\theta$$

$$M_5 = l_1 - z \pm \sqrt{l_3^2 - (x - r\cos\theta)^2}$$

$$M_6 = l_1 - z \pm \sqrt{l_3^2 - (x + r\cos\theta - c)^2}$$

因此,从式(17)可以看出,该机构最多存在4组位置逆解。

2.4 算例验证

位置正解与位置逆解中均存在4组不同解,求解算例前,首先定义机构相关尺寸参数为 $b=0.55\text{ m}, c=0.8\text{ m}, l_1=0.3\text{ m}, l_2=0.65\text{ m}, l_3=0.5\text{ m}, r=0.15\text{ m}$ 。

根据式(17),利用 Matlab 进行编程,将相关尺寸参数代入,并取2组机构动平台的初始位姿,进而得到2组驱动副位移 (P_1, P_2, P_3, P_4) 算例,如表2所示。

同理,取逆解算例1的第4行数据以及逆解算例2,并采用相同的尺寸参数,将相应数值代入到 Matlab 的位置正解程序中,进而得到2组动平台位姿 (x, y, z, θ) ,如表3所示。

3 性能指标分析

3.1 可达工作空间

并联机构性能取决于其工作空间形状及大小,因此对工作空间进行求解十分必要。

该机构工作空间分为上下两部分,为了避免奇异位置的出现以及方便后续分析,选取上部分工作空间为对象,根据机构本身的特性、机构逆解表达式与驱动副,确定约束条件为

$$\begin{cases} \Delta_1 = l_3^2 - (x - r\cos\theta)^2 \geq 0 \\ \Delta_2 = l_3^2 - (x + r\cos\theta - c)^2 \geq 0 \\ \Delta_3 = l_2^2 - M_1^2 \geq 0 \\ \Delta_4 = l_2^2 - M_2^2 \geq 0 \\ 15^\circ \leq \alpha_3 \leq 75^\circ \\ \beta_1 > 0^\circ \\ \beta_2 > 0^\circ \\ -2 \text{ m} \leq P_1, P_2, P_3 \leq 2 \text{ m} \end{cases}$$

β_1, β_2 分别为 $\text{Pa}_i (i=5,6)$ 中 $a_i d_i$ 与 X 轴夹角。工作空间求解较为复杂,且存在许多种类的方法来求解工作空间,其中基于位置逆解的求法最简单、实用。采用极限边界搜索法工作空间进行研究,其搜索过程如图4所示。

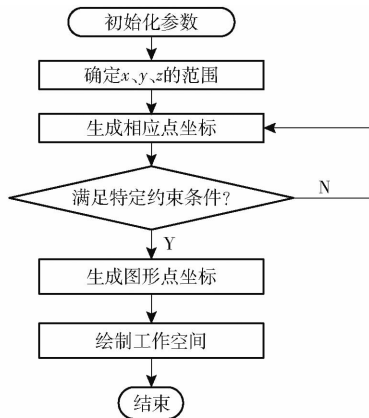


图4 工作空间搜索流程

Fig. 4 Workspace search process

根据该流程,采用极限边界搜索的方法,利用Matlab编程,得到工作空间形状如图5所示。

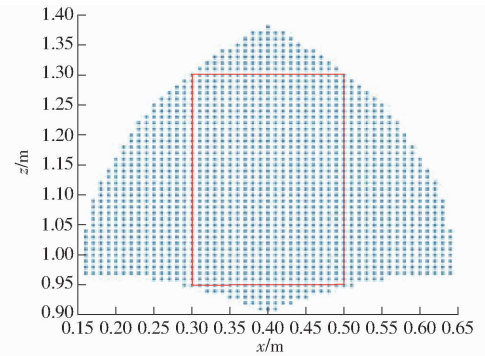
从图5a可以看出,当驱动副在特定移动范围时,在 Y 轴方向特定范围内的工作空间中,并联机构具有各向同性的特征,后续将在该范围内进行性能分析。

该并联机构可以通过增大驱动副的范围,从而提升其工作空间体积,因此其可以应用在小范围的精密操作,或者是大范围搬运、分拣以及喷涂等领域。

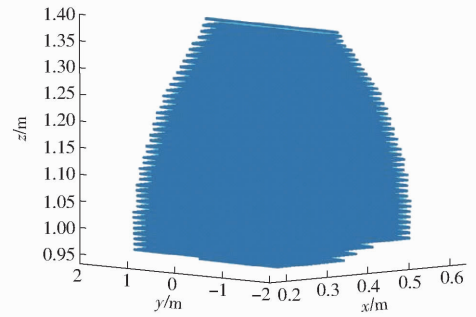
3.2 定位精度

定位精度是并联机构重要的性能指标之一,通过对机构输入速度偏差与输出速度偏差进行运动学分析,可以得到误差放大因子为

$$C_j = \| \mathbf{J} \| \| \mathbf{J}^{-1} \| = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (18)$$



(a) XOZ平面工作空间



(b) XYZ工作空间

图5 机构工作空间

Fig. 5 Institutional workspace

式中 $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ ——雅可比矩阵最大、最小特征值

误差放大因子 C_j 表示机构定位精度,数值越小,机构定位精度越高;其取决于机构速度雅可比矩阵 \mathbf{J} ,它表示各支链主动关节输入速度与末端执行器输出速度之间的映射关系,数学关系式为

$$\mathbf{J}_p \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{J}_o \dot{\mathbf{X}} \quad (19)$$

其中

$$\dot{\mathbf{X}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\theta})^T$$

$$\dot{\mathbf{P}} = (\dot{P}_1, \dot{P}_2, \dot{P}_3, \dot{P}_4)^T$$

式中 \mathbf{J}_p ——输入雅可比矩阵

\mathbf{J}_o ——输出雅可比矩阵

$\dot{\mathbf{X}}$ ——动平台输出速度矢量

$\dot{\mathbf{P}}$ ——驱动副输入速度矢量

将式(16)对时间 t 进行求导,代入式(19),并根据图2并联机构运动学简图,可得并联机构速度雅可比矩阵为

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_o^{-1} \mathbf{J}_p$$

其中

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sin\beta_1}{2\tan\alpha_1} & -\frac{\sin\beta_1}{2\tan\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sin\beta_2}{2\tan\alpha_3} & \frac{\sin\beta_2}{2\tan\alpha_3} \end{bmatrix}$$

$$J_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -r\cos\theta \\ 0 & 1 & 0 & r\cos\theta \\ \cos\beta_1 & 0 & \sin\beta_1 & r\cos\beta_1\sin\theta \\ -\cos\beta_2 & 0 & \sin\beta_2 & r\cos\beta_2\sin\theta \end{bmatrix}$$

根据该并联机构小范围精密的应用场合或者大范围分拣等领域,保证其精度前提下具有更大的工作空间,因此选取其工作空间、定位精度及可操作度性能指标作为多目标优化函数变量。

根据式(18),在 Matlab 中进行编程分析,取姿态角为 0° ,根据图 5a 该机构在 Y 轴方向具有各向同性特征,因此以 $y = 0$ m 处的平面为例,绘制定位精度指数分布情况如图 6 所示。

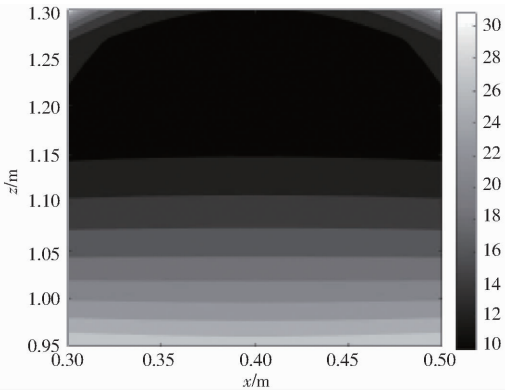


图6 定位精度指数分布

Fig. 6 Distribution of positioning accuracy index

由图 6 可以看出,由于选取两侧导轨间距 $c = 0.8$ m,使得定位精度以 $x = 0.4$ m 即两侧导轨中间处为中心线呈对称分布,符合并联机构本身的结构特征。并且定位精度在 Z 轴方向从下到上有层次地明显增高,当 $z = 1.15$ m 时,误差放大因子达到最小值 10,即定位精度最佳,并且在特定的区域内,误差放大因子均为最小值 10,因此,在实际应用场合中,可以将该区域内的工作空间作为实际分拣的主要工作区域。

3.3 可操作度

可操作度性能指标是指动平台在可达位置工作空间内变化位姿的能力,是并联机构性能分析中重要的一部分。通过分析并联机构的速度雅可比矩阵,选取可操作度评价指标 ω_j 作为并联机构可操作度性能指标,其计算式为

$$\omega_j = \sqrt{\det(\mathbf{J}^T \mathbf{J})} = |\det(\mathbf{J})| \quad (20)$$

可操作度评价指标 ω_j 为 1 时,并联机构的可操作度最佳。再次取中间位置 $y = 0$ m 处的平面,绘制定位精度指数分布情况如图 7 所示。

由图 7 可知,可操作度指数也以 $x = 0.4$ m 为中心线呈对称分布,与机构特点相符合,同时在 Z 轴方向从下到上可操作度性能指标有层次地明显增高。

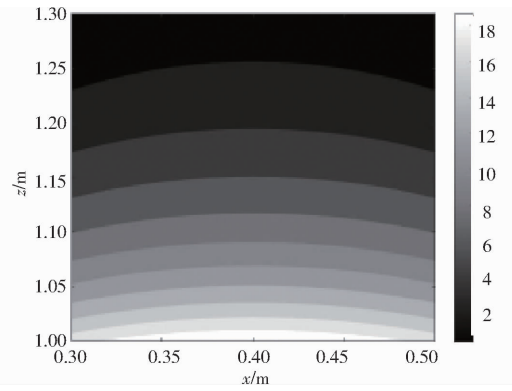


图7 可操作度指数分布

Fig. 7 Distribution of operability index

4 性能优化

主成分分析法 (Principal components analysis, PCA) 是一种使用最广泛的数据降维算法^[23],这种方法可以避免人为对各指标权重的随意性,从而能够更客观地分析每个指标的权重。

粒子群算法 (Particle swarm optimization, PSO) 具有收敛快、参数少、算法易实现等优点^[24]。

4.1 性能指标

假设目标函数以最小值为最优条件,因此可达工作空间、定位精度、可操作度原始性能指标数据 f_1 、 f_2 、 f_3 可分别定义为

$$\begin{cases} f_1 = |W_V - 1| \\ f_2 = C_{WJ} \\ f_3 = |\omega_{WJ} - 1| \end{cases} \quad (21)$$

式中 W_V ——可达工作空间评价指标,即工作空间包含的点数与搜索总点数比值

C_{WJ} ——工作空间下机构平均定位精度

ω_{WJ} ——工作空间下机构平均可操作度

利用 Matlab 计算出设计参数不断变化下的 f_1 、 f_2 、 f_3 ,如表 4 所示。

表4 原始指标数据

Tab. 4 Original indicator data

序号	f_1	f_2	f_3
1	0.898 8	23.828 0	19.074 4
2	0.836 3	20.959 4	16.221 5
3	0.794 6	19.418 6	13.680 6
4	0.761 9	19.006 1	12.183 0
⋮	⋮	⋮	⋮
97	0.589 3	27.334 6	20.524 4
98	0.500 0	20.780 3	13.561 0
99	0.431 5	17.211 8	10.836 3
100	0.410 7	16.143 5	10.242 4

不同的性能指标需要利用 Z-Score 标准化进行数据处理,其标准化公式为

$$\begin{cases} Z_{ij} = (f_{ij} - \bar{f}_j) / S_j \\ \bar{f}_j = \sum_{i=1}^m f_{ij} / s \\ S_j = \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_{ij} - \bar{f}_j)^2 / (s - 1)} \end{cases} \quad (22)$$

$$\alpha_{f_i} = \lambda_i / \sum_{i=1}^p \lambda_i \times 100\% \quad (24)$$

式中 Z_{ij} ——标准化后的性能指标数据
 f_{ij} ——原始指标数据
 \bar{f}_j ——单项原始指标数据平均值
 s ——所取原始数据数,取 100
 S_j ——单项原始指标数据均方根

利用式(22)对表 4 中的原始数据进行标准化处理,最终得到标准化后的可达工作空间、全域定位精度、全域可操作度性能指标,如表 5 所示。

表 5 标准化后性能指标

Tab.5 Performance index data after standardization

序号	z_1	z_2	z_3
1	1.343 0	1.683 7	1.564 2
2	1.051 7	0.867 5	0.861 3
3	0.857 6	0.429 1	0.235 2
4	0.705 0	0.311 8	-0.133 6
⋮	⋮	⋮	⋮
97	-0.099 3	2.681 4	1.921 5
98	-0.515 3	0.816 5	0.205 8
99	-0.834 3	-0.198 7	-0.465 5
100	-0.931 4	-0.502 6	-0.611 8

z_1, z_2, z_3 分别表示标准化后可达工作空间、定位精度、可操作度指标。

4.2 优化目标函数建立

确定 3 个性能指标的权重需要考虑表 5 中不同指标间的相关性,其可以利用相关系数矩阵 R 表示,计算式为

$$R = \frac{1}{s-1} Z^T Z \quad (23)$$

式中 Z ——标准化后指标数据矩阵

根据式(23)可以得到标准化性能指标数据的相关系数矩阵,如表 6 所示。

表 6 性能指标相关系数矩阵

Tab.6 Performance index correlation coefficient matrix

	R_1	R_2	R_3
R_1	1	0.372 3	0.269 6
R_2	0.372 3	1	0.896 8
R_3	0.269 6	0.896 8	1

从表 6 可以看出, z_1 与 z_2 的相关系数为 $0.372 3 \times (R_1 - R_2)$, z_1 与 z_3 的相关系数为 $0.269 6 (R_1 - R_3)$, z_2 与 z_3 的相关系数为 $0.896 8 (R_2 - R_3)$ 。通过相关系数可以确定方差贡献率,其计算公式为

式中 α_{f_i} ——方差贡献率
 p ——相关系数矩阵阶数,取 3
 λ_i ——相关系数矩阵中特征值, $i = 1, 2, 3$

相应的,主成分筛选中所确定的前 k 个主成分所能解释的全部方差占总方差的比例称为累计方差贡献率,其公式为

$$\alpha_{i_k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i / \sum_{i=1}^p \lambda_i \times 100\% \quad (25)$$

式中 α_{i_k} —— $i = k$ 时累计方差贡献率
 k ——当前主成分数

根据式(24)、(25)可以计算出各个主成分的方差贡献率以及累计方差贡献率,如表 7 所示。

表 7 各个主成分累计方差贡献率

Tab.7 Cumulative variance contribution rate of each principal component

单位特征向量	α_{f_i}	α_{i_k}
(0.389 2, 0.661 9, 0.640 6)	69.64	69.64
(0.916 0, -0.204 5, -0.345 2)	27.12	96.76
(-0.097 5, 0.721 1, -0.685 9)	3.24	100

当主成分累积方差贡献率达到某一特定值(一般 80% 以上),可以保留当前的主成分^[25],因此可以确定第 1 主成分及第 2 主成分表达式为

$$\begin{cases} F_1 = 0.389 2 f_1 + 0.661 9 f_2 + 0.640 6 f_3 \\ F_2 = 0.916 0 f_1 - 0.204 5 f_2 - 0.345 2 f_3 \end{cases} \quad (26)$$

优化目标函数 F 求解式为

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_{f_i} F_i \quad (27)$$

根据机构特性可知,需要满足

$$2l_3 + 2r \cos \theta \geq c$$

因此由式(27)最终建立优化目标函数为

$$\begin{cases} \min_{r, c, l_2, l_3} F(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_{f_i} F_i = \\ 0.519 4 f_1 + 0.405 5 f_2 + 0.352 5 f_3 \\ 0.05 \text{ m} \leq r \leq 0.35 \text{ m} \\ 0.65 \text{ m} \leq c \leq 1.35 \text{ m} \\ 0.3 \text{ m} \leq l_2 \leq 1.5 \text{ m} \\ 0.5 \text{ m} \leq l_3 \leq 1.3 \text{ m} \end{cases} \quad (28)$$

4.3 性能优化与结果分析

根据式(28)在 Matlab 中利用 PSO 算法进行优化设计,其参数配置如表 8 所示,最终优化结果如表 9 所示。

为了更直观地描述优化结果,分别对 3 个性能指标进行分析,如图 8 所示。

表8 PSO算法参数配置

Tab.8 Parameter configuration of PSO algorithm

参数	种群大小	迭代次数	自我学习因子	社会学习因子	权重系数
数值	50	450	1.8	2.0	2.0

表9 优化结果对比

Tab.9 Comparison of optimization results

项目	r/m	c/m	l_2/m	l_3/m	V/m^3
原方案	0.150 0	0.800	0.650 0	0.500 0	0.293 3
优化后	0.249 7	1.256 7	0.630 6	1.073 2	0.423 1

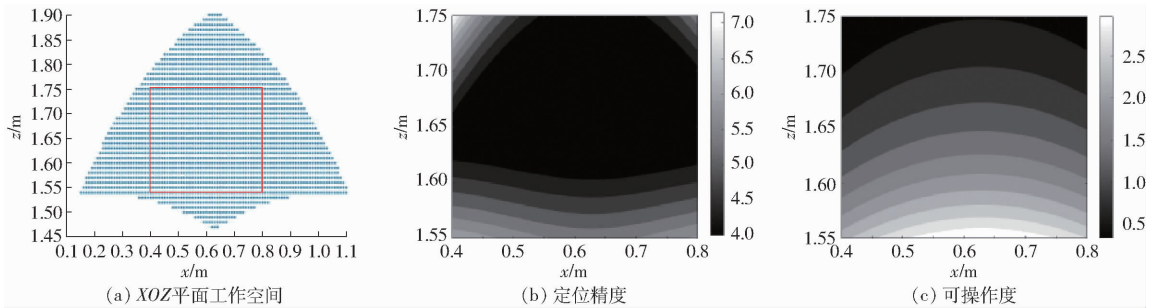


图8 优化后性能指标

Fig.8 Performance indicators after optimization

从图8与图5~7对比可以发现,优化后性能指标相较于优化前有显著提升,工作空间在 X 轴方向的范围明显增大,经计算体积从 0.2933 m^3 提高到 0.4231 m^3 ;同时工作空间内定位精度误差放大因子从 15.5044 减小至 4.4308 ;工作空间内可操作度指数也从 9.7027 减小至 1.3996 ,即区域内大部分指数接近于1。

5 结论

(1)提出一种构型简单、结构对称、应用场合广泛的3T1R并联机构,该机构工作空间内在 Y 轴方

向的特定范围内具有各向同性的特征,且通过增长导轨范围进而可以增大工作空间的体积。

(2)建立了机构运动学模型,分析机构位置逆解,通过正逆解算例进行验证,并分析了机构的可达工作空间、定位精度以及可操作度性能指标。

(3)基于PCA/PSO算法对3T1R并联机构进行了多目标性能优化,优化后并联机构可达工作空间体积从 0.2933 m^3 提高到 0.4231 m^3 ;定位精度误差放大因子从 15.5044 减小至 4.4308 ;可操作度指数也从 9.7027 减小至 1.3996 。

参 考 文 献

- [1] 冯志友,李永刚,张策,等.并联机器人机构运动与动力分析研究现状及展望[J].中国机械工程,2006,17(9):979-984. FENG Zhiyou, LI Yonggang, ZHANG Ce, et al. Current status and prospects of kinematic and dynamic analysis of parallel robot mechanisms[J]. China Mechanical Engineering, 2006,17(9): 979-984. (in Chinese)
- [2] PIERROT F. H4: a new family of 4-DOF parallel robots[C]//Advanced Intelligent Mechatronics. IEEE, 1999: 508-513.
- [3] KRUT S, BENOIT M, OTA H, et al. I4: a new parallel mechanism for Scara motions [C]//Robotics and Automation, Proceedings of ICRA 03, IEEE International Conference on. IEEE, 2003: 1875-1880.
- [4] KRUT S, NABAT V, PIERROT F. A high-speed parallel robot for Scara motions[C]//Robotics and Automation, Proceedings of ICRA 04, IEEE International Conference on. IEEE, 2004: 4109-4115.
- [5] NABAT V, RODRIGUEZ M, COMPANY O, et al. Part4: very high speed parallel robot for pick-and-place [C]//Intelligent Robots and Systems 2005 (IROS 2005), IEEE/RSJ International Conference on. IEEE, 2005: 553-558.
- [6] 刘伟,刘宏昭,胡旭宇.具有固定转动轴线和变转动轴线3T1R并联机构构型综合[J].农业机械学报,2022,53(2):451-458. LIU Wei, LIU Hongzhao, HU Xuyu. Configuration synthesis of 3T1R parallel mechanisms with fixed and variable rotation axes [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(2): 451-458. (in Chinese)
- [7] 沈惠平,许正骁,许可,等.零耦合度且部分解耦的3T1R并联机构设计与运动分析[J].农业机械学报,2019,50(4):382-392. SHEN Huiping, XU Zhengxiao, XU Ke, et al. Design and motion analysis of a zero coupling and partially decoupled 3T1R parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(4): 382-392. (in Chinese)
- [8] 沈惠平,许可,杨廷力,等.一种零耦合度且运动解耦的新型3T1R并联操作手2-(RPa3R)3R的设计及其运动学[J].机械工程学报,2019,55(5):53-64. SHEN Huiping, XU Ke, YANG Tingli, et al. Design and kinematics of a novel 3T1R parallel manipulator 2-(RPa3R)3R with zero coupling and motion decoupling[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019,55(5): 53-64. (in Chinese)
- [9] 贺磊盈,涂叶凯,叶伟,等.一种可整周回转的新型3T1R并联机构运动学分析[J].机械工程学报,2018,54(11):151-160. HE Leiyong, TU Yekai, YE Wei, et al. Kinematic analysis of a novel 3T1R parallel mechanism with full rotation[J]. Journal of

- Mechanical Engineering, 2018,54(11):151-160. (in Chinese)
- [10] KONG X W, GOSSELIN C M. Type synthesis of 3T1R 4-DOF parallel manipulators based on screw theory[J]. Robotics and Automation, IEEE Transactions on, 2004,20(2):181-190.
- [11] RICHARD P L, COSSELIN C M, KONC Xianwen. Kinematic analysis and prototyping of a partially decoupled 4-DOF 3T1R parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Design, 2006,129(6):611-616.
- [12] 孔民秀,梁恒斌. 并联连杆形式的Delta机器人第四轴传动机构:201410085290.4[P]. 2104-07-09.
- [13] AMINE S, MASOULEH M T, CARO S, et al. Singularity conditions of 3T1R parallel manipulators with identical limb structure[J]. ASME Journal of Mechanisms and Robotics, 2012,4(1):49-75.
- [14] 李菊,肖思进,沈惠平,等. 两支链三平移并联机构动力学分析与性能优化[J]. 农业机械学报, 2022,53(10):412-422,445. LI Ju, XIAO Sijin, SHEN Huiping, et al. Dynamics analysis and performance optimization of two-chain three-translation parallel mechanism[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(10):412-422,445. (in Chinese)
- [15] 沈惠平,吉昊,许正骁,等. 三平移机构设计与运动学符号解及性能评价[J]. 农业机械学报, 2020,51(9):397-407. SHEN Huiping, JI Hao, XU Zhengxiao, et al. Design and kinematic symbolic solution and performance evaluation of three translation mechanisms[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2020,51(9):397-407. (in Chinese)
- [16] 蒲志新,郭建伟,潘玉奇,等. 2PPaPaR 并联机构性能分析及优化设计[J]. 中国机械工程, 2023,34(19):2304-2312. PU Zhixin, GUO Jianwei, PAN Yuqi, et al. Performance analysis and optimization design of 2PPaPaR parallel mechanism [J]. China Mechanical Engineering, 2023,34(19):2304-2312. (in Chinese)
- [17] 李菊,朱忠顺,沈惠平,等. 三平移并联机构拓扑设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2022,53(9):425-433,442. LI Ju, ZHU Zhongqi, SHEN Huiping, et al. Topological design and kinematic analysis of three translational parallel mechanisms[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2022,53(9):425-433,442. (in Chinese)
- [18] 黄凯伟,沈惠平,李菊,等. 一种具有部分运动解耦和符号式位置正解的空间2T1R 并联机构拓扑设计与动力学建模[J]. 中国机械工程, 2022,33(2):160-169. HUANG Kaiwei, SHEN Huiping, LI Ju, et al. Topological design and dynamic modeling of a spatial 2T1R parallel mechanism with partial motion decoupling and symbolic position forward solution [J]. China Mechanical Engineering, 2022,33(2):160-169. (in Chinese)
- [19] 廖明,刘安心,沈惠平,等. 并联机构方位特征集的符号推导方法[J]. 农业机械学报, 2016,47(3):395-404. LIAO Ming, LIU Anxin, SHEN Huiping, et al. Symbolic derivation method for directional feature sets of parallel mechanisms [J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2016,47(3):395-404. (in Chinese)
- [20] 杨廷力,刘安心,罗玉峰,等. 机器人机构拓扑结构设计[M]. 北京:科学出版社,2012.
- [21] 刘辛军,谢福贵,汪劲松,等. 并联机器人机构学基础[M]. 北京:高等教育出版社,2018.
- [22] 沈惠平,赵一楠,许正骁,等. 低耦合度半对称三平移并联机构拓扑设计与运动学分析[J]. 农业机械学报, 2019,50(3):404-411,357. SHEN Huiping, ZHAO Yi-nan, XU Zhengxiao, et al. Topological design and kinematic analysis novel asymmetric 3-translation parallel manipulator with low coupling degree[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2019,50(3):404-411,357. (in Chinese)
- [23] 李研彪,王泽胜,孙鹏,等. 一种四自由度冗余串并混联拟人机械臂的动载协调分配优化[J]. 机械工程学报, 2020,56(9):45-54. LI Yانبiao, WANG Zesheng, SUN Peng, et al. Optimization of dynamic load coordination distribution for a four degree of freedom redundant series parallel hybrid humanoid robotic arm[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020,56(9):45-54. (in Chinese)
- [24] 陈明方,何朝银,张永霞,等. 2TPR2TPS 并联机器人结构参数辨识[J]. 农业机械学报, 2023,54(10):421-431. CHEN Mingfang, HE Chaoyin, ZHANG Yongxia, et al. Structural parameter identification of 2TPR2TPS parallel robot[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery, 2023,54(10):421-431. (in Chinese)
- [25] 曾达幸,王娟娟,樊明洲,等. 基于主成分分析方法的并联机构参数优化[J]. 中国机械工程, 2017,28(24):2899-2905. ZENG Daxing, WANG Juanjuan, FAN Mingzhou, et al. Parameter optimization of parallel mechanisms based on principal component analysis[J]. China Mechanical Engineering, 2017,28(24):2899-2905. (in Chinese)